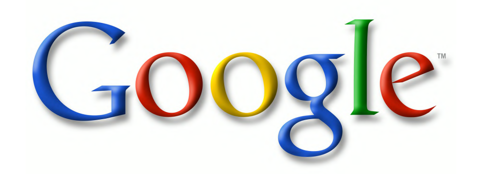




Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

Herausgegeben

von

L. Kronecker und **K. Weierstrass.**

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preussischer Behörden.

Fortsetzung des von

A. L. Crelle (1826 bis 1856) und **C. W. Borchardt** (1856 bis 1880)

herausgegebenen Journals.

Zweiundneunzigster Band.

In vier Heften.

Mit einer Figurentafel.

Berlin, 1882.

Druck und Verlag von G. Reimer.

Inhaltsverzeichniss des zweiundneunzigsten Bandes.

Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen.

(Von *L. Kronecker.*)

(Abdruck einer Festschrift zu Herrn *E. E. Kummers* Doctor-Jubiläum, 10. September 1881.)

Gleichzeitige Beschäftigung mit algebraischen und zahlentheoretischen Studien hat mich schon früh dazu geleitet, die arithmetische Seite der Algebra besonders ins Auge zu fassen. So führte mich die Untersuchung der aus Wurzeln *Abel*scher Gleichungen gebildeten complexen Zahlen auf jenes algebraisch-arithmetische Problem, alle *Abel*schen Gleichungen für irgend einen Rationalitäts-Bereich aufzustellen, dessen Lösung ich im Juni 1853 der hiesigen Akademie mitgetheilt habe. Seitdem habe ich stets in gedruckten Publicationen wie in meinen Universitäts-Vorlesungen die arithmetischen Gesichtspunkte in der Algebra besonders hervorgehoben und auch vielfach die arithmetischen Methoden auf einzelne algebraische Fragen angewendet. Doch war es mir kaum möglich, über diese meine Arbeiten Mittheilung zu machen, ohne mich auf die allgemeine Theorie berufen zu können, und ich habe mich desshalb seit längerer Zeit mit dem Gedanken getragen, eine ausführliche Arbeit darüber zu veröffentlichen. Aber mannigfache Hindernisse, vor Allem der Wunsch die vielen noch vorhandenen Lücken der Untersuchung auszufüllen, haben mich davon zurückgehalten, bis jetzt der Wunsch überwog, meinem Freunde und Lehrer zu seinem Festtage die Ergebnisse anhaltender Forschungen gesammelt und geordnet darzubringen, obgleich ich mir beim Anfange ebenso der Schwierigkeit meines Vorhabens wie nachher beim Abschlusse der Unvollkommenheit des Werkes bewusst gewesen bin.

Da der Umfang der Arbeit über das Maass einer Abhandlung angewachsen ist, habe ich sie der Uebersicht wegen in zwei Theile gesondert. In dem ersten werden die weiteren und engeren Sphären der Existenz der algebraischen Grössen fixirt, es wird die Art ihrer Existenz genauer dargelegt und zwar auch in dem Falle, wo mehrere derselben zugleich durch irgend

eine Anzahl algebraischer Gleichungen definirt oder eigentlich nur gefordert werden. Im zweiten Theile werden die arithmetischen Eigenschaften der *ganzen* algebraischen Grössen, d. h. diejenigen, welche auf ihre Theilbarkeit Bezug haben, entwickelt. — Während im ersten Theile von der unendlichen Menge algebraischer Grössen einer Sphäre ausgegangen wird und ihre zunächst nur begriffliche Zusammenfassung in Gattungen und Arten durch eine gemeinschaftliche Darstellung concreten Ausdruck erhält, wird im zweiten Theile von einer beliebigen endlichen Anzahl ganzer algebraischer Grössen ausgegangen und dem zunächst nur durch Analogie mit den ganzen rationalen Grössen geforderten Begriffe des gemeinsamen Theilers durch einen algebraischen Ausdruck entsprochen. Wie jener elementareren Aufgabe der Darstellung aller ganzen algebraischen Grössen einer Gattung nur dadurch genügt werden konnte, dass an die Stelle ganzer Functionen *einer* algebraischen Grösse lineare Functionen von mehreren genommen, d. h. dass den Potenzen einer einzigen algebraischen Grösse noch andere Elemente der Gattung associirt wurden, um die gebrochenen „idealen" Grössen zu wirklichen zu machen*), so erforderte das höhere Problem der Darstellung des gemeinschaftlichen Theilers ganzer algebraischer Grössen die Association der „ganzen algebraischen Formen", um diesen aus der Sphäre blosser Abstraction in die Wirklichkeit algebraischer Gebilde zu versetzen. Aus der Vereinigung dieser beiden Darstellungs-Principien werden im Schlussparagraphen die Fundamentalgleichungen hergeleitet, mit Hülfe deren sich die gesammte Theorie der algebraischen Grössen auf die der rationalen Functionen von Variabeln reduciren lässt, und da bei dieser Reduction sich die Anzahl der Variabeln und die Stufenzahl der Formen erhöht, so zeigt sich, dass jener mit den Formen selbst zugleich eingeführte Begriff ihrer verschiedenen Stufen den Begriff der algebraischen Irrationalität zu ersetzen geeignet ist.

Dass viele zum Thema gehörige Fragen noch unerledigt geblieben, viele behandelte Punkte näher auszuführen sind, habe ich an den einzelnen Stellen der Arbeit selbst hervorgehoben und schon durch den Titel angedeutet. Ich habe hier nur die „Grundzüge" einer im Wesentlichen neuen Behandlungsweise der algebraischen Grössen geben wollen oder können.

---

*) Diese Darstellungsweise hat in dem speciellen Falle der algebraischen Zahlen auch Herr *Dedekind* angewendet und vor mir 1871 durch den Druck veröffentlicht (vgl. die Vorbemerkung zu meiner Abhandlung im Journ. f. Math. Bd. 91, S. 301). Die Bedeutung gebrochener idealer Zahlen ist schon auf S. 31 der *Kummer*schen Abhandlung „Ueber die allgemeinen Reciprocitätsgesetze" aus dem Jahre 1859 dargelegt.

Erster Theil.

§ 1.

Die Rationalitäts-Bereiche.

Ich fixire, wie in meinen früheren Aufsätzen, z. B. in denjenigen, welche in den Monatsberichten der Berliner Akademie vom Juni 1853, vom Februar 1873 und vom März 1879 abgedruckt sind, durch die Grössen $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$, $\mathfrak{R}'''$, ... einen bestimmten Rationalitäts-Bereich $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$. In dem ersten von jenen erwähnten Aufsätzen sind die den Rationalitäts-Bereich charakterisirenden Grössen mit $A, B, C, \ldots$ bezeichnet. Die dort zuerst eingeführte Fixirung eines solchen Bereichs war, wie a. a. O. näher dargelegt ist, für die Klärung der Theorie der algebraischen Gleichungen durchaus nothwendig. Das Bedürfniss einer Präcisirung dessen, was bei einer bestimmten Untersuchung als rational zu betrachten sei, tritt bei *Galois* und auch schon bei *Abel*, namentlich in der Einleitung zu seinem unvollendeten Aufsatze „sur la résolution algébrique des équations" (Oeuvres complètes, Tome II p. 185), deutlich hervor. Doch geht *Abel* in seinen betreffenden Ausführungen, wie sich dann zeigt, nicht bis auf das nothwendige Fundament rationaler Functionen mit ganzzahligen Coefficienten zurück, sondern behält im Gegentheil die nähere Bestimmung der Coefficienten vor, und bei *Galois* macht die weitere Entwickelung die Präcisirung des „Rationalen" überflüssig. In dem letzten meiner oben erwähnten Aufsätze habe ich, wie auch stets in meinen Universitäts-Vorlesungen, den Ausdruck „Rationalitäts-Bezirk" gebraucht, um dessen in gewisser Hinsicht willkürliche Abgrenzung zu kennzeichnen; doch glaube ich den hier gewählten Ausdruck „Bereich" um desswillen vorziehen zu sollen, weil darin der Begriff des Räumlichen weniger scharf ausgeprägt ist, und weil er sich in Folge dessen den anderen in meinen Arbeiten und Universitäts-Vorlesungen eingeführten, durchweg nach *Gauss*' klassischem Muster der Systematik der beschreibenden Naturwissenschaften entlehnten Bezeichnungen näher anschliesst. Ueberdies findet sich auch im gewöhnlichen Sprachgebrauch bei dem Begriffe eines „Bereichs" die Möglichkeit einer verschiedenen Abgrenzung nicht geradezu ausgeschlossen, wenn sie auch darin weniger — als in dem Ausdruck „Bezirk" — hervorgehoben ist.

Der Rationalitäts-Bereich $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ enthält, wie schon die Bezeichnung deutlich erkennen lässt, alle diejenigen Grössen, welche rationale Functionen der Grössen $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$, $\mathfrak{R}'''$, ... mit ganzzahligen Coefficienten sind. Diese Bestimmung, dass die Coefficienten ganzzahlig sein sollen, ist nur hier im Anfange, um jedes Missverständniss auszuschliessen, hinzugefügt. Im Folgenden soll stets, wie in allen meinen früheren Aufsätzen, der Begriff „der rationalen Function der Grössen $\mathfrak{R}$", auch ohne weitere Hinzufügung, in seiner ursprünglichen, einzig präcisen Bedeutung als der einer rationalen Function mit ganzzahligen Coefficienten gebraucht werden. Wenn an einzelnen Stellen der Untersuchung bei rationalen Functionen der Grössen $\mathfrak{R}$ von der Beschaffenheit der Coefficienten abgesehen werden soll, so ist es geeigneter, sie als solche zu bezeichnen, welche die Elemente $\mathfrak{R}$ in rationaler Weise enthalten oder durch rationale Operationen aus denselben gebildet sind.

Durch den „Rationalitäts-Bereich $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$" sollen die sämmtlichen rationalen Functionen der Elemente $\mathfrak{R}$ — nur zur Erleichterung der Ausdrucksweise bei der Darstellung der Theorie — begrifflich zusammengefasst werden, und in derselben Weise soll auch noch weiterhin die Einordnung von „Grössen" nach bestimmten, besonders darzulegenden, gemeinsamen Eigenschaften in geschlossene Kreise oder Kategorieen erfolgen. Der Ausdruck „Grösse" ist hierbei in der weitesten arithmetisch-algebraischen Bedeutung zu nehmen, und es sind im Allgemeinen auch Grössengebilde wie „rationale Functionen unbestimmter Grössen", sogenannte „Formen beliebig vieler Veränderlicher" u. s. w. mit darunter zu verstehen, denen der Begriff der Maassgrösse, der des „grösser oder kleiner Seins" gänzlich fremd ist. Aber die gewöhnlichen Zahlengrössen, die rationalen wie die algebraischen irrationalen Zahlen, gehören mit in die Kategorie der zu behandelnden Grössen, und es ist desshalb ausdrücklich hervorzuheben, dass, obgleich hier das „grösser oder kleiner Sein" volle Bedeutung hat, dennoch bei allen im Folgenden vorkommenden Gruppirungen, weil sie nach allgemeineren Gesichtspunkten vorzunehmen sind, die Maassgrösse keinerlei Rücksicht bilden wird. Bei der in § 3 erfolgenden Einführung des Gattungsbegriffs liegt z. B. die zu einer besonderen Gattung gehörige Grösse $\sqrt{2}$ *„begrifflich"* weit ab von irgend einer der Quadratwurzel aus *zwei* noch so nahe liegenden rationalen Zahl; ebenso tritt bei der späteren Unterscheidung der ganzen und gebrochenen Zahlen für die der Grösse nach benachbarten

Zahlen der beiden Kategorieen eine begriffliche Trennung ein. Eben desshalb, und weil man doch gewohnt ist, sich die Zahlengrössen ihrer Maassgrösse nach, nicht aber ihren algebraischen Eigenschaften nach, an einander gereiht oder irgend wie räumlich gruppirt vorzustellen, halte ich es für angemessen, in der Terminologie die Ausdrücke mit entschieden räumlichem Gepräge zu vermeiden und nur solche, kaum zu umgehende allgemeine Ausdrücke — wie eben jenes Wort „Bereich" — oder allgemeine Bilder zu gebrauchen, welche die ursprünglich räumliche Bedeutung bei ihrer vielfachen Verwendung im gewöhnlichen Sprachgebrauche schon fast verloren haben. Aus diesem Gesichtspunkte habe ich auch geglaubt, von der Adoption der *Dedekind*schen Bezeichnung „Körper" absehen und meine ältere Bezeichnungsweise im Wesentlichen beibehalten zu sollen, zumal gerade — wenigstens für die vorliegenden Untersuchungen — mir eine ganz neue Begriffsbildung zur Zusammenfassung der rationalen Functionen bestimmter Grössen $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots$ nicht erforderlich und diese Zusammenfassung selbst durch das Wort „Rationalitäts-Bereich" in schlichter, ungezwungener Weise ausdrückbar erschien.

Mit der Fixirung des Rationalitäts-Bereichs wird die Frage der Zerlegbarkeit ganzer Functionen von einer oder mehreren Veränderlichen, deren Coefficienten jenem Bereich angehören, zu einer völlig bestimmten, insofern dabei verlangt wird, dass auch die Coefficienten der Factoren eben demselben Bereich angehören sollen. In diesem Sinne soll nun stets eine ganze Function von beliebig vielen Veränderlichen mit Coefficienten aus dem Rationalitäts-Bereich $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ schlechthin als „irreductibel" oder „unzerlegbar" bezeichnet werden, wenn sie keine eben solche ganze Function, d. h. keine ganze Function derselben Veränderlichen mit Coefficienten aus demselben Rationalitäts-Bereich als Factor enthält. (vgl. § 4). Die von den Veränderlichen unabhängigen Factoren werden hierbei vorläufig ausser Acht gelassen, da sie erst mit der Betrachtung der *ganzen* Functionen von $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$, $\mathfrak{R}'''$, $\ldots$, d. h. der *ganzen* Grössen des Bereichs zu fixiren sind.

§ 2.

Die algebraischen Grössen; ihre Eintheilung in Gattungen.

Jede Wurzel einer irreductibeln Gleichung n^{ten} Grades, deren Coefficienten dem Rationalitäts-Bereich $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ angehören, heisst eine

algebraische Function n^{ter} Ordnung der Grössen $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots$. Die n Wurzeln einer und derselben Gleichung sind „conjugirte algebraische Functionen" von $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots$.

Wenn man eine bestimmte algebraische Function n^{ter} Ordnung von $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots$ zu eben diesen Grössen $\mathfrak{R}$ hinzunimmt oder „adjungirt", so constituirt die Gesammtheit derjenigen dem neuen Rationalitäts-Bereich angehörigen Grössen, welche algebraische Functionen n^{ter} Ordnung sind, eine bestimmte *„Gattung" (genus)* algebraischer Functionen n^{ter} Ordnung von $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots$, also eine besondere, dem Bereich $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ *„entstammende"* Grössengattung. Die Zahl n soll auch die *„Ordnung der Gattung"* bezeichnen. Sind $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}'$ zwei algebraische Functionen verschiedener Gattungen von der Beschaffenheit, dass sämmtliche Functionen der Gattung $\mathfrak{G}$ zum Rationalitäts-Bereich $(\mathfrak{G}', \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ gehören, so soll die Beziehung der beiden Gattungen dadurch zum Ausdruck gebracht werden, dass die Gattung $\mathfrak{G}$ als unter der Gattung $\mathfrak{G}'$ *„enthalten"* bezeichnet wird. — Die Ordnung der enthaltenen Gattung $\mathfrak{G}$ ist ein Divisor der Ordnung der enthaltenden Gattung $\mathfrak{G}'$. Denn wenn $f(x)$ eine rationale Function von x bedeutet und mit $x_1, x_2, \ldots x_n$ die n conjugirten algebraischen Functionen x bezeichnet werden, so muss *jeder* irreductible Factor des Products

$$\Pi(y - f(x_k)) \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$

offenbar für *jeden* der conjugirten Werthe $y = f(x_k)$ verschwinden, und diese irreductibeln Factoren müssen also sämmtlich identisch sein. Die Anzahl der unter einander *verschiedenen* Werthe $f(x_k)$, d. h. die Ordnung der algebraischen Function $f(x)$, ist demnach ein Theiler von n (vgl. meinen citirten Aufsatz vom März 1879). — Wenn conjugirte algebraische Functionen zu verschiedenen Gattungen gehören, so werden diese Gattungen selbst als *„conjugirt"* bezeichnet. Es giebt also höchstens so viel einander conjugirte Gattungen, als ihre Ordnung beträgt. Wenn die Anzahl nur *Eins* ist, d. h. also, wenn die Gattung keine conjugirten hat, so ist sie eine *„Galois*sche Gattung".

Der Rationalitäts-Bereich $(\mathfrak{G}', \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ umfasst ausser den algebraischen Functionen der Gattung $\mathfrak{G}'$ noch alle diejenigen, welche den unter $\mathfrak{G}'$ enthaltenen Gattungen angehören, und dazu sind auch die rationalen Functionen von $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots$ zu rechnen, da sie gewissermassen die Gattung erster Ordnung bilden. Der bezeichnete Bereich soll *„der Bereich der Gattung $\mathfrak{G}'$"* genannt werden, und es wird also durch den Zusatz

des Wortes „Bereich" dem Gattungsbegriff eine erweiterte Bedeutung beigelegt. Die Gesammtheit der algebraischen Functionen höchster Ordnung, welche in dem Gattungs*bereich* enthalten sind, bildet die Gattung selbst, im engeren Sinne des Wortes. Das Verhältniss der Gattungen zu dem Bereich $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$, aus welchem sie entstammen, kann füglich dadurch zum Ausdruck kommen, dass dieser als der *„Stammbereich"* der daraus hervorgegangenen Gattungen bezeichnet wird. Jeder Gattungsbereich enthält seinen Stammbereich.

Sind $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{G}''$, $\mathfrak{G}'''$, ... beliebige Gattungen algebraischer Functionen von $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$, $\mathfrak{R}'''$, ..., so bildet die Gesammtheit der Grössen des Rationalitäts-Bereichs $(\mathfrak{G}', \mathfrak{G}'', \mathfrak{G}''', \ldots \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ wiederum einen Gattungsbereich $(\mathfrak{G}, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$, wie in dem zweiten Absatze des folgenden Paragraphen näher dargelegt wird. Die bestimmende Gattung $\mathfrak{G}$ ist hierbei ebensowohl dadurch charakterisirt, dass sie durch die algebraischen Functionen höchster Ordnung des Bereichs $(\mathfrak{G}', \mathfrak{G}'', \mathfrak{G}''', \ldots \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ gebildet wird, als dadurch, dass sie die Gattung niedrigster Ordnung ist, unter welcher die sämmtlichen Gattungen $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{G}''$, $\mathfrak{G}'''$, ... enthalten sind.

§ 3.

Die natürlichen Rationalitäts-Bereiche und die Gattungs-Bereiche.

Die Wahl der Grössen $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$, $\mathfrak{R}'''$, ..., d. h. also der Elemente eines Rationalitäts-Bereichs, unterliegt an sich keinerlei Beschränkung, doch ist es für die Behandlung der algebraischen Grössen völlig bedeutungslos, transcendente Zahlengrössen oder transcendente Functionen von Variabeln unter die Elemente mit aufzunehmen; denn die Resultate bleiben ungeändert, wenn an Stelle solcher transcendenten neue unabhängige Veränderliche gesetzt werden. Sind nämlich die Resultate der Theorie algebraischer Functionen von $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$, $\mathfrak{R}'''$, ... erst für diesen Fall, wo die transcendenten $\mathfrak{R}$ durch unabhängige Variable ersetzt sind, entwickelt, so können dieselben, ihrer Natur und Herleitung nach, nur durch solche Specialisation von Grössen $\mathfrak{R}$ alterirt oder modificirt werden, bei welcher *algebraische* Beziehungen zwischen denselben eintreten*). Es kann daher, unbeschadet der Allge-

*) In dem oben erwähnten, unvollendeten Aufsatze *Abels* (Oeuvres complètes 1839 Tome II p. 185) kommen Stellen vor, z. B. auf S. 188 und S. 196, aus welchen hervorzugehen scheint, dass *Abel* bei seiner ersten Beschäftigung mit dem Gegenstande noch glaubte, den Fall transcendenter Grössen $\mathfrak{R}$ mit in Betracht ziehen zu müssen.

meinheit, angenommen werden, ***dass die Elemente eines Rationalitäts-Bereichs nur aus einer Anzahl veränderlicher oder unbestimmter Grössen und algebraischer Functionen derselben bestehen.***

Es ist an sich klar, dass man zu den Elementen eines Rationalitäts-Bereichs, ohne denselben zu ändern, jede beliebige rationale Function derselben hinzufügen, sowie auch andererseits jede der Grössen $\mathfrak{R}$, welche eine rationale Function der übrigen ist, weglassen kann. Wenn ferner eine der Grössen $\mathfrak{R}$ eine *algebraische* Function der übrigen ist, so kann eine beliebige andere Function derselben Gattung dafür gesetzt werden. Da nun für zwei algebraische Functionen verschiedener Gattungen $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{G}''$ stets auf unendlich viele Weisen lineare Functionen mit ganzzahligen Coefficienten $\mathfrak{N}'\mathfrak{G}'+\mathfrak{N}''\mathfrak{G}''$ bestimmt werden können, welche die Gattung niedrigster Ordnung repräsentiren, unter denen beide Gattungen enthalten sind, so kann, wenn $\mathfrak{G}'$ und $\mathfrak{G}''$ unter den Elementen vorkommen, erst $\mathfrak{N}'\mathfrak{G}'+\mathfrak{N}''\mathfrak{G}''$ hinzugefügt, alsdann aber sowohl $\mathfrak{G}'$ als $\mathfrak{G}''$ weggelassen werden, und man gelangt auf diese Weise allmählich zu dem am Schlusse des § 2 angegebenen Resultat, dass der Rationalitäts-Bereich $(\mathfrak{G}', \mathfrak{G}'', \mathfrak{G}''', \ldots \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ mit einem Rationalitäts-Bereich $(\mathfrak{G}, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ identisch ist, in welchem $\mathfrak{G}$ als Gattung niedrigster Ordnung bestimmt ist, unter der die sämmtlichen Gattungen $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{G}''$, $\mathfrak{G}'''$, ... enthalten sind. Man kann sich hiernach schliesslich auf die Annahme solcher Rationalitäts-Bereiche $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ beschränken, in welchen die Elemente eine Anzahl veränderlicher oder unbestimmter Grössen sind, zu denen höchstens *eine* algebraische Function derselben tritt. Für ein solches Hinzutreten von Grössen $\mathfrak{R}$, die den Rationalitäts-Bereich in einer für die algebraische Betrachtung wesentlichen Weise modificiren, bedient man sich seit *Galois* des technischen Ausdrucks der Adjunction. Die allgemeinste Annahme kann also dahin formulirt werden, dass für die Grössen $\mathfrak{R}$ eine Anzahl Variabler zu setzen und denselben höchstens *eine* algebraische Function zu adjungiren ist. Hierin ist auch der Fall mit inbegriffen, wo die Grössen $\mathfrak{R}$ überhaupt fehlen, d. h. der Fall, in welchem der Rationalitäts-Bereich derjenige der rationalen Zahlen, also der *„absolute“* Rationalitäts-Bereich ist, und dieser kann offenbar auch dadurch bezeichnet werden, dass nur *eine* Grösse $\mathfrak{R}$ und diese gleich *Eins* angenommen wird. Die algebraischen Functionen der Grössen $\mathfrak{R}$, d. h. die aus dem Rationalitäts-Bereich hervorgehenden algebraischen Grössen sind in diesem Falle *„algebraische Zahlen“;* sie sind es offenbar auch in dem Falle, wenn nur *ein* Element

$\mathfrak{R}$, und dieses selbst gleich einer bestimmten algebraischen Zahl angenommen wird.

Wenn für den allgemeinen Fall, wo die Elemente $\mathfrak{R}$ eine Anzahl veränderlicher oder unbestimmter Grössen enthalten, unbedenklich von algebraischen Functionen der Grössen $\mathfrak{R}$ die Rede sein konnte, so erscheint doch diese Ausdrucksweise nicht mehr völlig zutreffend, wenn nur *eine* Grösse $\mathfrak{R} = 1$ vorhanden ist. Um diesen besonderen Fall auch in der *Ausdrucksweise* mit zu umfassen, ist es vorzuziehen, die algebraischen Functionen der Grössen $\mathfrak{R}$ auch im allgemeinen Falle veränderlicher oder unbestimmter Grössen $\mathfrak{R}$ als algebraische, dem Rationalitäts-Bereich $(\mathfrak{R})$ entstammende *Grössen* zu bezeichnen. Da jedoch die Anwendung des Begriffs der algebraischen Functionen auf den besonderen Fall $\mathfrak{R} = 1$ nur in ganz äusserlicher Hinsicht bedenklich erscheint, so kann dieser Begriff und die dem entsprechende Ausdrucksweise neben der anderen, welche sich dem Falle $\mathfrak{R} = 1$ besser anpasst, gebraucht werden.

Ein Rationalitäts-Bereich ist im Allgemeinen ein *willkürlich* abgegrenzter Grössenbereich, doch nur, so weit es der Begriff gestattet. Da nämlich ein Rationalitäts-Bereich nur durch Hinzufügung beliebig gewählter Elemente $\mathfrak{R}$ vergrössert werden kann, so erfordert jede willkürliche Ausdehnung seiner Begrenzung zugleich die Umschliessung *aller* durch das neue Element rational ausdrückbaren Grössen. Es giebt aber auch *natürlich* abgegrenzte Rationalitäts-Bereiche, so das Reich der gewöhnlichen rationalen Zahlen, welches als das absolute in allen Rationalitäts-Bereichen enthalten ist und, wie es durch $\mathfrak{R} = 1$ bezeichnet worden, auch gewissermassen die absolute Einheit des Rationalitäts-Begriffs repräsentirt. Auch das Reich der rationalen Functionen von $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots$, wenn diese sämmtlich unabhängige Variable bedeuten, ist ein „*natürlich*" abgegrenztes; es ist darin das Reich der rationalen Zahlen sowie überhaupt das der rationalen Functionen von einem *Theile* der Variabeln $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots$ mit enthalten.

Aus einem Rationalitäts-Bereich „gehen die verschiedenen Gattungen algebraischer Functionen hervor"; sie können wieder ganz oder theilweise in einen grösseren Bereich zusammengefasst werden, in welchem dann nothwendig der ursprüngliche Rationalitäts-Bereich enthalten ist. Es ist an sich klar, dass, wenn die Elemente $\mathfrak{R}'_0, \mathfrak{R}''_0, \ldots$ zu einem Rationalitäts-Bereich $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots)$ gehören, der Rationalitäts-Bereich $(\mathfrak{R}'_0, \mathfrak{R}''_0, \ldots)$ ein Theilbereich dessen mit den Elementen $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots$ ist. Sind die Elemente $\mathfrak{R}'_0, \mathfrak{R}''_0, \ldots$

und $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$, ... *gegenseitig* durch einander rational ausdrückbar, so sind die beiden dadurch bestimmten Rationalitäts-Bereiche identisch.

Die *sämmtlichen* aus einem natürlichen Rationalitäts-Bereich hervorgehenden Gattungen algebraischer Grössen bilden zusammen ein geschlossenes, den Stammbereich mit einschliessendes Grössenreich, so z. B. das Gesammtreich der algebraischen Zahlen, oder das Gesammtreich aller algebraischen Functionen von unabhängigen Variabeln $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$, ..., welches das erstere in sich schliesst. Man kann aber auch ein solches kleineres *Gesammt*reich $(\mathfrak{R}_0', \mathfrak{R}_0'', \ldots)$ einem grösseren Rationalitäts-Bereich $(\mathfrak{R}_0', \mathfrak{R}_0'', \ldots, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots)$ anschliessen und also z. B. im Falle $\mathfrak{R}_0 = 1$ einen aus variabeln Elementen $\mathfrak{R}$ gebildeten Rationalitäts-Bereich $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots)$ mit dem Reiche aller algebraischen Zahlen verbinden, d. h. also bei der Behandlung algebraischer Functionen der Variabeln $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$, ... von den „Constanten" absehen. Dies geschieht z. B. in der Regel bei analytisch-geometrischen Untersuchungen, wenn $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$, ... die Coordinaten bedeuten. So kommt es bei der Frage nach der Zerlegbarkeit einer ganzen rationalen Function $F(x, y, z)$, wenn man $F(x, y, z) = 0$ als die Gleichung einer algebraischen Fläche betrachtet, in der Regel nicht darauf an, ob die Coefficienten der Factoren rationale Zahlen sind oder nicht. Aber man braucht, wie dieses Beispiel zeigt, bei bestimmten Fragen doch nur die Adjunction *bestimmter* Grössen, und anstatt von vorn herein unendlich viele Grössen zu adjungiren, genügt es daher, sich nur die Adjunction besonderer, aus der Untersuchung selbst sich ergebender Grössen vorzubehalten. — Im Allgemeinen hat sich also, wie oben dargelegt worden, die arithmetische Behandlung der algebraischen Grössen auf Rationalitäts-Bereiche mit lauter unabhängigen Variabeln und solche, bei denen überdies noch eine Gattung algebraischer Functionen derselben adjungirt ist, also auf *„natürliche Stammbereiche und Gattungsbereiche"* zu beschränken (vgl. meinen Aufsatz „Ueber die verschiedenen *Sturm*schen Reihen" im Monatsbericht der Berliner Akademie vom Febr. 1873, S. 122 und 123).

§ 4.

Die Zerlegung ganzer Functionen von Variabeln in irreductible Factoren.

Die im Art. 1 aufgestellte Definition der Irreductibilität entbehrt so lange einer sicheren Grundlage, als nicht eine Methode angegeben ist, mittels deren bei einer bestimmten, vorgelegten Function entschieden werden

kann, ob dieselbe der aufgestellten Definition gemäss irreductibel ist oder nicht*). Die zunächst sich darbietende Methode, die Coefficienten der Theiler einer ganzen Function von Veränderlichen durch Elimination aus den dafür bestehenden Gleichungen zu bestimmen, empfiehlt sich schon um desswillen nicht, weil bei naturgemässer und vollständiger Entwickelung der Theorie der Elimination die Zerlegung ganzer Functionen in ihre Factoren gebraucht wird. Desshalb soll hier eine neue Methode dargelegt werden, welche nur einfache, hier bereits verwendbare Hülfsmittel in Anspruch nimmt.

Ist erstens zu entscheiden, ob eine ganze ganzzahlige Function einer Variabeln x rationale Divisoren hat oder nicht, so braucht man, wenn dieselbe vom Grade $2n$ oder $2n+1$ ist, offenbar nur die etwaigen Theiler n^{ten} oder niedrigeren Grades zu ermitteln. Sind nun $r_0, r_1, r_2, \dots r_n$ beliebige, von einander verschiedene, positive oder negative ganze Zahlen, und setzt man

$$g_0(x) = \frac{(x-r_1)(x-r_2)\dots(x-r_n)}{(r_0-r_1)(r_0-r_2)\dots(r_0-r_n)}, \quad g_1(x) = \frac{(x-r_0)(x-r_2)\dots(x-r_n)}{(r_1-r_0)(r_1-r_2)\dots(r_1-r_n)}, \quad \dots,$$

so ist jede ganze ganzzahlige Function $f(x)$, deren Grad höchstens gleich n ist, als ganze ganzzahlige lineare Function der $n+1$ Functionen $g(x)$ darstellbar, und zwar ist

$$f(x) = f(r_0)g_0(x)+f(r_1)g_1(x)+\dots+f(r_n)g_n(x).$$

Soll also $f(x)$ ein Theiler der vorgelegten Function $F(x)$ sein, so muss bei dieser Darstellungsweise der Coefficient von $g_h(x)$ ein Divisor der ganzen Zahl $F(r_h)$ sein, und man hat daher nur eine endliche Anzahl von Coefficienten-Systemen zu discutiren, um alle Theiler von $F(x)$ zu erhalten oder der Irreductibilität von $F(x)$ gewiss zu sein. — Eben dasselbe Verfahren kann nun direct auf ganze Functionen mehrerer Variabeln ausgedehnt oder beim allmählichen Uebergange zu 2, 3 und mehr Variabeln angewendet werden. Aber es ist schon an sich (theoretisch) auch für Functionen mehrerer Variabeln vollkommen ausreichend, da eine ganze Function von $x, x', x'', x''', \dots x^{(n)}$, wenn

$$x' = c_1 x^g, \quad x'' = c_2 x^{g^2}, \quad x''' = c_3 x^{g^3}, \quad \dots \quad x^{(n)} = c_n x^{g^n}$$

gesetzt und g hinreichend gross genommen wird, in eine ganze Function

*) Das analoge Bedürfniss, welches freilich häufig unbeachtet geblieben ist, zeigt sich auch in vielen anderen Fällen, bei Definitionen wie bei Beweisführungen, und ich werde bei einer anderen Gelegenheit in allgemeiner und eingehender Weise darauf zurückkommen.

der einzigen Variabeln x übergeht, welche in Beziehung auf ihre Zerlegbarkeit so wie überhaupt in algebraischer Hinsicht die transformirte Function von $x, x', x'', \ldots x^{(n)}$ durchaus zu ersetzen geeignet ist. Bei genügender Grösse der Zahl g werden nämlich die verschiedenen Producte von Potenzen der $n+1$ Variabeln x in ganze Functionen der einzigen Variabeln x verwandelt, welche von lauter verschiedenen Graden und also linear unabhängig sind. (Vgl. meine Mittheilung im Monatsbericht der Berliner Akademie vom Nov. 1880, S. 938, 939.)

Nachdem hiermit eine Methode angegeben worden, mittels deren eine ganze ganzzahlige Function von beliebig vielen Veränderlichen in ihre irreductibeln Factoren zerlegt werden kann, wenn für den Begriff der Irreductibilität der natürliche Rationalitäts-Bereich festgehalten wird, bleibt nur noch übrig, die Zerlegung auch für den Fall, wo eine der Grössen $\mathfrak{R}$ eine algebraische Grösse ist, zu bewirken. Dies geschieht in folgender Weise, wenn der Einfachheit halber eine der Variabeln hervorgehoben wird und also nur die Zerlegung einer ganzen Function $F(x)$ zu bewirken ist, deren Coefficienten einem Rationalitäts-Bereich $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots)$ angehören, in welchem $\mathfrak{R}$ eine algebraische Function der übrigen Grössen $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots$ ist. Dabei kann angenommen werden, dass die Function $F(x)$ keine gleichen Factoren enthält; denn anderenfalls würde man dieselbe von gleichen Factoren dadurch befreien können, dass man sie durch den grössten Theiler, den die Function $F(x)$ mit ihrer Ableitung gemein hat, dividirt. Man setze nun zuvörderst $z+u\mathfrak{R}$ an Stelle von x in $F(x)$, wo u eine unbestimmte Grösse bedeutet; man betrachte ferner F selbst als Function von x und der zum Rationalitäts-Bereich gehörigen algebraischen Grösse $\mathfrak{R}$, welche also auch in den Coefficienten vorkommen kann, bezeichne demnach die Function F durch $F(x, \mathfrak{R})$ und bilde das Product aller mit einander conjugirten Ausdrücke

$$F(z+u\mathfrak{R}, \mathfrak{R}),$$

d. h. aller derjenigen, welche entstehen, wenn man die mit $\mathfrak{R}$ conjugirten algebraischen Grössen an Stelle von $\mathfrak{R}$ setzt. Dieses Product ist eine ganze Function von x, deren Coefficienten rationale Functionen der Variabeln $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots$ sind, kann also nach dem Vorhergehenden in irreductible Factoren zerlegt werden. Sind diese Factoren: $F_1(z), F_2(z), \ldots$, so bilden, wie leicht zu sehen, die grössten gemeinschaftlichen Theiler von

$$F(z+u\mathfrak{R}, \mathfrak{R}) \quad \text{und} \quad F_h(x)$$

für $h=1, 2, \dots$ die irreductibeln Factoren von $F(z+u\mathfrak{R}, \mathfrak{R})$, aus denen die Factoren von $F(x)$ selbst unmittelbar hervorgehen, wenn wieder $x-u\mathfrak{R}$ an Stelle von z gesetzt wird. Es ist noch zu bemerken, dass die Einführung von $z+u\mathfrak{R}$ an Stelle von x zu dem Zwecke erfolgt ist, das Vorkommen von $\mathfrak{R}$ in den Coefficienten zu sichern.

Für jede ganze Function beliebig vieler Veränderlicher, deren Coefficienten einem festgesetzten Rationalitäts-Bereich $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \dots)$ angehören, ist hiermit die Möglichkeit ihrer Zerlegung in irreductible Factoren dargethan. Dass eine solche Zerlegung nur in einer einzigen Weise möglich, also vollkommen bestimmt ist, beruht — da man sich aus dem oben angeführten Grunde auf Functionen einer Variabeln beschränken kann — einfach auf dem Satze, dass ein Product von zwei ganzen Functionen von x nur dann durch einen irreductibeln Factor theilbar sein kann, wenn eine der beiden Functionen diesen Factor enthält. Für den absoluten Rationalitäts-Bereich behält dieser Satz auch noch seine Geltung, wenn der irreductible Factor eine Function *null*ten Grades ist, also x gar nicht enthält. Ein solcher irreductibler Factor ist demnach eine gewöhnliche Primzahl, und es ist schon in Art. 42 von *Gauss*' Disqq. Arithm. nachgewiesen, dass ein Product $\varphi(x)\psi(x)$ nicht durch eine Primzahl p theilbar sein kann, ohne dass einer der Factoren $\varphi(x)$ oder $\psi(x)$ durch p theilbar ist. In dem angenommenen Falle $\mathfrak{R}=1$ sind die Functionen, deren Zerlegung entwickelt worden ist, ***ganze ganzzahlige Functionen beliebig vieler Veränderlicher,*** und die obigen Ausführungen enthalten daher die Methode, wie jede solche Function in irreductible Factoren zerlegt werden kann, und zugleich den Nachweis, dass dies nur auf eine einzige völlig bestimmte Weise möglich ist.

§ 5.

Die ganzen algebraischen Grössen; ihre Eintheilung in Arten.

Wenn der Rationalitäts-Bereich $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \dots)$ ein natürlicher ist, d. h. wenn es der Bereich $\mathfrak{R}=1$ ist, oder wenn die Elemente $\mathfrak{R}$ sämmtlich unabhängige Variable sind, so bilden die ganzen ganzzahligen Functionen von $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \dots$ einen in sofern wieder in sich geschlossenen Theilbereich, als die sämmtlichen ganzen ganzzahligen Functionen der darin enthaltenen Grössen ebenfalls mit darin enthalten sind. Diese ganzen Functionen von $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \dots$ sollen kurzweg als die „*ganzen*“ Grössen des

Rationalitäts-Bereichs bezeichnet werden. Für den dieselben umfassenden Theilbereich könnte auch füglich, nach Analogie des Ausdrucks „Rationalitäts-Bereich“, die Benennung *„Integritäts-Bereich“* eingeführt werden. Doch werde ich in der vorliegenden Arbeit von dieser Benennung kaum Gebrauch machen, sondern nur die Bezeichnung des Theilbereichs der *„ganzen“* Grössen eines Rationalitäts-Bereichs mit den Elementen $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$, $\mathfrak{R}'''$, ... durch eckige Parenthesen anwenden und denselben demgemäss als den Bereich $[\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots]$ von dem gesammten Rationalitäts-Bereich $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ unterscheiden. Dies vorausgeschickt, kann die Definition der *ganzen algebraischen* Functionen in einfacher Form gegeben werden.

Eine Grösse x soll eine *„ganze algebraische Function der Variabeln $\mathfrak{R}$“* oder eine *„ganze algebraische Grösse“* genannt werden, wenn sie einer Gleichung genügt, in welcher der Coefficient der höchsten Potenz von x gleich *Eins* ist, und die übrigen Coefficienten ganze ganzzahlige Functionen der Variabeln $\mathfrak{R}$, also Grössen des Bereichs $[\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots]$ sind. Für den Fall $\mathfrak{R} = 1$ sollen die ganzen algebraischen Grössen auch als *„ganze algebraische Zahlen“* bezeichnet werden. Für den Fall veränderlicher $\mathfrak{R}$ ist eine Grösse als ganze algebraische Function einer der Variabeln $\mathfrak{R}$ dadurch charakterisirt, dass sie für endliche Werthe derselben niemals unendlich wird. Da ganze algebraische Functionen von ganzen algebraischen Grössen offenbar selbst ganze algebraische Grössen sind, so bildet die Gesammtheit der aus einem natürlichen Stammbereich $[\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots]$ hervorgehenden ganzen algebraischen Grössen ein in sich geschlossenes algebraisches Grössenreich.

Für jeden natürlichen Rationalitäts-Bereich $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ gilt der Satz, dass eine ganze algebraische Grösse, wenn sie rational ist, auch eine ganze ganzzahlige Function von $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$, $\mathfrak{R}'''$, ... sein muss. Soll nämlich eine gebrochene rationale Function von $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$, $\mathfrak{R}'''$, ... einer Gleichung n^{ten} Grades genügen, in welcher der Coefficient von x^n gleich *Eins* ist, und die übrigen Coefficienten ganze ganzzahlige Functionen von $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$, $\mathfrak{R}'''$, ... sind, so muss offenbar die n^{te} Potenz des Zählers der gebrochenen rationalen Functionen durch den Nenner theilbar sein. Dies ist aber, da Zähler und Nenner nach § 4 in ihre irreductibeln Factoren zerlegt vorausgesetzt werden können, unmöglich, wenn nicht der Nenner gleich *Eins* ist. Falls eine der Grössen $\mathfrak{R}$ eine algebraische Function der übrigen und also der Rationalitäts-Bereich ein Gattungsbereich ist, hat der Satz — genau in der obigen

Form — nicht mehr unbeschränkte Geltung; so ist z. B. für $\mathfrak{R} = \sqrt{-3}$ die dritte Wurzel der Einheit $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$, obgleich in Bruchform erscheinend, algebraisch ganz.

Bezeichnet $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$, wie durchweg in diesem und dem folgenden Paragraphen, einen natürlichen Rationalitäts-Bereich, und sind $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}''$, $\mathfrak{S}'''$, ... irgend welche jenem Bereich entstammende, *ganze* algebraische Grössen der Gattung $\mathfrak{G}$, so bilden diejenigen ganzen ganzzahligen Functionen von

$$\mathfrak{R}', \quad \mathfrak{R}'', \quad \mathfrak{R}''', \quad \ldots; \quad \mathfrak{S}', \quad \mathfrak{S}'', \quad \mathfrak{S}''', \quad \ldots,$$

welche der Gattung angehören, eine besondere *„Art"* oder *„Species"* derselben. Ebenso wie der Begriff der Gattung in § 2 durch den des Gattungsbereichs erweitert worden ist, soll auch der Begriff der Art erweitert und im *„Art-Bereich"* $[\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots; \mathfrak{S}', \mathfrak{S}'', \mathfrak{S}''', \ldots]$ die *Gesammtheit* der ganzen ganzzahligen Functionen der „Elemente" $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ zusammengefasst werden. Der Art-Bereich schliesst also auch ganze algebraische Grössen von Gattungen, die nicht zur Gattung $\mathfrak{G}$ gehören, sondern nur unter derselben enthalten sind, in sich ein, aber er ist vollständig in dem Gattungs*bereich* $(\mathfrak{G})$ enthalten, bildet also einen Theilbereich desselben. Auch verschiedene Arten einer und derselben Gattung stehen, wie die Gattungen selbst, in der Beziehung zu einander, dass eine unter der anderen enthalten, dass also ein Art-Bereich von dem anderen eingeschlossen ist. Die sämmtlichen Bereiche der besonderen Arten einer Gattung sind, wie sich von selbst versteht, in dem Gesammtbereich der ganzen algebraischen Grössen der Gattung enthalten. Dass aber auch dieser Gesammtbereich selber ein „Art-Bereich" im oben definirten Sinne des Wortes ist, d. h. also, dass ganze algebraische Grössen $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}''$, $\mathfrak{S}'''$, ... existiren, durch welche im Verein mit den Grössen $\mathfrak{R}$ sich alle ganzen algebraischen Grössen der Gattung ganz und rational darstellen lassen, bedarf eines besonderen Beweises; es ist dies eines der Fundamente der arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen. Die durch solche Grössen $\mathfrak{S}$ bestimmte Art soll, um ihrem Verhältniss zu den übrigen Arten Ausdruck zu geben, als die *„Haupt-Art"* oder *„Haupt-Species"* bezeichnet werden.

Nach den gegebenen Begriffsbestimmungen enthalten die verschiedenen Arten algebraischer Grössen überhaupt *nur ganze* algebraische Grössen; dennoch soll zur Erinnerung in der Regel das Beiwort „ganz" hinzugefügt

werden. Es ist ferner hervorzuheben, dass die „Grössen der Haupt-Art" mit den „ganzen algebraischen Grössen der Gattung" identisch sind, und es soll nur, je nachdem auf den Gattungs- oder Art-Begriff mehr Gewicht zu legen ist, die eine oder die andere Ausdrucksweise vorgezogen werden.

Die Bezeichnung der hier unterschiedenen Kategorieen ganzer algebraischer Grössen als „Arten" oder „Species" ist ***Dirichlet*** entlehnt. Im zweiten Theile seiner berühmten Abhandlung „Recherches sur diverses applications de l'Analyse infinitésimale à la Théorie des Nombres" (Journal für Mathematik, Bd. 21 S. 2) hat er die von ***Gauss*** „eigentlich und uneigentlich primitiv" genannten quadratischen Formen als solche von erster und zweiter Art (formes de première et de seconde espèce) bezeichnet. Geht man von den quadratischen Formen zu den complexen Zahlen über, welche aus ihren Linearfactoren entstehen, so entsprechen den beiden ***Dirichlet***schen „Arten" eben diejenigen, für welche oben diese Benennung eingeführt ist. Im Uebrigen aber sind es die verschiedenen „Ordnungen" der quadratischen Formen, denen die hier unterschiedenen „Arten" der zugehörigen complexen Zahlen entsprechen, und es erscheint mir als ein Vortheil, dass der ***Gauss***sche Ausdruck „Ordnung", welcher schon so viele Bedeutungen hat, durch die in erweitertem Sinne gebrauchte ***Dirichlet***sche Bezeichnung umgangen wird.

§ 6.

Lineare Darstellung der Grössen der Hauptart durch eine endliche Anzahl von Elementen.

Um den Nachweis zu führen, dass die Gesammtheit der ganzen algebraischen Grössen einer dem natürlichen Rationalitäts-Bereich $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ entstammenden Gattung $\mathfrak{G}$ in der That, wie im vorigen Paragraphen gesagt ist, eine „Art" und zwar die „Hauptart" bildet, soll nunmehr gezeigt werden, dass sich jede ganze algebraische Grösse der Gattung $\mathfrak{G}$ als homogene ganze lineare Function einer endlichen Anzahl solcher Grössen mit Coefficienten aus dem Bereich $[\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots]$ darstellen lässt, d. h. so, dass die Coefficienten ganze ganzzahlige Functionen von $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots$ sind. Dabei stütze ich mich in erster Linie darauf, dass jede Grösse einer Gattung n^{ter} Ordnung als homogene ganze lineare Function von n linear unabhängigen Grössen der Gattung ausdrückbar ist, d. h. von n Grössen, zwischen denen keine lineare Relation mit rationalen, dem Bereich $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ angehörigen Coefficienten besteht. Bei einer solchen Dar-

stellung brauchen aber die Coefficienten der homogenen linearen Function nicht nothwendig ganz zu sein, selbst dann nicht, wenn jede der n Grössen und auch die dargestellte Grösse ganz ist. Indessen tritt in diesem Falle offenbar nur die aus den n zur Darstellung verwendeten Grössen und ihren Conjugirten gebildete Determinante als Nenner der Coefficienten auf. Es lassen sich daher alle ganzen algebraischen Grössen der Gattung als homogene ganze lineare Functionen von n ganzen Grössen der Gattung so darstellen, dass die Coefficienten gebrochene Functionen von $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$, $\mathfrak{R}'''$, ... mit einem bestimmten Nenner werden, welcher das Quadrat jener Determinante, also, als ganze symmetrische Function von conjugirten ganzen algebraischen Grössen, eine ganze Function von $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$, $\mathfrak{R}'''$, ... ist und als *„die Discriminante der n Grössen“* bezeichnet werden soll. Da nun aber nicht *alle* linearen Functionen der n Grössen mit solchen Coefficienten *ganze* algebraische Grössen der Gattung sind, so handelt es sich nur noch darum, die Bedingungen für die Coefficienten festzustellen, unter denen die dargestellte Grösse algebraisch ganz wird. Hierbei genügt es offenbar, wie hier und im vorigen Paragraphen durchweg geschehen ist, nur natürliche Rationalitäts-Bereiche in Betracht zu ziehen, wo die Grössen $\mathfrak{R}$ lediglich unabhängige Veränderliche sind, also keine algebraische Grösse enthalten. In dem einfachsten Falle, wo die Anzahl dieser Veränderlichen gleich Null oder also $\mathfrak{R} = 1$ ist, reicht es hin, für die Coefficienten alle echten Brüche zu setzen, deren Nenner die Discriminante ist, und alle auf diese Weise resultirenden algebraischen Zahlen darauf hin zu prüfen, ob sie *ganz* sind oder nicht. Nimmt man alsdann diejenigen derselben, welche sich als algebraisch ganz erweisen, als neue Elemente zu den ursprünglichen n Elementen der Darstellung hinzu, so leuchtet ein, dass eine homogene lineare ganzzahlige Function aller dieser Elemente an sich eine ganze algebraische Zahl der Gattung ist und auch zur Darstellung *aller* ausreicht. — Für den Fall, wo die Grössen $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$, $\mathfrak{R}'''$, ... Variable sind, ist die allgemeine Theorie der Elimination zu Hülfe zu nehmen (vgl. § 10). Sind z. B. nur zwei Veränderliche $\mathfrak{R}' = v$, $\mathfrak{R}'' = w$ vorhanden, so kann vorausgesetzt werden, dass die Zahl, welche den Grad der Discriminante in Beziehung auf v bezeichnet, zugleich die Dimension in Beziehung auf v und w angiebt, da sich dies durch lineare Transformation der beiden Variabeln stets erreichen lässt. Alsdann ist eine homogene lineare Function der n linear unabhängigen algebraischen Grössen, die zunächst als Elemente der Darstellung dienen,

zu bilden, deren Coefficienten als ganze Functionen von v, dividirt durch die Discriminante, anzunehmen sind, und zwar so, dass der Grad dieser ganzen Functionen kleiner als der Grad der Discriminante ist. Die Coefficienten dieser n ganzen Functionen von v sind nun als ganze Functionen von w so zu bestimmen, dass jene angenommene homogene lineare Function der n Elemente algebraisch ganz wird. Dadurch erhält man für die zu bestimmenden ganzen Functionen von w ein System von Bedingungsgleichungen, in welchem die Coefficienten ganze Functionen von w sind, und welches — wie aus der Entstehung erhellt — so beschaffen sein muss, dass, wenn zwei verschiedene Systeme von Functionen

$$\varphi_1(w), \quad \varphi_2(w), \quad \ldots; \quad \psi_1(w), \quad \psi_2(w), \quad \ldots$$

demselben genügen würden, auch deren lineare Verbindungen

$$\lambda\varphi_1(w)+\mu\psi_1(w), \quad \lambda\varphi_2(w)+\mu\psi_2(w), \quad \ldots$$

das Gleichungssystem befriedigen müssten. Man erschliesst hierdurch aus der Natur des Problems selbst, dass die Resolvente des Gleichungssystems (vgl. § 10) linear sein muss, und dass sich eine Anzahl der zu bestimmenden Functionen von w als lineare Functionen der übrigen in der Form

$$\varphi_1\theta_1+\varphi_2\theta_2+\cdots+\varphi_m\theta_m=\varphi_{m+1}\theta, \quad \varphi_1\theta'_1+\varphi_2\theta'_2+\cdots+\varphi_m\theta'_m=\varphi_{m+2}\theta, \quad \ldots$$

ergiebt, wenn $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ die zu bestimmenden, und $\theta, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta'_1, \theta'_2, \ldots$ bestimmte ganze Functionen von w bedeuten. Die Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ sind hiernach nur der Bedingung unterworfen, dass die Ausdrücke

$$\varphi_1\theta_1+\varphi_2\theta_2+\cdots+\varphi_m\theta_m, \quad \varphi_1\theta'_1+\varphi_2\theta'_2+\cdots+\varphi_m\theta'_m, \quad \ldots$$

sämmtlich durch θ theilbar sein sollen, und daraus resultiren, wenn die Functionen φ sämmtlich von niedrigerem Grade als θ angenommen werden, lineare Gleichungen für die Coefficienten der m Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_m$. Bei dieser Methode zur Bestimmung einer allgemeinen Form der ganzen algebraischen Grössen einer Gattung ist der Einfachheit halber von den Zahlcoefficienten abgesehen und nur dafür gesorgt worden, dass die dargestellte Grösse in Beziehung auf die Variabeln v und w ganz, d. h. also für endliche Werthe derselben niemals unendlich werde. Die Methode selbst ist aber auch anzuwenden, um aus jener allgemeinen Form diejenige speciellere zu ermitteln, welche nur ganze algebraische Grössen, im vollen Sinne des Wortes, enthält; sie führt ganz unmittelbar zu einer Reihe von solchen Grössen, welche als Elemente zur Darstellung aller ganzen algebraischen

Grössen der Gattung in der oben bezeichneten Weise dienen können, nämlich so, dass eine homogene ganze lineare Function der Elemente mit Coefficienten, die ganze rationale Functionen von v und w sind, jede ganze algebraische der Gattung angehörige Function von v und w repräsentirt.

§ 7.

Besondere Fälle, in denen die lineare Darstellung der Grössen der Art nur eine der Ordnungszahl gleiche Anzahl von Elementen erfordert.

In besonderen Fällen genügen zur Darstellung der sämmtlichen Grössen einer bestimmten Art solche Systeme von Elementen, deren Anzahl die Ordnung der Gattung nicht übersteigt. Dies findet namentlich durchweg für den Bereich $\mathfrak{R}=1$ und auch für den Fall einer einzigen Variabeln $\mathfrak{R}$ statt, sofern alsdann von den Zahlcoefficienten abgesehen wird; es findet ferner unter derselben Bedingung — es bleibe dahin gestellt, ob die Bedingung ***nothwendig*** ist — im Bereich von n unabhängigen Variabeln $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots \mathfrak{R}^{(n)})$ für alle Gattungen statt, die durch irgend eine rationale Function der n Wurzeln der Gleichung

$$x^n+\mathfrak{R}'x^{n-1}+\mathfrak{R}''x^{n-2}+\cdots+\mathfrak{R}^{(n)} = 0$$

repräsentirt werden (vgl. § 12). Um ein zur Reduction der Anzahl der Elemente dienendes Verfahren darzulegen, wähle ich den Fall, wo nur eine Variable $\mathfrak{R}=v$ vorhanden ist. Bedeutet n die Ordnung der Gattung, und bilden die $n+m$ ganzen algebraischen Grössen $x', x'', \ldots x^{(n+m)}$ ein zur Darstellung aller ganzen algebraischen Grössen der Species ausreichendes System von Elementen, so kann man sich diese so geordnet denken, dass die Discriminante der ***ersten*** n Grössen von möglichst niedrigem Grade, d. h. dass jede der übrigen Discriminanten von höherem oder gleich hohem Grade in v ist. Die m letzten Elemente lassen sich nun als homogene lineare Functionen der n ersten darstellen, und zwar so, dass die Coefficienten gebrochene rationale Functionen von v werden, deren Nenner jene Discriminante der ersten n Elemente oder ein Theiler derselben ist. Durch Hinzufügung homogener linearer Functionen von $x', x'', \ldots x^{(n)}$, deren Coefficienten ***ganze*** Functionen von v sind, können daher die folgenden Elemente x so modificirt werden, dass bei ihrer Darstellung durch $x', x'', \ldots x^{(n)}$ die Zähler der Coefficienten von niedrigerem Grade sind als die bezüglichen Nenner, und dass ***ganze*** Functionen von v als Coefficienten gar nicht vorkommen.

Nach dieser Modification, durch welche die Zahl der Elemente und auch der Grad der Discriminanten sich vermindert haben kann, sind die Elemente, also die n ersten nebst denjenigen von den m letzten, welche geblieben sind, zusammen von Neuem in der angegebenen Weise zu ordnen. Wird hierauf das obige Verfahren auf das neue Elementen-System und alsdann wiederholt angewendet, so muss einmal der Fall eintreten, dass die ersten n Elemente — weil ihre Discriminante schon von möglichst niedrigem Grade ist — an ihrer ersten Stelle verbleiben. In diesem Falle können keine weiteren Elemente mehr vorkommen; denn ein solches Element $x^{(n+1)}$ müsste bei der Darstellung durch die ersten n Elemente wenigstens *einen* Coefficienten haben, dessen Grad in Bezug auf v negativ wäre, und wenn dies der Coefficient von x' ist, so würde die Discriminante der n Elemente x'', x''', ... $x^{(n+1)}$ von niedrigerem Grade sein als die der Elemente x', x'', ... $x^{(n)}$. Ich bemerke noch, dass genau dieselbe Deduction für den Fall $\mathfrak{R} = 1$ mit der Massgabe anwendbar ist, dass an Stelle der Grösse des Grades in Bezug auf v die Grösse der Zahlen selbst tritt (vgl. § 24).

§ 8.

Die Discriminanten der Gattungen und Arten.

Ein System von ganzen algebraischen Grössen x', x'', ... $x^{(n+m)}$, einer bestimmten Art oder Species, welches so beschaffen ist, dass sich alle Grössen derselben in der Form

$$\varphi' x' + \varphi'' x'' + \cdots + \varphi^{(n+m)} x^{(n+m)}$$

darstellen lassen, wo φ', φ'', ... $\varphi^{(n+m)}$ ganze ganzzahlige Functionen von $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$, $\mathfrak{R}'''$, ... bedeuten, soll als ein „Fundamentalsystem der Art" und wenn es die Haupt-Art ist, auch als ein „Fundamentalsystem *der Gattung*" bezeichnet werden.

Damit auch für einen *Gattungs*-Bereich $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ die in § 5 aufgestellte Begriffsbestimmung einer „ganzen algebraischen Grösse" oder einer „ganzen algebraischen Function der Elemente $\mathfrak{R}$" Geltung behalte, müssen die der adjungirten Gattung entnommenen Elemente so gewählt werden, dass sich alle aus dem Stammbereich hervorgehenden ganzen algebraischen Grössen des Gattungs-Bereichs als *ganze* Functionen derselben ausdrücken lassen; dies ist z. B. der Fall, wenn die sämmtlichen Elemente eines Fundamentalsystems der adjungirten Gattung unter die Elemente $\mathfrak{R}$ mit aufgenommen werden.

Jedes Fundamentalsystem kann auf seine nothwendigen Elemente beschränkt angenommen werden, d. h. auf diejenigen, von denen keines sich als homogene ganze lineare Function der übrigen so darstellen lässt, dass die Coefficienten ganze Functionen der Grössen $\mathfrak{R}$ werden. Die sämmtlichen Discriminanten von je n Elementen eines Fundamentalsystems bilden ein System von Discriminanten, welches — als Ganzes betrachtet — selbst, so zu sagen, fundamental ist. Auch gelangt man, wenn man das Quadrat der Determinante

$$|x_i^{(h)}| \qquad (h, i = 1, 2, \dots n+m)$$

bildet, in welcher $x_1^{(h)}, x_2^{(h)}, \dots x_n^{(h)}$ unter einander conjugirte algebraische Grössen und aber $x_{n+1}^{(h)}, x_{n+2}^{(h)}, \dots x_{n+m}^{(h)}$ unbestimmte oder variable Grössen bedeuten, zu einer ganzen homogenen „Form" dieser $m(m+n)$ Variabeln, deren Coefficienten ein fundamentales System von Discriminanten bilden, und welche also dieses System vertritt. Ebenso wird dieses System von Discriminanten durch irgend eine lineare homogene Function derselben mit unbestimmten Coefficienten $u', u'', \dots$, d. h. also durch eine lineare homogene Form der Variabeln u repräsentirt, deren Coefficienten die verschiedenen Discriminanten eines Fundamentalsystems sind. Eine solche Linearform sowie überhaupt — wenn von jeder Darstellungsweise abstrahirt wird — ***die Gesammtheit dessen, was den Discriminanten eines Fundamentalsystems und zugleich den als ganze homogene Functionen derselben*** (mit ganzen rationalen dem Bereich $[\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \dots]$ angehörigen Coefficienten) ***darstellbaren Grössen gemeinsam ist,*** d. h. der Complex aller derjenigen Eigenschaften jener Discriminanten, welche für ganze homogene Verbindungen derselben erhalten bleiben, gehört offenbar *jeder* Discriminante von je n Functionen der Art, oder — wenn es die Haupt-Art ist — der Gattung an und bildet somit einen Complex von Eigenschaften, welche der Art oder der Gattung als solcher angehören, also einen Complex von „Invarianten" der Art oder Gattung im höheren Sinne des Wortes*).

Sind die Grössen $\mathfrak{R}$ die Elemente eines natürlichen Rationalitäts-Bereichs, d. h. also, kommen unter den Grössen $\mathfrak{R}$ keine algebraischen Grössen sondern nur unabhängige Variable vor, so giebt es stets eine ganze ganzzahlige Function derselben (für $\mathfrak{R} = 1$ eine ganze von *Eins* verschiedene

*) Vgl. § 25 und auch die Darlegung des allgemeineren Invarianten-Begriffs am Schlusse meines im Monatsbericht der Berliner Akademie vom April 1874 abgedruckten Aufsatzes.

Zahl), welche gemeinsamer Theiler aller Discriminanten des Fundamentalsystems und desshalb füglich (wie in meinem citirten Aufsatze vom April 1874) als „Discriminante der Art oder Gattung“ bezeichnet werden kann. Dies findet nicht mehr immer statt, wenn eine Gattung algebraischer Grössen zum Rationalitäts-Bereich gehört, wenn dieser also ein Gattungs-Bereich ist. So haben, wie ich schon im Monatsberichte der Berliner Akademie vom Juni 1862 S. 368 erwähnt habe, die Gattungen singulärer Moduln der elliptischen Functionen die merkwürdige Eigenschaft, bei Adjunction von gewissen Quadratwurzeln, bei welcher die Gleichung der Moduln in Theilgleichungen zerfällt, keine „Discriminante der Gattung“ mehr zu besitzen; so hat ferner die von mir im Monatsberichte der Berliner Akademie vom Juni 1861 S. 611 aufgestellte Gleichung

$$x^6 + 4ax^5 + 10bx^3 + 4cx - 4ac + 5b^2 = 0$$

die Eigenschaft, dass ihre Discriminante abgesehen vom Factor *Fünf* das Quadrat einer ganzen ganzzahligen Function der Grössen a, b, c ist, und dass bei Adjunction der Quadratwurzel aus dieser ganzen Function von a, b, c die durch eine Wurzel der Gleichung repräsentirte Gattung algebraischer Functionen der Grössen a, b, c keine Discriminante hat.

Giebt es Fundamentalsysteme von n Elementen, d. h. von genau so vielen als die Ordnung beträgt, so ist die Discriminante der Elemente des Fundamentalsystems selbst die Discriminante der Art oder Gattung, und diese allein repräsentirt dann die „Invariante“. Ist die Anzahl der unabhängigen Variabeln $\mathfrak{R}$ gleich ν, so repräsentirt eine bestimmte Gattung algebraischer Functionen derselben eine ν-fache Mannigfaltigkeit, und die Discriminante der Gattung, gleich Null gesetzt, eine $(\nu-1)$-fache Mannigfaltigkeit. Aber nicht bloss diese $(\nu-1)$-fache Mannigfaltigkeit, sondern auch alle diejenigen weniger ausgedehnten Mannigfaltigkeiten, d. h. die $(\nu-2)$-fachen, $(\nu-3)$-fachen u. s. w., in welchen sämmtliche Discriminanten eines Fundamentalsystems von mehr als n Elementen zugleich Null werden, sind Invarianten der Gattung. Doch bleibt dahingestellt, ob solche Invarianten wirklich vorkommen.

Da jede einem Bereich $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ entstammende algebraische Grösse sich als homogene lineare Function von n linear unabhängigen algebraischen Grössen der Gattung so ausdrücken lässt, dass die Coefficienten zum Rationalitäts-Bereich $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ gehören, so stehen die Discriminanten von je n algebraischen Grössen der Gattung zu einander in

quadratischen Verhältnissen, d. h. in Verhältnissen von Quadraten rationaler Grössen des Bereichs. Was nach *Sylvester*scher Weise als Discriminante einer homogenen Form

$$c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} y + \cdots + c_1 x y^{n-1} + c_0 y^n$$

oder als Discriminante der Gleichung

$$c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0 = 0$$

bezeichnet wird, ist nach den obigen Definitionen die Discriminante der n algebraischen Grössen

$$c_n x^{n-1} + c_{n-1} x^{n-2} + \cdots + c_1, \quad c_n x^{n-2} + c_{n-1} x^{n-3} + \cdots + c_2, \quad \ldots, \quad c_n x + c_{n-1}, \quad 1,$$

welche sämmtlich *ganze* algebraische Functionen der $n+1$ Grössen c sind, wenn x eine Wurzel jener Gleichung n^{ten} Grades bedeutet. Die Discriminante aller derselben Gattung angehörigen Gleichungen*)

$$c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0 = 0,$$

in welchen die Coefficienten c offenbar als *ganze* rationale Grössen des Bereichs vorausgesetzt werden können, stehen also zu einander in quadratischen Verhältnissen und enthalten sämmtlich die Discriminante der Gattung als gemeinsamen Theiler. Dies ist freilich nicht immer der *grösste* gemeinsame Theiler; aber es lässt sich zeigen, dass nur ein Divisor einer gewissen *Potenz* der Discriminante der Gattung grösster gemeinsamer Theiler aller Gleichungs-Discriminanten sein kann. Der Nachweis dieser für die Theorie der algebraischen Gleichungen höchst wichtigen Eigenschaft der Discriminanten beruht auf folgendem elementaren Determinantensatze.

Wird das Product der $n(n-1)$ Differenzen von n homogenen linearen Functionen der Variabeln $u_1, u_2, \ldots u_n$

$$a_{11} u_1 + a_{12} u_2 + \cdots + a_{1n} u_n, \quad \ldots, \quad a_{n1} u_1 + a_{n2} u_2 + \cdots + a_{nn} u_n$$

nach den verschiedenen Producten von Potenzen der Grössen u entwickelt, so besteht für die dabei auftretenden Coefficienten $\Phi(a_{11}, \ldots a_{nn})$, welche ganze ganzzahlige Functionen der Coefficienten a_{ik} sind, eine Gleichung

$$\Sigma \Phi(a_{11}, \ldots a_{nn}) \, \Psi(a_{11}, \ldots a_{nn}) = |a_{ik}|^{n(n-1)} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n),$$

in welcher auch die Multiplicatoren Ψ ganze ganzzahlige Functionen der Coefficienten a_{ik} sind, und in welcher die Summation auf alle Coefficienten

*) Der Begriff der Gattung ist hier, wie im Monatsbericht der Berliner Akademie vom März 1879 S. 214, von den algebraischen Grössen auf die Gleichungen übertragen, durch welche sie definirt werden. — Die Discriminante der Gleichung, welcher eine ganze algebraische Grösse x genügt, habe ich früher kurz als Discriminante der Grösse x und den mit der Discriminante der Gattung identischen Theiler derselben als ihren „wesentlichen", den anderen als „ausserwesentlichen" Theiler bezeichnet.

Φ zu erstrecken ist. Dabei ist zu bemerken, dass die Functionen Φ und Ψ in Beziehung auf die verschiedenen Horizontalreihen der Coefficienten a_{ik} symmetrisch sind. Der Beweis dieses Satzes ergiebt sich unmittelbar, wenn

$$\sum_k a_{ik} u_k = |a_{ik}| v_i \qquad (i, k = 1, 2, \dots n)$$

gesetzt wird, so dass, wenn die Grössen α_{ik} die Adjungirten der Grössen a_{ik} bedeuten, die Variabeln u sich durch die neuen Variabeln v mittels der Gleichungen

$$\sum_k \alpha_{ik} v_k = u_i \qquad (i, k = 1, 2, \dots n)$$

bestimmen. Dann ist nämlich

$$|a_{ik}|^{n(n-1)} \Pi(v_g - v_h) = \Sigma \Phi_{r_1, r_2, \dots r_n} u_1^{r_1} u_2^{r_2} \dots u_n^{r_n} \qquad (i, k = 1, 2, \dots n),$$

wo sich das Productzeichen links auf alle unter einander verschiedenen Werthe $g, h = 1, 2, \dots n$ und das Summationszeichen rechts auf alle Exponenten-Systeme $r_1, r_2, \dots r_n$ bezieht, und diese Gleichung wird eine Identität, wenn man die Grössen u auf der rechten Seite durch die linearen Functionen $\Sigma \alpha_{1k} v_k$, $\Sigma \alpha_{2k} v_k$, ... ersetzt. Werden alsdann auf beiden Seiten die Coefficienten des Gliedes $v_1^{n-1} . v_2^{n-2} \dots v_{n-1}$ mit einander verglichen, so resultirt jene Gleichung

$$|a_{ik}|^{n(n-1)} = \Sigma \Phi(a_{11}, \dots a_{nn}) \Psi(a_{11}, \dots a_{nn}),$$

da auf der rechten Seite jeder der Coefficienten $\Phi_{r_1, r_2, \dots r_n}$ mit einer ganzen ganzzahligen Function der Adjungirten von $a_{11}, \dots a_{nn}$, also in der That mit einer ganzen ganzzahligen Function dieser Grössen selbst multiplicirt erscheint.

Nimmt man nunmehr an Stelle der n^2 Grössen a_{ik} die ganzen algebraischen Grössen $x_i^{(k)}$, d. h. n conjugirte Reihen von je n Elementen, so bilden die mit Φ bezeichneten Ausdrücke die Coefficienten der Entwickelung der Discriminante von

$$u_1 x' + u_2 x'' + \dots + u_n x^{(n)}$$

nach Producten der Potenzen von $u_1, u_2, \dots u_n$. Die Grössen Φ sind demnach *ganze* rationale Grössen des Bereichs, und deren grösster gemeinsamer Theiler muss nach obigem Satze ein Theiler der $\frac{1}{2}n(n-1)^{\text{ten}}$ Potenz der Discriminante der n Elemente

$$x', \quad x'', \quad \dots \quad x^{(n)}$$

sein. Bilden ferner, wie oben, die $n+m$ ganzen algebraischen Grössen

$$x', \quad x'', \quad \dots \quad x^{(n+m)}$$

ein Fundamentalsystem, so repräsentirt der lineare Ausdruck mit unbestimmten Coefficienten

$$u_1 x' + u_2 x'' + \cdots + u_{n+m} x^{(n+m)}$$

die allgemeinste ganze algebraische Grösse der Gattung, und die Discriminante der Gleichung, der dieser Ausdruck genügt, kann keinen von den Grössen u unabhängigen Theiler haben, der nicht ein Divisor der $\frac{1}{2}n(n-1)^{\text{ten}}$ Potenzen aller Discriminanten von je n Elementen x, d. h. also ein Divisor der $\frac{1}{2}n(n-1)^{\text{ten}}$ Potenz der Discriminante der Gattung wäre. Dies ist der eigentliche Zielpunkt der vorstehenden Entwickelung. Es folgt daraus, dass alle Discriminanten der verschiedenen Gleichungen der Gattung, d. h. alle die Discriminanten, welche man erhält, wenn man den Grössen u alle möglichen Werthe beilegt, keinen Divisor gemein haben können, der nicht zugleich Divisor der $\frac{1}{2}n(n-1)^{\text{ten}}$ Potenz der Discriminante der Gattung wäre, sofern nämlich eine ganze Function der unbestimmten Grössen u, welche keinen von denselben unabhängigen Theiler enthält, durch geeignete Bestimmung von $u_1, u_2, \ldots u_{n+m}$ so eingerichtet werden kann, dass sie mit einer gegebenen ganzen rationalen Function von $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots$ keinerlei gemeinsamen Theiler hat. Dies ist stets möglich, wenn wenigstens eine Variable unter den Grössen $\mathfrak{R}$ vorkommt, während allerdings für $\mathfrak{R} = 1$ z. B. der Ausdruck $u^p - u$, obgleich ohne einen von u unabhängigen Factor, doch falls p Primzahl ist, für jeden ganzzahligen Werth von u durch p theilbar wird (vgl. § 25).

Im Vorhergehenden ist vielfach von Theilern und namentlich von „grössten gemeinschaftlichen Theilern" ganzer rationaler Functionen von $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots$ die Rede gewesen. Für natürliche Rationalitäts-Bereiche ist dies durch die in § 4 nachgewiesene Möglichkeit der Zerlegung ganzer ganzzahliger Functionen von Variabeln in irreductible Factoren völlig gerechtfertigt; für die Gattungs-Bereiche aber bedarf es des Hinweises auf die erst im zweiten Theile folgende Begründung.

§ 9.

Die Beziehungen zwischen Discriminanten verschiedener Gattungen, von denen die eine unter der anderen enthalten ist.

Repräsentirt die ganze algebraische Grösse x eine Gattung n^{ter} Ordnung und die ganze algebraische Grösse y eine Gattung mn^{ter} Ordnung, unter welcher die erstere enthalten ist, so theilen sich die mn conjugirten

Grössen y in n Gruppen von je m Grössen. Jede von diesen n Gruppen besteht aus denjenigen m Grössen y, welche bei Adjunction einer bestimmten der n conjugirten Grössen x mit einander conjugirt bleiben. Die Gleichung mn^{ten} Grades, welcher y genügt, zerfällt nämlich in n Gleichungen m^{ten} Grades, welche gewissermassen mit einander conjugirt sind; denn es ist, wenn die zu x_k gehörige Gruppe von Grössen y mit $y_{1k}, y_{2k}, \ldots y_{mk}$ bezeichnet wird,

$$(y-y_{1k})(y-y_{2k})\ldots(y-y_{mk}) = G(y, x_k),$$

wo $G(y,x)$ eine ganze Function von y und x bedeutet, deren Coefficienten dem Rationalitäts-Bereich $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ angehören, und die Gleichung

$$\prod_k G(y, x_k) = 0 \qquad (k=1,2,\ldots n)$$

ist also diejenige Gleichung mn^{ten} Grades, durch welche die algebraische Grösse y definirt wird. Bildet man nun für irgend eine Reihe ganzer algebraischer Grössen $y', y'', y''', \ldots y^{(r)}$ der durch y bezeichneten Gattung die mn Reihen conjugirter Grössen

$$y'_{ik}, \quad y''_{ik}, \quad y'''_{ik}, \quad \ldots \quad y^{(r)}_{ik} \qquad (i=1,2,\ldots m;\ k=1,2,\ldots n)$$

und ersetzt alsdann in diesem Grössensystem jede der n Reihen

$$y'_{1k}, \quad y''_{1k}, \quad y'''_{1k}, \quad \ldots \quad y^{(r)}_{1k} \qquad (k=1,2,\ldots n)$$

durch die Reihe von Summen

$$\sum_{i=1}^{i=m} y'_{ik}, \quad \sum_{i=1}^{i=m} y''_{ik}, \quad \sum_{i=1}^{i=m} y'''_{ik}, \quad \ldots \quad \sum_{i=1}^{i=m} y^{(r)}_{ik} \qquad (k=1,2,\ldots n),$$

welche sämmtlich Grössen der Gattung x_k sind, so entsteht ein System von mn Reihen von je r Elementen, unter denen n Reihen beziehungsweise den n conjugirten Gattungen $x_1, x_2, \ldots x_n$ angehören. Hieraus geht hervor, dass die Discriminante von je mn ganzen algebraischen Grössen der Gattung y sich als lineare homogene Function von Discriminanten der Gattung x so darstellen lässt, dass die Coefficienten ganze algebraische Grössen sind. Jede der „Invarianten" der Gattung x ist also gewissermassen in den „Invarianten" der Gattung y enthalten, und namentlich ist *die Discriminante der Gattung x ein Theiler der Discriminante der Gattung y, unter welcher jene enthalten ist.* Da ferner jede Discriminante von je n Grössen der Gattung y durch die Discriminante der Gattung theilbar ist, so folgt, *dass die Discriminante einer Gattung algebraischer Grössen x Divisor der Discri-*

minante einer jeden (auch reductibeln) Gleichung ist, welche die Eigenschaft hat, dass sich durch eine ihrer Wurzeln die Grössen jener Gattung x rational ausdrücken lassen.

§ 10.

Die Systeme von Gleichungen; ihre Discriminanten und ihre verschiedenen Resolventen.

Der oben entwickelte Begriff der Discriminante der Gattung findet vielfache Anwendung in der Theorie der Elimination, und eine der wichtigsten dieser Anwendungen soll hier kurz erwähnt werden. — Bedeuten F_1, $F_2, \ldots F_n$ ganze homogene Functionen der $n+1$ Variabeln $x^0, x', x'', \ldots x^{(n)}$, welche vollständige Ausdrücke der Dimensionen $r_1, r_2, \ldots r_n$ sind, so werden durch das Gleichungssystem

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \ldots \quad F_n = 0$$

die Verhältnisse der $n+1$ Grössen x als algebraische Functionen der Coefficienten von $F_1, F_2, \ldots F_n$ definirt. Alle diese algebraischen Functionen gehören einer bestimmten Gattung an, und die Discriminante dieser Gattung ist eine ganze ganzzahlige Function jener Coefficienten, welche auch in folgender Weise, unabhängig von den obigen allgemeinen Entwickelungen, erklärt werden kann. Bedeutet F_0 eine ganz beliebige (z. B. eine lineare) homogene Function der $n+1$ Grössen x mit unbestimmten Coefficienten, so hat die Eliminations-Resultante der $n+1$ homogenen Gleichungen

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \ldots \quad F_n = 0, \quad |F_{gh}| = 0 \qquad (g, h = 0, 1, \ldots n)$$

einen von den Coefficienten der Function F_0 unabhängigen Factor, welcher füglich als die Discriminante des Functionen-Systems $(F_1, F_2, \ldots F_n)$ oder des Gleichungssystems

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \ldots \quad F_n = 0$$

zu bezeichnen ist und mit jener Discriminante der Gattung genau übereinstimmt. Nur für das Vorzeichen derselben bedürfte es noch einer besonderen Bestimmung.

Die Discriminante des Functionen-Systems $(F_1, F_2, \ldots F_n)$ ist irreductibel, wie ich in einer anderen Abhandlung beweisen werde. Das Verschwinden derselben enthält die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass zwei den Gleichungen $F=0$ genügende Werthsysteme mit einander identisch werden.

Die Behandlung ganz allgemeiner Gleichungssysteme, welche hier einen zu grossen Raum einnehmen würde, behalte ich einem besonderen

Aufsatze vor; doch muss hier eine Andeutung der Methode und eine Angabe der Hauptresultate ihren Platz finden, weil ich mich in den folgenden Paragraphen darauf zu beziehen haben werde. Ein System von beliebig vielen algebraischen Gleichungen für $z^0, z', z'', \dots z^{(n-1)}$, in welchen die Coefficienten dem Rationalitäts-Bereich $(\Re', \Re'', \Re''', \dots)$ angehören, definirt algebraische Beziehungen zwischen den Grössen z und $\Re$, deren Erkenntniss und Darlegung den Zielpunkt der Theorie der Elimination bildet. Die m Functionen $G_1, G_2, \dots G_m$, welche, gleich Null gesetzt, die Gleichungen bilden, sind als ganze rationale Functionen der n Grössen z vorauszusetzen, deren Coefficienten aber nur als rationale (ganze oder gebrochene) Functionen der Grössen $\Re$ mit ganzzahligen Coefficienten. Für die Anzahl der Functionen, welche mit m bezeichnet ist, soll keinerlei Beschränkung angenommen werden; sie kann, wie im obigen speciellen — dem sogenannten allgemeinen — Falle, gleich n, d. h. gleich der Anzahl der zu bestimmenden Grössen z, aber auch grösser oder kleiner als diese Zahl n sein. Werden die Grössen z als unbeschränkt veränderlich aufgefasst, so constituiren die Gleichungen $G = 0$ eine gewisse Beschränkung dieser Variabilität, deren nähere Charakterisirung als die Aufgabe der Elimination bezeichnet werden kann. Dabei ist aber die Unbestimmtheit der etwaigen unbestimmten Grössen $\Re', \Re'', \Re''', \dots$ oder, falls diese als Variable aufgefasst werden, die uneingeschränkte Variabilität derselben festzuhalten, d. h. es ist nur diejenige Beschränkung der Variabilität der Grössen z zu charakterisiren, welche keinerlei Beschränkung der Variabilität der Grössen $\Re$ erfordert. Die hier präcisirte Unterscheidung zwischen den Variabeln z und denen, die unter den Grössen $\Re$ vorkommen, ist von der grössten Wichtigkeit; sie involvirt keinerlei Beschränkung der Allgemeinheit, sondern sie scheidet nur die verschiedenen Aufgaben, welche bei der Elimination gestellt werden können, nach ihrem begrifflichen Inhalt. (Vgl. die Unterscheidung zwischen den Unbestimmten u und den Variabeln $\Re$ in den Conclusionen des § 22.)

Um die Functionen G von Zufälligkeiten zu befreien, ist auf die Grössen z eine allgemeine lineare Transformation anzuwenden, deren Specialisation vorbehalten bleibt. Werden die n transformirten Variabeln mit $x', x'', \dots x^{(n)}$ bezeichnet, so ist nunmehr an Stelle von $x^{(n)}$ eine lineare Function

$$u_1 x' + u_2 x'' + \cdots + u_n x^{(n)}$$

mit unbestimmten Coefficienten u einzuführen, die mit x bezeichnet werden

möge. Hiernach treten an Stelle der m Gleichungen $G = 0$ ebensoviel Gleichungen

$$H_1 = 0, \quad H_2 = 0, \quad \ldots \quad H_m = 0,$$

in welchen $H_1, H_2, \ldots H_m$ ganze Functionen von $x, x', x'', \ldots x^{(n-1)}$ und deren Coefficienten rationale Functionen der Grössen u und $\mathfrak{R}$ sind. Diese können überdies als *ganz* in Beziehung auf $u_1, \ldots u_n$ vorausgesetzt werden, da, um diese Voraussetzung zu erfüllen, nur mit einer Potenz von u_n multiplicirt zu werden braucht. Jede der Functionen H kann ferner von etwaigen gleichen Factoren befreit gedacht werden. Endlich kann der grösste gemeinsame Theiler aller Functionen H herausgehoben werden. Dieser sei

$$F_1(x, x', x'', \ldots x^{(n-1)}),$$

und der Quotient der Division von H_α durch F_1 sei K_α; alsdann ist das System der Gleichungen $H = 0$, abgesehen von dem Inhalte der Gleichung $F_1 = 0$, äquivalent dem Systeme der Gleichungen $K = 0$. Bildet man nun zwei lineare Verbindungen der letzteren m Gleichungen

$$U_1 K_1 + U_2 K_2 + \cdots + U_m K_m = 0, \quad V_1 K_1 + V_2 K_2 + \cdots + V_m K_m = 0,$$

entwickelt die aus der Elimination von $x^{(n-1)}$ hervorgehende Resultante nach Producten von Potenzen der unbestimmten Grössen U, V, und setzt alle einzelnen Coefficienten gleich Null, so gelangt man zu einem Gleichungssystem für die $n-1$ Grössen $x, x', x'', \ldots x^{(n-2)}$, welches zum neuen Ausgangspunkt genommen werden kann. Es wird demgemäss der grösste gemeinsame Theiler aller jener Coefficienten der Resultante, nachdem derselbe von etwaigen gleichen Factoren befreit ist, mit $F_2(x, x', x'', \ldots x^{(n-2)})$ zu bezeichnen sein, und allmählich bei wiederholter Anwendung des angegebenen Verfahrens eine Reihe von Functionen

$$F_1(x, x', x'', \ldots x^{(n-1)}), \quad F_2(x, x', x'', \ldots x^{(n-2)}), \quad \ldots \quad F_n(x)$$

sich ergeben, welche, gleich Null gesetzt, ein dem ursprünglichen System $G = 0$ äquivalentes Gleichungssystem bilden. Die Productgleichung

$$F_1 . F_2 . \ldots . F_n = 0$$

ist die Gesammtresolvente des Gleichungssystems $G = 0$; jede Theilresolvente $F_k = 0$ repräsentirt eine durch die Gleichungen $G = 0$ aus der gesammten n-fachen Mannigfaltigkeit (z) ausgeschiedene $(n-k)$-fache Mannigfaltigkeit, also ein $(n-k)$-fach ausgedehntes Gebilde, und es kann daher im Allgemeinen durch irgend ein Gleichungssystem $G = 0$ eine Anzahl von Gebilden jeglicher Ausdehnung, Punkten, Linien u. s. w., d. h. eine Anzahl nullfacher, einfacher, zweifacher, ... $(n-1)$-facher Mannigfaltigkeiten (z) *simultan* definirt werden.

Die Functionen F_k sind sämmtlich, als Functionen von $u_1, u_2, \ldots u_n$, in lineare Factoren zerlegbar. Jeder Linearfactor von F_k ergiebt, gleich Null gesetzt, die letzten k Grössen x, nämlich $x^{(n-k+1)}, x^{(n-k+2)}, \ldots x^{(n)}$ als algebraische Functionen der ersten $n-k$ Grössen $x', x'', \ldots x^{(n-k)}$; denn ein solcher Linearfactor hat die Form

$$x - u_1 \varphi' - u_2 \varphi'' - \cdots - u_n \varphi^{(n)},$$

wo $\varphi', \varphi'', \ldots \varphi^{(n)}$ algebraische Functionen von $x', x'', \ldots x^{(n-k)}$ bedeuten, und es sind dabei die ersten $n-k$ Grössen φ beziehungsweise mit den ersten $n-k$ Grössen x selbst identisch, so dass bei Einsetzung des Werthes von x nur ein Aggregat

$$u_{n-k+1}(x^{(n-k+1)} - \varphi^{(n-k+1)}) + \cdots + u_n(x^{(n)} - \varphi^{(n)})$$

verbleibt, welches, gleich Null gesetzt, wegen der Unbestimmtheit der Grössen u den Complex der k Gleichungen

$$x^{(n-k+1)} = \varphi^{(n-k+1)}, \quad \ldots \quad x^{(n)} = \varphi^{(n)}$$

und also eine $(n-k)$-fache Mannigfaltigkeit darstellt. Weil hiernach die Theilresolvente $F_k = 0$ ein System von k Gleichungen vertritt, soll die Function F_k so wie die Gleichung $F_k = 0$ als eine von „k^{ter} *Stufe*“ bezeichnet werden.

Die einzelnen Functionen F_k können, als Functionen von $x, x', \ldots x^{(n-k)}$ betrachtet, mit Berücksichtigung des Rationalitäts-Bereichs $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ in irreductible Factoren zerlegt gedacht werden. Jeder dieser irreductibeln Factoren, sowie überhaupt jeder Theiler Φ des Products $F_1 F_2 \ldots F_n$ stellt, gleich Null gesetzt, die Gesammtresolvente eines gewissen Gleichungssystems dar. Man erhält dasselbe, indem man in dem herausgehobenen Theiler jenes Products Φ die Grösse x wieder durch ihren Werth

$$u_0 x^{0} + u_1 x' + \cdots + u_{n-1} x^{(n-1)}$$

ersetzt und alsdann den Grössen u eine Anzahl bestimmter Werthsysteme beilegt. Man sieht dabei leicht, dass stets $n+1$ solcher Werthsysteme ausreichen, damit die hieraus entstehenden Gleichungen

$$\Phi_1 = 0, \quad \Phi_2 = 0, \quad \ldots \quad \Phi_{n+1} = 0$$

die Gesammtresolvente $\Phi = 0$ haben, und es ergiebt sich daher das Resultat,

> dass der gesammte Inhalt jedes Theilers der Resolvente eines Gleichungssystems für n Grössen z durch ein System von nur $n+1$ Gleichungen dargestellt, also auch jedes System von beliebig vielen Gleichungen durch ein solches von nur $n+1$ Gleichungen ersetzt werden kann.

Die „Ordnung" eines Gleichungssystems wird durch den Grad seiner Resolvente bezeichnet. Das Gleichungssystem heisst irreductibel, wenn die Resolvente irreductibel ist. Stellt das irreductible Gleichungssystem ein $(n-k)$-fach ausgedehntes Gebilde dar, so ist es unmöglich, nur einen ebenfalls $(n-k)$-fach ausgedehnten *Theil* desselben durch ein algebraisches Gleichungssystem auszudrücken. Auch für eine Resolvente $F_n = 0$, welche nur einzelne Punkte der n-fachen Mannigfaltigkeit (z) darstellt, behält der Begriff der Irreductibilität mit Rücksicht auf den angenommenen Rationalitäts-Bereich seine Bedeutung. Nur von den Potenzen irreductibler Resolventen ist bei der vorstehenden Betrachtung gänzlich abgesehen, da ja schon bei der Methode der Bildung die Befreiung von gleichen Factoren Bedingung war.

Derjenige Theil der Resolvente eines beliebigen Gleichungssystems, welcher eine $(n-k)$-fache Mannigfaltigkeit (z) repräsentirt, drückt eine zwischen $n-k+1$ Grössen x bestehende Beziehung

$$F_k(x, x', x'', \dots x^{(n-k)}) = 0$$

aus, während die n Variabeln z durch diese $n-k+1$ Grössen x und durch die Grössen u und $\mathfrak{R}$ rational darstellbar sind. Auch können den unbestimmten Grössen u solche *speciellen* Werthe beigelegt werden, dass diese Art der Darstellbarkeit erhalten bleibt. Bezeichnet man die Function F_k für derartige specielle Werthe der Grössen u mit Φ, so repräsentirt die Gleichung $\Phi = 0$ eine aus der $(n-k+1)$-fachen Mannigfaltigkeit $x, x', x'', \dots x^{(n-k)}$ ausgesonderte $(n-k)$-fache Mannigfaltigkeit, auf welche jene aus der n-fachen Mannigfaltigkeit (z) ausgesonderte $(n-k)$-fache Mannigfaltigkeit eindeutig bezogen ist. Es lässt sich daher jedes m-fach ausgedehnte Gebilde einer beliebig grossen Mannigfaltigkeit auf ein solches eindeutig beziehen, das aus einer nur $(m+1)$-fachen Mannigfaltigkeit entnommen ist.

Es ist schliesslich als ein Hauptresultat der allgemeinen Eliminationstheorie hervorzuheben, dass der in § 2 an die Betrachtung einer einzigen Gleichung geknüpfte Begriff der algebraischen Grösse keinerlei Erweiterung bedarf, wenn Systeme von Gleichungen mit in den Kreis der Betrachtung gezogen werden. Sind nämlich eine Anzahl Grössen zusammen durch eine beliebige Anzahl von algebraischen Gleichungen definirt, deren Coefficienten dem Rationalitäts-Bereich $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \dots)$ angehören, so ist, wie aus der Theorie der Elimination hervorgeht, jede einzelne der so definirten Grössen eine algebraische Function von $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \dots$ auch in dem *engeren* in § 2 angegebenen Sinne des Wortes.

§ 11.

Die besonderen Gleichungssysteme, durch welche conjugirte algebraische Grössen definirt werden. Das *Galois*sche algebraische Princip.

Die allgemeine Theorie der Elimination, wie sie im vorhergehenden Paragraphen skizzirt worden ist, zeigt die eigentliche Quelle des neuen Lichts, welches gerade vor einem halben Jahrhundert durch *Galois* in die Theorie der algebraischen Gleichungen gebracht worden ist.

Es seien $c_1, c_2, \ldots c_n$ Grössen des Rationalitäts-Bereichs $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ und

$$(A) \qquad x^n - c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} - \cdots \pm c_n = 0$$

eine irreductible Gleichung mit den Wurzeln $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$, welche also conjugirte algebraische Functionen der Grössen $\mathfrak{R}$ sind. Es seien ferner

$$\mathfrak{f}_1(x_1, x_2, \ldots x_n), \quad \mathfrak{f}_2(x_1, x_2, \ldots x_n), \quad \ldots \quad \mathfrak{f}_n(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

die n durch die identische Gleichung

$$(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) = x^n - \mathfrak{f}_1 x^{n-1} + \mathfrak{f}_2 x^{n-2} - \cdots \pm \mathfrak{f}_n$$

definirten „elementaren symmetrischen" Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$. Alsdann kann man die n Grössen ξ, ebenso wie durch die *eine* Gleichung (A), auch durch das System von n Gleichungen

$$(B) \qquad \mathfrak{f}_k(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) = c_k \qquad (k=1,2,\ldots n)$$

bestimmt ansehen, und es ist diese höhere Auffassung der in einer algebraischen Gleichung enthaltenen Bestimmungen, welche — wenn auch nicht geradezu ausgesprochen — der *Galois*schen Behandlung der algebraischen Gleichungen zu Grunde liegt. Um dies zu erkennen, braucht man nur das besondere, n *conjugirte* algebraische Grössen definirende Gleichungssystem

$$(C) \qquad \mathfrak{f}_k(x_1, x_2, \ldots x_n) = c_k \qquad (k=1,2,\ldots n)$$

nach der allgemeinen im vorhergehenden Paragraphen entwickelten Methode zu behandeln.

Das Gleichungssystem

$$(C) \qquad \mathfrak{f}_k(x_1, x_2, \ldots x_n) = c_k \qquad (k=1,2,\ldots n)$$

kann nur eine Resolvente n^{ter} Stufe haben, da ja aus diesem Gleichungssystem auch das folgende hervorgeht

$$(\overline{A}) \qquad x_k^n - c_1 x_k^{n-1} + c_2 x_k^{n-2} - \cdots \pm c_n = 0 \qquad (k=1,2,\ldots n).$$

Hierbei ist jedoch hervorzuheben, dass die beiden Gleichungssysteme (C) und $(\overline{A})$

keineswegs äquivalent sind; sondern das letztere, welches von der Ordnung n^n ist, enthält das erstere, welches nur von der Ordnung $n!$ ist.

Bedeutet nun $F(x)=0$ die Resolvente des Gleichungssystems (C) und ist

$$x = u_1 x_1 + u_2 x_2 + \cdots + u_n x_n,$$

so sind die Coefficienten von $F(x)$ ganze Functionen der Unbestimmten $u_1, u_2, \ldots u_n$ und rationale Functionen der Grössen $\mathfrak{R}$. Da die Gleichungen (C) nur durch Werthsysteme

$$x_1 = \xi_{r_1}, \quad x_2 = \xi_{r_2}, \quad \ldots \quad x_n = \xi_{r_n}$$

erfüllt werden können, wo $r_1, r_2, \ldots r_n$ gewisse Permutationen der Zahlen $1, 2, \ldots n$ bedeuten, so muss $F(x)$ gleich dem über alle diese Permutationen erstreckten Producte

$$\Pi(x - u_1 \xi_{r_1} - u_2 \xi_{r_2} - \cdots - u_n \xi_{r_n})$$

sein. Aber nicht bloss das Gleichungssystem (C) selbst, sondern auch jedes andere, welches durch Hinzufügung irgend welcher Gleichungen entsteht und mit $(\bar{C})$ bezeichnet werden möge, kann nur eine eben solche Resolvente

$$\Pi(x - u_1 \xi_{r_1} - u_2 \xi_{r_2} - \cdots - u_n \xi_{r_n}) = 0$$

haben. Also, welche Gleichungen auch für $x_1, x_2, \ldots x_n$ bestehen mögen, stets muss, sobald nur n Gleichungen (C) daraus abzuleiten sind, die Resolvente von der angegebenen Art sein. Bezeichnet man nunmehr mit

$$G(x, \mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots \mathfrak{f}_n) = 0$$

die *Galois*sche Gleichung, deren $n!$ Wurzeln durch

$$x = u_1 x_{i_1} + u_2 x_{i_2} + \cdots + u_n x_{i_n}$$

für sämmtliche $n!$ Permutationen $i_1, i_2, \ldots i_n$ repräsentirt werden, so sind die Coefficienten der mit G bezeichneten Function von $x, \mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots \mathfrak{f}_n$ ganze ganzzahlige Functionen von $u_1, u_2, \ldots u_n$. Irgend einer der irreductibeln Factoren von $G(x, c_1, c_2, \ldots c_n)$ muss daher, gleich Null gesetzt, die Resolvente des Gleichungssystems (C) repräsentiren. Ein solcher Factor ist also eine ganze Function von x und den Unbestimmten $u_1, u_2, \ldots u_n$ mit Coefficienten des Rationalitäts-Bereichs $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ und möge mit

$$g(x, u_1, u_2, \ldots u_n)$$

bezeichnet werden. Dann ist gemäss den oben eingeführten Bezeichnungen

$$g(x, u_1, u_2, \ldots u_n) = \Pi(x - u_1 \xi_{r_1} - u_2 \xi_{r_2} - \cdots - u_n \xi_{r_n}),$$

oder wenn die Linearfactoren des Products — statt nach $u_1, u_2, \ldots u_n$ —

nach $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ geordnet werden,

$$g(x, u_1, u_2, \ldots u_n) = \Pi(x - u_{r_1}\xi_1 - u_{r_2}\xi_2 - \cdots - u_{r_n}\xi_n).$$

Es ist daher

> $g(x, u_1, u_2, \ldots u_n)$, als Function der Unbestimmten $u_1, u_2, \ldots u_n$ betrachtet, eine solche, die bei gewissen durch $r_1, r_2, \ldots r_n$ bezeichneten Permutationen ungeändert bleibt,

und man gelangt somit, von irgend einer ***speciellen*** Gleichung (A) ausgehend, zu allgemeinen Functionen von n unbestimmten Grössen, welche die Eigenschaft haben, bei gewissen Permutationen derselben ihren Werth unverändert beizubehalten. Hierin liegt die grosse Bedeutung des *Galois*schen algebraischen Princips, anstatt einer einzigen Gleichung das die conjugirten Wurzeln gleichzeitig definirende *Gleichungssystem* der Untersuchung zu Grunde zu legen. *Galois* selbst hat es klar erkannt, dass seine neue Auffassung der algebraischen Gleichungen es möglich macht, von jeder einzelnen Gleichung mit ganz speciellen Coefficienten, z. B. von jeder Zahlengleichung, die für die algebraische Theorie einzig wesentlichen Eigenschaften *) zu abstrahiren, und er hat diese zur wahren Erkenntniss führende Methode dadurch vollständig dargelegt, dass er gezeigt hat, wie jeder speciellen Gleichung eine von der Werth-Bedeutung der Coefficienten oder Wurzeln unabhängige Eigenschaft in der von ihm so genannten „Gruppe der Substitutionen" zukommt. Nur scheint mir, dass der *Galois*schen Theorie noch eine weitere *formale* Ausbildung durch die leichte hier eingeführte Modification zu geben ist, bei welcher an Stelle der abstracten Substitutionen und deren Gruppen die concreten bei einer Gruppe von Permutationen unveränderlichen Functionen behandelt werden.

§ 12.

Die Gattungen rationaler Functionen mehrerer unbestimmten Grössen.

Nachdem gezeigt worden ist, wie das *Galois*sche Princip für jede specielle algebraische Gleichung eine für dieselbe charakteristische ganze Function von n Unbestimmten u ergiebt, können diese Functionen selbst

---

*) Die Bedingungen, unter denen die nach dem *Galois*schen Princip sich ergebenden Eigenschaften der algebraischen Gleichungen, welche ich als „Affecte" bezeichne, in der That die einzigen sind, werde ich in einem folgenden Aufsatze vollständig entwickeln.

zum Ausgangspunkt der Entwickelung genommen werden. Setzt man x_1, x_2, ... x_n an Stelle der Unbestimmten u_1, u_2, ... u_n, so sind also ganze Functionen der n unbestimmten Grössen x in Beziehung auf die Veränderungen zu untersuchen, welche sie erfahren, wenn die Grössen x darin auf alle möglichen Weisen permutirt werden. Diese Untersuchung ordnet sich aber naturgemäss in die arithmetische Theorie der algebraischen Grössen ein, sobald man die ganzen Functionen von x_1, x_2, ... x_n als algebraische Functionen der n elementaren symmetrischen Functionen $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots \mathfrak{f}_n$ auffasst, und hiermit wird also die Stelle bezeichnet, an welcher die *Galois*schen Resultate sich in die allgemeine Theorie einfügen.

Werden die n Functionen $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots \mathfrak{f}_n$ an Stelle von $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots$ genommen, so dass $(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots \mathfrak{f}_n)$ den Rationalitäts-Bereich bezeichnet, so ist jede rationale Function von $x_1, x_2, \ldots x_n$ eine aus dem Bereich hervorgehende algebraische Function und gehört als solche einer bestimmten Gattung an, welche nun einfach als *„Gattung von Functionen von x_1, x_2, ... x_n“* bezeichnet werden soll *). Der Begriff „conjugirt“, sowie der Begriff der Ordnung soll auf diese Gattungen von Functionen übertragen werden, und auch der Begriff der „Art“ kann bei den *ganzen* Functionen von x_1, x_2, ... x_n Anwendung finden.

Jede der einzelnen Grössen x repräsentirt eine Gattung n^{ter} Ordnung; durch eine lineare Function

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + \cdots + u_n x_n$$

mit unbestimmten Coefficienten u wird die *„Galois*sche Gattung“ repräsentirt, welche von der Ordnung $n!$ ist und alle andern Gattungen unter sich enthält. Die Ordnungen der einzelnen Gattungen sind hiernach Theiler von $n!$, und wenn eine Gattung mit $\mathfrak{g}$, deren Ordnung mit ϱ und der Quotient $\frac{n!}{\varrho}$ mit r bezeichnet wird, so ist r die Anzahl der *„Permutationen der Gattung* $\mathfrak{g}$“, d. h. die Anzahl *derjenigen Permutationen von* x_1, x_2, ... x_n, bei denen eine Function der Gattung $\mathfrak{g}$ ungeändert bleibt. Ist die Gattung $\mathfrak{g}$ unter der Gattung $\mathfrak{g}'$ enthalten, so ist ϱ ein Theiler von ϱ' und also r', d. h. die Anzahl der Permutationen von $\mathfrak{g}'$, ein Theiler der mit r bezeichneten Anzahl der Permutationen von $\mathfrak{g}$, und es sind offenbar die ersteren Permutationen selbst unter den letzteren enthalten.

---

*) Vgl. meinen mehrerwähnten Aufsatz im Monatsbericht vom März 1879, aus welchem hier auch einige Stellen wörtlich aufgenommen sind.

Die Gattungen scheiden sich in *„eigentliche“* Gattungen von Functionen von n Grössen und in *„uneigentliche“*, je nachdem unter deren Adjunction die Gleichung $x^n - \mathfrak{f}_1 x^{n-1} + \mathfrak{f}_2 x^{n-2} - \cdots \pm \mathfrak{f}_n = 0$ irreductibel bleibt oder reductibel wird. Die uneigentlichen Gattungen lassen sich also auf Gattungen von Functionen von weniger als n Grössen zurückführen.

Werden die einer *eigentlichen* Gattung $\mathfrak{g}$ angehörigen Functionen den symmetrischen adjungirt, und wird demgemäss an Stelle des Rationalitäts-Bereichs $(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots \mathfrak{f}_n)$ der erweiterte Bereich $(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots \mathfrak{f}_n, \mathfrak{g})$ festgesetzt, so ändert sich damit der algebraische Charakter der durch die Gleichung

$$x^n - \mathfrak{f}_1 x^{n-1} + \mathfrak{f}_2 x^{n-2} - \cdots \pm \mathfrak{f}_n = 0$$

definirten algebraischen Function, und sie tritt damit in eine besondere „Classe“ von algebraischen Grössen ein. Die auf diese Weise definirten Classen algebraischer Functionen umfassen die einzelnen Gattungen. Uebertägt man die Begriffe der Gattung und Classe von den algebraischen Functionen auf die Gleichungen, denen sie genügen, so gehören bei Festsetzung eines bestimmten Rationalitäts-Bereichs $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ alle diejenigen irreductibeln Gleichungen $\Phi(x) = 0$ in eine und dieselbe Gattung, welche durch rationale Substitution von x aus einander entstehen, und alle diejenigen in dieselbe Classe, bei welchen die einer bestimmten Gattung $\mathfrak{g}$ angehörigen Functionen der Wurzeln zugleich dem festgesetzten Rationalitäts-Bereich $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ angehören. Die Classe der algebraischen Grössen und Gleichungen wird daher ebenso wie die Gattung und Ordnung durch den angenommenen Rationalitäts-Bereich bedingt. Ist aber dieser Bereich festgesetzt, so wird die Classe durch eine *wesentliche*, bei allen rationalen Transformationen von x bleibende, besondere Eigenschaft der Gleichung charakterisirt, welche ich desshalb nach einer von *Jacobi*, wenn auch in anderem Sinne, gebrauchten Ausdrucksweise als den *„Affect“* der Gleichung zum Unterschiede von anderen Eigenschaften derselben bezeichne. Eine irreductible Gleichung

$$(A) \qquad x^n - c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} - \cdots \pm c_n = 0,$$

deren Coefficienten c dem Rationalitäts-Bereich $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ angehören, hat also einen besonderen Affect, wenn eine bestimmte Gattung von Functionen ihrer Wurzeln, welche die „Affect-Gattung“ heissen soll, ebenfalls dem festgesetzten Rationalitäts-Bereich angehört. Die Gruppe der Permutationen der Affect-Gattung ist die *Galois*sche „Gruppe der Gleichung“. Wird

die Affect-Gattung durch $\mathfrak{g}(x_1, x_2, \ldots x_n)$ repräsentirt, so ist es das System der $n+1$ Gleichungen

$$(\overline{B}) \qquad \mathfrak{g}(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) = c_0, \quad \mathfrak{f}_k(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) = c_k \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots n)},$$

welches nach dem *Galois*schen Princip an die Stelle der einen Gleichung (A) tritt, und wenn $x_1, x_2, \ldots x_n$ als die Unbekannten eines Gleichungssystems aufgefasst werden, so ist das System der n Gleichungen

$$(\overline{C}) \qquad \mathfrak{g}(x_1, x_2, \ldots x_n) = c_0, \quad \mathfrak{f}_k(x_1, x_2, \ldots x_n) = c_k \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots n)}$$

so beschaffen, dass es nur durch die r Werthsysteme

$$x_1 = \xi_{r_1}, \quad x_2 = \xi_{r_2}, \quad \ldots \quad x_n = \xi_{r_n}$$

befriedigt wird, welche durch die r Permutationen $(r_1, r_2, \ldots r_n)$ der Gattung $\mathfrak{g}$ charakterisirt sind. Es ist also von der Ordnung r und bildet den irreductibeln Theil des oben mit (C) bezeichneten Gleichungssystems

$$\mathfrak{f}_k(x_1, x_2, \ldots x_n) = c_k \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots n)},$$

welches von der Ordnung $n!$ ist. Die Zahl r soll auch die Ordnung des Affects und der durch denselben bestimmten Classe genannt werden. Alsdann

> gehört also — immer bei festgesetztem Rationalitäts-Bereich — eine algebraische Grösse n^{ter} Ordnung und die Gleichung, durch welche sie definirt wird, in eine bestimmte Classe der Ordnung r, wenn das Gleichungssystem, durch welches die n conjugirten algebraischen Grössen zugleich definirt werden, von der Ordnung r und durch $n+1$ Gleichungen ($\overline{C}$) darstellbar ist, von denen die erste eine Function einer besonderen für die Classe bestimmenden Gattung, jede der übrigen n aber nur je eine der elementaren symmetrischen Functionen enthält.

Dass, wie hier entwickelt worden ist, jeder irreductible Theil eines Gleichungssystems, welches n conjugirte algebraische Grössen definirt, durch $n+1$ Gleichungen, und zwar — mit Ausnahme des Falles, wo die Ordnung $n!$ ist — nicht durch weniger Gleichungen dargestellt werden kann, fällt unter den allgemeinen für beliebige Gleichungssysteme geltenden Satz, welcher im vorhergehenden Paragraphen aufgestellt worden ist. Aber es bildet eine höchst bemerkenswerthe Eigenthümlichkeit dieser $n+1$ Gleichungen, dass sie auf jene, so zu sagen, „separirte Form" ($\overline{C}$) gebracht werden können, bei welcher die einen Seiten der Gleichungen nur ganze ganzzahlige, von den gegebenen Grössen $\mathfrak{R}$ unabhängige Functionen der

Unbekannten, die anderen Seiten lediglich rationale Functionen der Grössen $\mathfrak{R}$ enthalten.

An die eigenthümliche „separirte Form" der Gleichungen $(\bar{C})$ lässt sich die Darlegung des principiellen Unterschiedes der *Abel*schen und *Galois*-schen Behandlung der algebraischen Gleichungen am besten anknüpfen. *Abel* bleibt nämlich bei den durch die specielle Gleichung gegebenen oder zu ermittelnden rationalen Functionen $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots$ stehen, welche in dem Systeme $(\bar{C})$ die rechte Seite bilden, während *Galois*, wenigstens implicite durch die Aufstellung der Gruppe, von dem speciellen Gleichungsproblem die theoretisch allein wichtigen Functionen auf der linken Seite des Systems $(\bar{C})$ abstrahirt. Freilich entgeht *Galois* eben durch diese vollständige Abstraction auch eines der interessantesten Probleme, welches *Abel* in der Theorie der algebraischen Gleichung findet und auch behandelt. Es ist das Problem der Aufstellung aller Gleichungen einer bestimmten Classe für einen gegebenen Rationalitäts-Bereich, und ich will dasselbe hier auch desshalb näher darlegen, weil dabei die arithmetische Natur algebraischer Fragen deutlich hervortritt.

Wenn mit $\mathfrak{g}$, wie oben, eine Function einer Gattung ϱ^{ter} Ordnung bezeichnet wird, so besteht zwischen $\mathfrak{g}$ und den elementaren symmetrischen Functionen $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots \mathfrak{f}_n$ eine Gleichung

$$\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots \mathfrak{f}_n) = 0,$$

in welcher Φ eine ganze ganzzahlige Function der $n+1$ Grössen $\mathfrak{g}, \mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots \mathfrak{f}_n$ bedeutet, die in Bezug auf $\mathfrak{g}$ vom Grade ϱ ist. Soll es nun für einen Rationalitäts-Bereich $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ Gleichungen einer durch die Gattung $\mathfrak{g}$ bestimmten Classe geben, so müssen $n+1$ rationale Functionen der Grössen $\mathfrak{R}$

$$\varphi_0, \quad \varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \ldots \quad \varphi_n$$

existiren, für welche die Gleichung

$$\Phi(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n) = 0$$

erfüllt wird. Die Aufgabe, alle Gleichungen eines bestimmten Affects aufzustellen, ist hiernach durchaus arithmetischer Art, sie ist eine sogenannte Diophantische Aufgabe für den gegebenen Rationalitäts-Bereich, die freilich ebenso schwierig wie interessant zu sein scheint. Selbst für den einfachsten Fall, wo $\mathfrak{g}$ eine alternirende Function bedeutet, ist die Aufgabe für ein allgemeines n, so viel ich weiss, noch nicht gelöst worden. In diesem Falle

ist der Grad von Φ in Bezug auf $\mathfrak{g}$ möglichst klein, nur gleich *Zwei;* die Schwierigkeit der Aufgabe scheint aber nicht mit der Grösse des Grades zu wachsen; denn für den Fall, wo $\mathfrak{g}$ eine cyclische Function darstellt, und also jener Grad so gross als möglich ist, habe ich die Lösung schon in meiner oben citirten Mittheilung vom Juni 1853 gegeben. Damals hatte ich allerdings für allgemeine Rationalitäts-Bereiche den Fall, wo n eine Potenz von *Zwei* ist, noch ausschliessen müssen, ich habe aber später auch diesen Fall erledigt und dabei gefunden, dass die Aufgabe in der That für $n = 8, 16, 32, \ldots$ einen ganz anderen Charakter hat als für die übrigen Zahlen n.

Da die ganzen rationalen Functionen $x_1, x_2, \ldots x_n$ als algebraische Functionen von $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots \mathfrak{f}_n$ aufgefasst werden können und als solche eben jene Gattungen bilden, welche zur Definition der Functions-Gattungen gedient haben, so müssen alle zu einer Gattung gehörigen ganzen Functionen, welche also die Haupt-Art bilden, gemäss § 6 durch eine bestimmte Anzahl von Elementen linear darstellbar sein, und es ist schon in § 7 erwähnt, dass die ausreichende Anzahl in diesem Falle nicht grösser ist als die Ordnung der Gattung. Ich habe diesen Fundamentalsatz zuerst in meinen im Winter 1870/71 gehaltenen Universitäts-Vorlesungen vorgetragen und will hier die damals gegebene Entwickelung in Kürze mittheilen.

Das Fundamentalsystem für die *Galois*sche Gattung kann durch die $n!$ Elemente

$$x_1^{h_1} x_2^{h_2} \ldots x_{n-1}^{h_{n-1}} \qquad (h_k = 0, 1, \ldots n-k;\ k = 1, 2, \ldots n-1)$$

dargestellt werden. Ich habe dies zuerst in meinem schon oben citirten Aufsatz „Ueber die verschiedenen *Sturm*schen Reihen" im Monatsbericht der Berliner Akademie vom Febr. 1873 nachgewiesen. Da nämlich das Product

$$(x - x_k)(x - x_{k+1}) \ldots (x - x_n)$$

für jeden der n Werthe $k = 1, 2, \ldots n$ eine ganze Function $(n - k + 1)^{\text{ten}}$ Grades von x ist, deren Coefficienten ganze ganzzahlige Functionen von

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots \quad x_{k-1}; \quad \mathfrak{f}_1, \quad \mathfrak{f}_2, \quad \ldots \quad \mathfrak{f}_n$$

sind, so stellt dasselbe, gleich Null gesetzt, eine Gleichung für x_k dar, mit deren Hülfe sich jede höhere als die $(n - k)^{\text{te}}$ Potenz von x_k durch niedrigere so ausdrücken lässt, dass die Coefficienten ganze ganzzahlige Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_{k-1}$ und $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots \mathfrak{f}_n$ werden. Indem man dies nun der Reihe nach für $k = n, n-1, n-2, \ldots$ ausführt, kann man jede ganzzahlige

Function von $x_1, x_2, \dots x_n$ auf eine solche reduciren, welche in Beziehung auf jedes x_k nur vom Grade $n-k$ ist, und deren Coefficienten ganze ganzzahlige Functionen der elementaren symmetrischen Functionen $\mathfrak{f}$ sind. Eine solche „reducirte Form" einer ganzen Function von $x_1, x_2, \dots x_n$ ist offenbar völlig bestimmt und eben nichts Anderes als die Darstellung durch das angegebene Fundamentalsystem der *Galois*schen Gattung. Dabei ergiebt sich übrigens in einfachster, naturgemässer Weise die Darstellbarkeit jeder ganzen symmetrischen Function von $x_1, x_2, \dots x_n$ als ganze ganzzahlige Function von $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots \mathfrak{f}_n$.

Denkt man sich die obigen Elemente eines Fundamentalsystems der *Galois*schen Gattung nach ihrer Dimension geordnet, diejenigen von gleicher Dimension aber in je eine Gruppe vereinigt, und bezeichnet man dieselben der Reihe nach mit $\gamma', \gamma'', \gamma''', \dots$, so kann man entsprechende ganze Functionen einer gegebenen Gattung $\mathfrak{g}', \mathfrak{g}'', \mathfrak{g}''', \dots$ daraus bilden, indem man diejenigen aus einem Element γ durch die r Permutationen der Gattung entstehenden Functionen, welche unter einander verschieden sind, zu einander addirt. Dann lässt sich offenbar jede ganze Function der Gattung $\mathfrak{g}$ als lineare ganze Function von $\mathfrak{g}', \mathfrak{g}'', \mathfrak{g}''', \dots$ so darstellen, dass die Coefficienten ganze ganzzahlige Functionen von $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots \mathfrak{f}_n$ sind; die $n!$ Elemente bilden also im vollen Sinne des Wortes ein Fundamentalsystem der Gattung $\mathfrak{g}$. Es soll aber nunmehr nachgewiesen werden, dass sich alle diese $n!$ Elemente durch nur ϱ derselben linear darstellen lassen, wenn man als Coefficienten ganze Functionen von $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots \mathfrak{f}_n$ mit bloss rationalen, d. h. auch mit gebrochenen Zahlcoefficienten zulässt, dass also für ein Fundamentalsystem in diesem nicht ganz vollen Sinne des Wortes eine die Ordnungszahl ϱ nicht übersteigende Anzahl von Elementen genügt (vgl. den Anfang des § 7).

Bei jeder Darstellung einer Function $\mathfrak{g}$ durch die Functionen γ

$$(\Gamma) \qquad \mathfrak{g}^{(k)} = \varphi_k'\gamma' + \varphi_k''\gamma'' + \varphi_k'''\gamma''' + \cdots,$$

wobei $\varphi_k', \varphi_k'', \varphi_k''', \dots$ ganze ganzzahlige Functionen von $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots \mathfrak{f}_n$ bedeuten, können nur Functionen γ von der durch $\mathfrak{g}$ selbst repräsentirten oder von voranstehenden Gruppen vorkommen. Addirt man alle diejenigen Gleichungen (Γ), welche bei den r Permutationen der Gattung daraus entstehen, zu einander, so resultirt eine Gleichung

$$(G) \qquad r\mathfrak{g}^{(k)} = m'\varphi_k'\mathfrak{g}' + m''\varphi_k''\mathfrak{g}'' + m'''\varphi_k'''\mathfrak{g}''' + \cdots,$$

in welcher $m', m'', m''', \dots$ ganze Zahlen und zwar Theiler von r bedeuten,

da $\Sigma\gamma$, wenn in Beziehung auf alle r Permutationen summirt wird, die entsprechende Function $\mathfrak{g}$ mehrmals ergiebt. Die Gleichung (G) zeigt, dass alle diejenigen Functionen $\mathfrak{g}^{(k)}$, bei deren Darstellung (Γ) durch die Elemente γ nur solche von voranstehenden Gruppen vorkommen, sich zugleich auf lineare Functionen von ***Gattungs-Elementen*** $\mathfrak{g}$ der voranstehenden Gruppen reduciren. Die Coefficienten dieser linearen Functionen sind ganze Functionen von $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots \mathfrak{f}_n$ mit rationalen Zahlcoefficienten. Alle auf die angegebene Weise reducirbaren Elemente $\mathfrak{g}$ können also weggelassen werden, und es bleiben dann nur solche Functionen $\mathfrak{g}^{(k)}$ übrig, welche bei der Darstellung (Γ) auch Elemente γ von derselben Gruppe wie die dargestellte Function $\mathfrak{g}$ und zwar diese mit ganzzahligen Coefficienten enthalten. Bezeichnet man diese linearen Aggregate von Elementen γ der höchsten Dimension, welche nur ganzzahlige Coefficienten haben, mit $\Gamma^{(k)}$, so ist $\mathfrak{g}^{(k)}-\Gamma^{(k)}$ eine Function, welche bei ihrer Darstellung durch die Elemente γ nur solche von geringerer Dimension enthält. Nimmt man nun die einzelnen Functionen $\mathfrak{g}^{(k)}$, welche einer und derselben Gruppe angehören, in einer beliebigen Reihenfolge, so lässt sich, wenn eines der Aggregate $\Gamma^{(k)}$ durch Aggregate $\Gamma^{(k-1)}, \Gamma^{(k-2)}, \ldots$ von voranstehenden Elementen $\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-2)}, \ldots$ linear darstellbar ist, das Element $\mathfrak{g}^{(k)}$ selbst als eine lineare Function voranstehender Elemente $\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-2)}, \ldots$ ausdrücken. Ist nämlich

$$\Gamma^{(k)} = c_1\Gamma^{(k-1)}+c_2\Gamma^{(k-2)}+\cdots,$$

so wird

$$\mathfrak{g}^{(k)} = c'\mathfrak{g}^{(k-1)}+c''\mathfrak{g}^{(k-2)}+\cdots+(\mathfrak{g}^{(k)}-\Gamma^{(k)})$$
$$-c'(\mathfrak{g}^{(k-1)}-\Gamma^{(k-1)})-c''(\mathfrak{g}^{(k-2)}-\Gamma^{(k-2)})-\cdots,$$

und ebenso, wie jedes einzelne Glied $\mathfrak{g}-\Gamma$, enthält der ganze zweite Theil auf der rechten Seite dieser Gleichung bei der Darstellung durch die Elemente γ nur solche von geringerer Dimension als $\mathfrak{g}^{(k)}$, und erfüllt daher, als Function der Gattung $\mathfrak{g}$, diejenigen Bedingungen, für welche oben nachgewiesen worden, dass sich eine solche Function linear durch Gattungselemente $\mathfrak{g}$ von geringerer Dimension darstellen lässt. Nach Weglassung aller solcher Elemente $\mathfrak{g}^{(k)}$, deren zugehörige Aggregate $\Gamma^{(k)}$ durch Aggregate voranstehender linear ausdrückbar sind, bleiben nur Elemente $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3, \ldots$ übrig, welche in dem Sinne linear unabhängig von einander sind, dass keine Relation

$$\psi_1\mathfrak{g}_1+\psi_2\mathfrak{g}_2+\psi_3\mathfrak{g}_3+\cdots = 0$$

besteht, in welcher $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$ ganze Functionen von $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots \mathfrak{f}_n$ sind. Denn schon zwischen den entsprechenden Aggregaten der höchsten Dimension $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots$ kann keine lineare Relation mit Coefficienten ψ bestehen. Die Anzahl der übrig gebliebenen Functionen $\mathfrak{g}$ muss demnach genau gleich ϱ sein, da dies die Anzahl der von einander linear unabhängigen Functionen der Gattung $\mathfrak{g}$ ist.

Wird die Discriminante der durch x_k bezeichneten Gattung, nämlich das Product

$$\Pi(x_i - x_k) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n;\ i \gtrless k)$$

mit $\mathfrak{D}$ bezeichnet, so ist die Discriminante der *Galois*schen Gattung $\mathfrak{D}^{\frac{1}{2}n!}$. Nach § 8 ist also auch die Discriminante jeder anderen Gattung eine Potenz von $\mathfrak{D}$. Denn jede solche Gattung ist unter der *Galois*schen enthalten; ihre Discriminante muss daher Theiler einer Potenz von $\mathfrak{D}$ und also, da $\mathfrak{D}$ im Rationalitäts-Bereich $(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots \mathfrak{f}_n)$ irreductibel ist, selbst eine Potenz von $\mathfrak{D}$ sein.

Bedeuten $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3, \ldots$ ganze ganzzahlige Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$, welche der Gattung $\mathfrak{g}$ angehören, und in dem oben angegebenen Sinne ein Fundamentalsystem dieser Gattung bilden, so kann nach § 8 die Discriminante der Gleichung, welcher

$$u_1\mathfrak{g}_1 + u_2\mathfrak{g}_2 + u_3\mathfrak{g}_3 + \cdots$$

genügt, keinen anderen von den unbestimmten Grössen u unabhängigen Factor enthalten als einen solchen, der Theiler einer Potenz der Discriminante der Gattung $\mathfrak{g}$ ist; es kann daher, wenn jene Discriminante nach Producten von Potenzen der unbestimmten Grössen u entwickelt wird, der grösste gemeinsame Theiler sämmtlicher dabei auftretender Coefficienten nur eine Potenz von $\mathfrak{D}$ sein. Hieraus folgt, dass sich für irgend welche gegebenen Werthe von $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots \mathfrak{f}_n$ — vorausgesetzt nur, dass der Werth von $\mathfrak{D}$ dafür nicht verschwindet — stets unendlich viele specielle Functionen jeder Gattung $\mathfrak{g}$ bestimmen lassen, deren sämmtliche conjugirte unter einander verschieden sind, und durch die sich daher jede andere Function derselben Gattung rational ausdrücken lässt.

§ 13.

Begründung der arithmetischen Existenz der algebraischen Grössen.

Die am Schlusse des vorigen Paragraphen entwickelte Eigenschaft der Gattungen algebraischer Functionen von $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots \mathfrak{f}_n$ bildet die wesentlichste Grundlage bei einem dem *Gauss*schen Beweise von 1815 nachge-

bildeten Existenzbeweise für die Wurzeln algebraischer Gleichungen, welchen ich schon in meiner an der hiesigen Universität gehaltenen Wintervorlesung von 1870/71 vorgetragen und seitdem in meinen Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Gleichungen stets fast in derselben Weise gegeben habe. — Der Beweis stützt sich auf „uneigentliche" Functionsgattungen, welche entstehen, wenn man aus einer Gattung $\mathfrak{g}(x_1, x_2, \dots x_h)$, falls $h < \frac{1}{2}n$ ist, eine neue bildet, die durch

$$(z - \mathfrak{g}(x_1, x_2, \dots x_h))(z - \mathfrak{g}(x_{h+1}, x_{h+2}, \dots x_{2h}))$$

repräsentirt wird. Nimmt man nämlich nach einander $h = 1, 2, 4, \dots 2^\nu$, und bezeichnet die entsprechenden Gattungen mit $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \dots \mathfrak{g}_\nu$, so enthält die Zahl, welche die Ordnung der Gattung $\mathfrak{g}_\mu$ angiebt, genau die $(\nu - \mu)^{\text{te}}$ Potenz von 2, wenn die Zahl n keine höhere als die ν^{te} Potenz von 2 enthält. Die Ordnung von $\mathfrak{g}_\nu$ ist also ungrade. Es ist ferner $\mathfrak{g}_{\mu-1}$ Wurzel einer quadratischen Gleichung, deren Coefficienten der Gattung $\mathfrak{g}_\mu$ angehören, so dass

$$\mathfrak{g}_{\mu-1} = \varphi(\mathfrak{g}_\mu) + \sqrt{\psi(\mathfrak{g}_\mu)}$$

wird. Hierbei bedeuten φ und ψ ganze Functionen von $\mathfrak{g}_\mu$, deren Coefficienten rationale Functionen von $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots \mathfrak{f}_n$ sind, und es kann darin nur die Discriminante der Gleichung, welcher die als Repräsentant der Gattung gewählte, bestimmte Function $\mathfrak{g}_\mu$ genügt, oder ein Theiler derselben als Nenner vorkommen. Die Kette jener Gleichungen für $\mu = 1, 2, \dots \nu$ giebt hiernach $\mathfrak{g}_0$ oder, was dafür genommen werden kann, x_1 als explicite, lediglich Quadratwurzeln enthaltende, ganze algebraische Function von $\mathfrak{g}_\nu$ und $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots \mathfrak{f}_n$, dividirt durch eine ganze Function von $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots \mathfrak{f}_n$, welche nur ein Theiler des Products gewisser Discriminanten sein kann. Wird dieses Product mit $\mathfrak{p}$ bezeichnet, so existirt daher eine lediglich durch Quadratwurzeln aus ganzen ganzzahligen Functionen von $y, \mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots \mathfrak{f}_n$ zu bildende algebraische Function $\theta(y)$, welche, wenn darin $y = \mathfrak{g}_\nu$ genommen wird, $\mathfrak{p}x_1$ ergiebt. Die algebraische Function $\theta(y)$ ist von der Ordnung 2^ν; es besteht daher eine Gleichung $\mathfrak{P}(x, y) = 0$ des Grades 2^ν, welche durch den Werth $x = \frac{\theta(y)}{\mathfrak{p}}$ befriedigt wird, und, wenn der Coefficient der höchsten Potenz von x gleich Eins ist, in ihren übrigen Coefficienten nur ganze Functionen von $y, \mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots \mathfrak{f}_n$, dividirt durch Potenzen von $\mathfrak{p}$, enthält. Nun ist

$$\prod_h (x - x_h) = \mathfrak{P}(x, \mathfrak{g}_\nu) \qquad (h = 1, 2, 3, \dots 2^\nu)$$

und folglich

$$\mathfrak{F}(x) = \mathfrak{P}(x, \mathfrak{g}_\nu)\mathfrak{Q}(x, \mathfrak{g}_\nu),$$

wo auch $\mathfrak{Q}$ ganz ebenso wie $\mathfrak{P}$ eine ganze Function von x, $\mathfrak{g}_\nu$ bedeutet, deren Coefficienten rationale, nur Potenzen von $\mathfrak{p}$ im Nenner enthaltende Functionen der Grössen $\mathfrak{f}$ sind. Wenn also $\mathfrak{G}(y) = 0$ die Gleichung ist, durch welche $\mathfrak{g}_\nu$ als algebraische Function der Grössen $\mathfrak{f}$ definirt wird, so muss eine identische Gleichung

$$\mathfrak{F}(x) = \mathfrak{P}(x, y)\mathfrak{Q}(x, y) + \mathfrak{G}(y)\mathfrak{R}(x, y)$$

bestehen, in welcher auch $\mathfrak{R}(x, y)$ eine Function von derselben Beschaffenheit wie $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ bedeutet. Setzt man hierin $x = \frac{\theta(y)}{\mathfrak{p}}$, so wird $\mathfrak{P}(x,y) = 0$, und es resultirt die identische, d. h. für jeden beliebigen Werth von y geltende Gleichung

$$\mathfrak{F}\left(\frac{\theta(y)}{\mathfrak{p}}\right) = \mathfrak{G}(y)\mathfrak{R}\left(\frac{\theta(y)}{\mathfrak{p}}, y\right),$$

welche zeigt, dass die Gleichung $\mathfrak{F}(x) = 0$ durch die algebraische Grösse $\frac{\theta(y)}{\mathfrak{p}}$ befriedigt wird, wenn y der Gleichung $\mathfrak{G}(y) = 0$ genügt und $\mathfrak{p}$ nicht verschwindet. Da nun am Ende des vorigen Paragraphen der diesen letzten Schluss einzig ermöglichende Nachweis geführt ist, dass für solche Werthe von $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots \mathfrak{f}_n$, für welche die Discriminante der Gleichung $\mathfrak{F}(x) = 0$ von Null verschieden ist, stets die Functionen $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots \mathfrak{g}_n$ so gewählt werden können, dass jede der betreffenden Discriminanten und also auch deren Product $\mathfrak{p}$ einen von Null verschiedenen Werth hat, so folgt, dass jeder Gleichung durch eine explicite algebraische, nur Quadratwurzeln enthaltende Function einer Grösse y genügt wird, welche selbst Wurzel einer Gleichung ungraden Grades ist.

Es verdient hervorgehoben zu werden, dass in dieser Entwickelung, wie in der citirten *Gauss*schen Abhandlung von 1815, eine viel *speciellere* Art der Existenz algebraischer Grössen dargelegt wird, als bei allen anderen Beweismethoden. Dieser Unterschied tritt besonders deutlich hervor, wenn man den oben für Gleichungen ungraden Grades vorausgesetzten Begriff der reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen genauer analysirt, wie ich es in meinen Universitäts-Vorlesungen regelmässig gethan habe; und ich gedenke auch diese Analyse bei einer nächsten Gelegenheit durch den Druck zu veröffentlichen. Der hier entwickelte Beweis enthält recht eigentlich eine Begründung der *arithmetischen* Existenz der algebraischen Grössen und fügt sich desshalb in die systematische Darstellung, welche ich in der vorliegenden Arbeit zu geben versucht habe, vollständig ein.

Zweiter Theil.

§ 14.

Die grössten gemeinschaftlichen Theiler von ganzen algebraischen Grössen.

Mit dem Begriffe der ganzen algebraischen Grössen (vgl. § 5) ist der Begriff der Theilbarkeit unmittelbar gegeben. Eine ganze algebraische Grösse x ist durch eine andere x' theilbar, wenn der Quotient der Division von x durch x' wiederum eine ganze algebraische Grösse ist. Hierbei ist der Divisor x' als gegeben zu betrachten. Aber auch die andere Frage der Auffindung oder Aufstellung der Divisoren gegebener algebraischer Grössen lässt eine höchst einfache Behandlung zu. In der That hat man zu den algebraischen Grössen einer bestimmten Art oder Species $\mathfrak{S}$ nur *lineare Functionen derselben mit unbestimmten Coefficienten* hinzu zu nehmen, um ohne alle Symbolik und ohne alle Mittel der Abstraction die grössten gemeinsamen Theiler je zweier algebraischer Grössen der gesammten Art $\mathfrak{S}$ wirklich darzustellen. Bedeuten nämlich $u', u'', \ldots$ unbestimmte Grössen und $x, x', x'', \ldots$ ganze algebraische Grössen einer bestimmten Art $\mathfrak{S}$, so ist das über alle conjugirten Werthe erstreckte Product

$$\Pi(x+u'x'+u''x''+\cdots),$$

welches auch nach der üblichen Ausdrucksweise als die „Norm" von $x+u'x'+u''x''+\cdots$ und demnach mit

$$\operatorname{Nm}(x+u'x'+u''x''+\cdots)$$

bezeichnet werden kann, eine ganze Function der Grössen u, deren Coefficienten ganze rationale Grössen des Bereichs sind. Wird nun zunächst — wie unbeschadet der Allgemeinheit geschehen kann — von dem Falle abstrahirt, wo nicht sämmtliche Grössen $\mathfrak{R}$ von einander unabhängig sind, wird also ein natürlicher Rationalitätsbereich angenommen, so ist der Begriff des grössten gemeinsamen Theilers aller jener Coefficienten ohne Weiteres begründet, da diese Coefficienten alsdann nur ganze Zahlen oder ganze ganzzahlige Functionen unabhängiger Veränderlicher sind. Eben derselbe Theiler kann auch als der grösste von den Unbestimmten u unabhängige Theiler der Norm von $x+u'x'+u''x''+\cdots$ charakterisirt werden, und der nach Absonderung dieses Theilers verbleibende Theil der Norm ist eine ganze

Function von $u', u'', \ldots$, deren Coefficienten ganze rationale Grössen des Bereichs sind, die nicht sämmtlich einen und denselben gemeinsamen Theiler haben. Nennt man diese ganze Function, obwohl sie nicht homogen ist, doch in *Gauss*scher Weise eine in Linearfactoren zerlegbare *„primitive Form n^{ten} Grades von $u', u'', \ldots$"*, deren *„abgeleitete"* die Norm von $x+u'x'+u''x''+\cdots$ ist, und bezeichnet dieselbe mit

$$\text{Fm}(x+u'x'+u''x''+\cdots),$$

so besteht, der Definition gemäss, zwischen der „Norm" und der „Form" eine Relation

$$P.\text{Fm}(x+u'x'+u''x''+\cdots) = \text{Nm}(x+u'x'+u''x''+\cdots),$$

in welcher P eine ganze rationale Grösse des Bereichs ist. Dies vorausgeschickt, kann *„der grösste gemeinschaftliche Theiler"* beliebig vieler ganzer algebraischer Grössen $x, x', x'', \ldots$ durch den Bruch

$$\frac{x+u'x'+u''x''+\cdots}{\text{Fm}(x+u'x'+u''x''+\cdots)}$$

vollkommen dargestellt werden, da jede lineare Function $x+v'x'+v''x''+\cdots$ mit beliebigen Coefficienten v durch jenen Bruch theilbar ist, der Quotient der Division aber keinen solchen Bruch mehr als Theiler enthalten kann. Um das Erstere einzusehen, braucht man nur die Gleichung zu bilden, welcher der Quotient

$$\frac{x+v'x'+v''x''+\cdots}{x+u'x'+u''x''+\cdots}\cdot\text{Fm}(x+u'x'+u''x''+\cdots)$$

genügt, d. h. also, wenn dieser Quotient mit $Q(x, x', x'', \ldots)$ bezeichnet wird, die Gleichung

$$\text{Nm}(X-Q(x, x', x'', \ldots)) = 0,$$

in welcher X die Unbekannte bedeutet. Die Norm auf der linken Seite der Gleichung nimmt nämlich, wenn zur Abkürzung erst

$$\text{Fm}(x+u'x'+u''x''+\cdots) = F$$

und dann

$$X-F=w,\quad u'X-v'F=w',\quad u''X-v''F=w'', \ldots$$

gesetzt wird, die Gestalt an

$$\frac{\text{Fm}(wx+w'x'+w''x''+\cdots)}{\text{Fm}(x+u'x'+u''x''+\cdots)},$$

und es wird hiermit evident, dass dieser Ausdruck eine ganze ganzzahlige

Function der Grössen X, $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$, $\mathfrak{R}'''$, $\ldots$, u', u'', $\ldots$ v', v'', $\ldots$ ist, welcher überdies als Coefficienten der höchsten Potenz von X die Zahl Eins und also, gleich Null gesetzt, *ganze* algebraische Grössen zu Wurzeln hat. Dass nun zweitens der mit $Q(x, x', x'', \ldots)$ bezeichnete Quotient nicht noch durch einen Bruch

$$\frac{x_1 + u_1' x_1' + u_1'' x_1'' + \cdots}{\operatorname{Fm}(x_1 + u_1' x_1' + u_1'' x_1'' + \cdots)}$$

theilbar sein kann, erhellt unmittelbar, wenn man nach erfolgter Division die Norm bildet. Diese Norm wird nämlich, wenn

$$P_1 . \operatorname{Fm}(x_1 + u_1' x_1' + u_1'' x_1'' + \cdots) = \operatorname{Nm}(x_1 + u_1' x_1' + u_1'' x_1'' + \cdots)$$

ist, gleich

$$\frac{1}{P_1} \operatorname{Fm}(x + v' x' + v'' x'' + \cdots) . (\operatorname{Fm}(x + u' x' + u'' x'' + \cdots) . \operatorname{Fm}(x_1 + u_1' x_1' + u_1'' x_1'' + \cdots))^{n-1},$$

also nur dann ganz, wenn $P_1 = 1$ ist.

Dass die Divisoren der ganzen algebraischen Grössen in Bruchform dargestellt sind, kann keinen Anstoss erregen; denn die Uebertragung des ursprünglichsten Begriffes der Division mit ganzen Zahlen auf die mit gebrochenen gehört schon den Elementen an. *Complexe* gebrochene Zahlen habe ich als Moduln oder Divisoren zuerst in § 6 meiner Doctordissertation „De unitatibus complexis" (Berlin 1845) genau so angewendet, wie sie wenige Jahre darauf in der *Kummer*schen Definition der idealen Zahlen benutzt werden (vgl. die Anmerk. in § 19), und sie haben namentlich auch in den *Exponenten* der Einheiten wesentliche Dienste geleistet. Aber erst viel später wurde ich beim Uebergang von den complexen Zahlen zu den zerlegbaren Formen (vgl. § 19) darauf geführt, das Hülfsmittel der gebrochenen Divisoren mit jenem „methodischen Hülfsmittel der unbestimmten Coefficienten" combinirt anzuwenden, um alle unnützen und theilweise auch verwirrenden Specialitäten abzustreifen. Damit erschienen dann in der That die Divisoren der ganzen algebraischen Grössen in einfacher, übersichtlicher, naturgemässer Gestalt, in welcher für den speciellen Fall der gewöhnlichen Zahlen, d. h. für den Fall $\mathfrak{R} = 1$, alle sowohl bei der *Kummer*schen Begriffsbestimmung der idealen Zahlen als auch bei der *Dedekind*schen Definition der „Ideale" benutzten abstracten Eigenschaften an einem concreten algebraischen Gebilde vereinigt sind. Der Grund dieses Erfolges liegt einfach darin, dass mit jenen Divisoren das Gebiet der algebraischen Grössen, welche den Ausgangspunkt bilden, genügend erweitert wird, um den bei

ganzen Zahlen und bei ganzen rationalen Functionen von Variabeln geltenden einfachen Gesetzen der Theilbarkeit, welche beim Uebergang zu den ganzen algebraischen Grössen modificirt werden, wiederum Raum zur vollen Wirksamkeit zu schaffen. Es ist also ein von den bisher angewendeten Methoden principiell verschiedenes Verfahren, welches ich bei Einführung jener Divisoren eingeschlagen habe, es ist das *„Princip der Association neuer Grössengebilde zu der gegebenen Gattung und Species algebraischer Grössen"*, welches hierbei die Grundlage bildet*).

§ 15.

Die algebraischen Divisoren.

Eine ganze algebraische Grösse, deren Norm gleich Eins und durch welche also jede ganze algebraische Grösse theilbar ist, soll eine „algebraische Einheit" genannt werden. Diese Einheiten sind durch keine anderen ganzen algebraischen Grössen theilbar. Ebendieselbe Eigenschaft besitzen auch die „primitiven Formen", welche die Nenner jener „Divisoren ganzer algebraischer Grössen" bilden, und es könnten desshalb die Zähler allein schon als Repräsentanten der Divisoren gebraucht werden, wenn bei den Quotienten der Division von solchen Nennern, die durch keine ganze algebraische Grösse theilbar sind, abgesehen wird. Diese Betrachtungsweise wird später (in § 22) systematisch angewendet werden; hier im Anfang der Entwickelung glaube ich der obigen Darstellung der Divisoren den Vorzug geben zu sollen, weil sie *keinerlei* Abstraction erfordert. Nur eine der Sache entsprechende abgekürzte Ausdrucks- und Bezeichnungsweise einzuführen erscheint wohl statthaft. Um nämlich nicht jedes Mal für die *Form* eines linearen Ausdrucks $x+u'x'+u''x''+\cdots$ ein besonderes Zeichen zu benutzen, soll unter dem „Modul $[x+u'x'+u''x''+\cdots]$" oder „dem Divisor $[x+u'x'+u''x''+\cdots]$" der lineare Ausdruck selbst, dividirt durch die daraus entstehende primitive Form, verstanden und mit

$$\mathrm{mod}[x+u'x'+u''x''+\cdots] \quad \text{oder} \quad \mathrm{div}[x+u'x'+u''x''+\cdots]$$

bezeichnet werden. Im Sinne des in dieser Arbeit vielfach benutzten „methodischen Hülfsmittels der unbestimmten Coefficienten", welches zu der obigen Bildungsweise der Divisoren geführt hat, sind die Ausdrücke $x+u'x'+u''x''+\cdots$

*) Vgl. die weiteren Ausführungen über die „Association" in § 22.

dabei als lineare Functionen der Grössen x mit unbestimmten Coefficienten u bezeichnet worden; doch ist es von allgemeinerem Gesichtspunkte aus geeigneter, die Grössen x als die Coefficienten der Unbestimmten u und also jene algebraischen Ausdrücke als „lineare Formen" mit ganzen algebraischen Coefficienten aufzufassen. Denn ausser den bereits eingeführten, aus *linearen* Formen hervorgegangenen algebraischen Divisoren können noch allgemeinere aus Formen beliebiger Grade gebildet werden, und es ist sogar *nothwendig*, diese mit in den Kreis der Betrachtung zu ziehen, weil bei der Division einer linearen Form durch einen der oben eingeführten Divisoren der Quotient eine ganze Function der Unbestimmten von höherem Grade, also eine „Form" höheren Grades wird.

Zum Zwecke der Definition der allgemeineren Divisoren muss nunmehr die der Formen vorausgeschickt werden.

I. Eine ganze rationale Function beliebig vieler unbestimmter Grössen $u, v, w, \dots$ soll, wenn die Coefficienten *ganze* Grössen des natürlichen Rationalitäts-Bereichs $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \dots)$, also Grössen des in § 5 mit $[\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \dots]$ bezeichneten Bereichs sind, eine *„ganze" (rationale) Form des Bereichs* $[\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \dots]$ *mit den Unbestimmten* $u, v, w, \dots$, und, wenn die Coefficienten ganze algebraische Grössen eines Gattungs-Bereichs $(\mathfrak{G})$ und eines Art-Bereichs $(\mathfrak{S})$ sind und wenigstens einer derselben der Art $\mathfrak{S}$ selbst angehört, eine *„ganze algebraische Form der Gattung* $\mathfrak{G}$ *und der Art* $\mathfrak{S}$" genannt werden.

Die ganzen algebraischen Formen, im weiteren Sinne des Wortes, umfassen auch die ganzen rationalen Formen, ebenso wie die ganzen algebraischen Grössen die ganzen rationalen mit umfassen.

II. Enthalten die Formen die Unbestimmten nur linear, so sollen sie als „ganze rationale" oder „ganze algebraische *Linearformen*" bezeichnet werden.

III. Die ganzen rationalen Formen heissen *„primitiv"*, wenn ihre Coefficienten keinen gemeinsamen Theiler haben. Eine ganze algebraische Form ist als primitiv zu bezeichnen, wenn ihre Norm primitiv ist.

Eine weitere Unterscheidung der primitiven Formen in eigentlich und uneigentlich primitive wird später in § 22 gegeben werden.

Die Uebertragung der üblichen Bezeichnung „Form" auf nicht homogene ganze Functionen scheint mir keinem Bedenken zu unterliegen. Das

Zutreffende an der Bezeichnung ist, dass sie, im Gegensatz zur Benennung „*Function* der Grössen $u, v, w, \ldots$“, die Coefficienten als das Wesentliche, die Unbestimmten als das Unwesentliche kennzeichnet. Da hier, genau so wie im gewöhnlichen Sinne, das Wort „Form“ schon an sich einen Ausdruck bedeutet, welcher in Bezug auf die Unbestimmten der Form ganz und rational ist, so konnten in den aufgestellten Definitionen jene Bezeichnungen „ganze rationale“, „ganze algebraische“ Formen, welche die Natur der *Coefficienten* charakterisiren sollen, unbedenklich als adjectivische den Formen selbst beigelegt werden. Auch die Begriffe des Conjugirt-Seins, der Norm u. s. w. sollen im Folgenden, ebenso wie der Begriff der Gattung und Art, von den *Coefficienten* auf die algebraischen Formen selbst übertragen werden.

IV. Wird eine ganze algebraische Form durch diejenige primitive Form dividirt, deren abgeleitete die Norm der algebraischen Form ist, so repräsentirt der Quotient einen allgemeinen „*algebraischen Modul oder Divisor*“, dessen „*Elemente*“ durch die Coefficienten der algebraischen Form gebildet werden.

Es verdient hervorgehoben zu werden, dass diese Definition auch für den besonderen Fall Geltung behält, wo die ganze algebraische Form sich auf eine ganze *rationale* reducirt, also die Anzahl der Conjugirten gleich Eins, und die Norm daher mit der ganzen rationalen Form selbst identisch wird.

Nach den gegebenen Definitionen sind die ganzen algebraischen Grössen selbst ebenso in den ganzen algebraischen Formen wie in den algebraischen Divisoren mit inbegriffen, und eben, damit dies der Fall sei, hat die Beschränkung auf homogene Formen aufgegeben werden müssen. Das Verhältniss der ganzen algebraischen Grössen zu den Formen und Divisoren, unter denen sie mit inbegriffen sind, ist in folgender Weise einfach zu charakterisiren:

V. In einer bestimmten Art oder Species bilden die ganzen algebraischen *Grössen* die „Hauptclasse“ der algebraischen Divisoren; sie gehören auch zur Hauptclasse der ganzen algebraischen Formen (vgl. § 22, VII), sowie die algebraischen Einheiten gewissermassen die Hauptclasse der *primitiven* algebraischen Formen ausmachen.

Mit Hülfe der obigen Definitionen kann der Begriff der Theilbarkeit der Formen und Divisoren genau und einfach präcisirt werden.

VI. Eine ganze algebraische Form ist durch einen algebraischen Divisor theilbar, wenn der Quotient ebenfalls eine ganze algebraische Form ist.

VII. Ein algebraischer Divisor soll als theilbar durch einen anderen Divisor bezeichnet werden, wenn die Form, welche den Zähler des ersteren bildet, durch den letzteren theilbar ist.

Der hier aufgestellte Begriff der Theilbarkeit ist in der gewöhnlichen Weise nach *Gauss* für den Congruenzbegriff zu benutzen, und es soll auch das *Gauss*sche Congruenzzeichen zuweilen gebraucht werden.

Da die Brüche, welche in der obigen Definition (IV) als algebraische Divisoren definirt sind, nur in ihrer Eigenschaft als Divisoren Anwendung finden, so sind alle diejenigen, welche einander in dieser Eigenschaft vollkommen ersetzen, als äquivalent zu betrachten; und, um dies ausdrücklich zu formuliren, sei hier der Satz angefügt:

VIII. Zwei algebraische Divisoren sind „absolut äquivalent", wenn jeder von beiden durch den anderen theilbar ist.

Ein algebraischer Divisor ist dann und nur dann äquivalent Eins, also überhaupt kein Divisor in der eigentlichen Bedeutung des Wortes, wenn die ganze algebraische Form, aus welcher derselbe gebildet worden, primitiv ist.

Das Beiwort „absolut" ist um desswillen hinzugefügt, weil später (S. 64) auch ein Begriff „relative Aequivalenz" eingeführt werden soll.

An die entwickelten Begriffsbestimmungen ist nun zunächst ein Satz zu knüpfen, welcher den Einheitscharakter der primitiven Formen darlegt und somit ein Fundamentaltheorem für die algebraischen Formen und Divisoren bildet.

IX. Wenn das Product von zwei ganzen algebraischen Formen, deren eine primitiv ist, für einen algebraischen Divisor congruent Null ist, so muss die andere Form selbst durch den Divisor theilbar sein.

Der aufgestellte Satz fällt unter die bereits in § 4 enthaltenen Entwickelungen, wenn in demselben ganze *rationale* Formen und Grössen an die Stelle der *algebraischen* gesetzt werden; denn alsdann sind Formen und Grössen nichts Anderes als ganze ganzzahlige Functionen von Variabeln und somit in irreductible Factoren zerlegbar. Auf diesen besonderen Fall kann aber der allgemeine Satz leicht zurückgeführt werden. Der Voraussetzung nach soll nämlich, wenn der Divisor der Hauptclasse angehört,

eine Gleichung

$$(A)\qquad F(u,v,w,\ldots).G(u,v,w,\ldots) = X.H(u,v,w,\ldots)$$

bestehen, in welcher X eine ganze algebraische Grösse und F, G, H ganze algebraische Formen bedeuten, von denen die erste primitiv ist. Mit u, v, w, ... sind die Unbestimmten der Formen bezeichnet. Aus der Gleichung (A) geht unmittelbar die folgende hervor:

$$(B)\qquad \mathrm{Nm}\left(z-\frac{G(u,v,w,\ldots)}{X}\right) = \mathrm{Nm}\left(z-\frac{H(u,v,w,\ldots)}{F(u,v,w,\ldots)}\right),$$

in welcher das Zeichen Nm, wie oben, das über alle conjugirten algebraischen Grössen und Formen erstreckte Product andeutet. Wird dieser Gleichung (B) die Gestalt gegeben

$$(C)\qquad \begin{aligned}&\mathrm{Nm}\,F(u,v,w,\ldots).\mathrm{Nm}\,(zX-G(u,v,w,\ldots))\\ &= \mathrm{Nm}X.\mathrm{Nm}\,(zF(u,v,w,\ldots)-H(u,v,w,\ldots)),\end{aligned}$$

so sieht man, dass sie genau die oben erwähnten Voraussetzungen des zu beweisenden Satzes für den Fall rationaler Formen und Grössen enthält; denn an die Stelle der in der Gleichung (A) vorkommenden Formen und Grössen

$$F,\qquad G,\qquad X,\qquad H$$

sind in der Gleichung (C) die Ausdrücke

$$\mathrm{Nm}F,\quad \mathrm{Nm}(zX-G),\quad \mathrm{Nm}X,\quad \mathrm{Nm}(zF-H)$$

getreten, von denen der erste eine primitive ganze rationale Form mit den Unbestimmten u, v, w, ..., der zweite und vierte eine ganze rationale Form mit den Unbestimmten z, u, v, w, ... und der dritte eine ganze rationale Grösse des Bereichs darstellt. Mit Hülfe der Entwickelungen in § 4 ist daher aus der Gleichung (C) zu erschliessen, dass der zweite Factor auf der linken Seite durch den ersten Factor auf der rechten theilbar, also die linke Seite der Gleichung (B) *ganz* sein muss. Die Gleichung für z:

$$\mathrm{Nm}\left(z-\frac{G(u,v,w,\ldots)}{X}\right) = 0$$

ist somit eine solche, deren Coefficienten sämmtlich algebraisch ganz sind, und es ist also

$$\frac{G(u,v,w,\ldots)}{X}$$

algebraisch ganz, oder, der Behauptung des Satzes gemäss, $G(u,v,w,\ldots)$ durch X theilbar. — Wird nun endlich an Stelle der ganzen algebraischen

Grösse X ein Divisor, $\mathrm{mod}[\varphi x+\varphi' x'+\varphi'' x''+\cdots]$, genommen, in welchem $x, x', x'', \ldots$ ganze algebraische Grössen und $\varphi, \varphi', \varphi'', \ldots$ die verschiedenen Producte von Potenzen unbestimmter Grössen $\mathfrak{v}, \mathfrak{w}, \ldots$ bedeuten, so folgt aus der darnach modificirten Gleichung (A) die Relation

$$(A') \qquad FG\Phi = PH,$$

in welcher Φ und P durch die Gleichung

$$(\varphi x+\varphi' x'+\varphi'' x''+\cdots)\Phi = P.\mathrm{Fm}(\varphi x+\varphi' x'+\varphi'' x''+\cdots)$$

erklärt und zur Vereinfachung die Unbestimmten der verschiedenen Formen weggelassen sind. Die Gleichung (A') geht in (A) über, wenn G an Stelle von $G\Phi$ und X an Stelle von P gesetzt wird. Aus der obigen Entwickelung folgt daher, dass die Congruenz

$$G\Phi \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod.}\, P)$$

bestehen muss, dass also, da

$$P = \Phi.\mathrm{mod}[\varphi x+\varphi' x'+\varphi'' x''+\cdots]$$

ist, G in der That, wie im obigen Satze behauptet worden, durch den mit $\mathrm{mod}[\varphi x+\varphi' x'+\varphi'' x''+\cdots]$ bezeichneten Divisor theilbar sein muss.

§ 16.

Die algebraischen Divisoren, welche aus Linearformen gebildet sind.

Jeder der allgemeineren Divisoren ist, wie nachher gezeigt werden wird, einem aus Linearformen gebildeten Divisor absolut äquivalent. Es genügt desshalb, die Eigenschaften dieser besonderen Divisoren darzulegen, welche in § 14 zuerst eingeführt worden sind, und es ist nothwendig, die Entwickelung damit zu beginnen, weil bei jenem Nachweise der Aequivalenz mit den allgemeineren Divisoren davon Gebrauch zu machen ist.

Die aus Linearformen entstandenen Divisoren haben, wie bereits in § 14 gezeigt worden ist, die Haupteigenschaft, dass *jede* Linearform durch einen Divisor theilbar ist, dessen Elemente die Coefficienten der Linearform bilden. Dies ist nach den in § 15 aufgestellten Definitionen in den Satz zu fassen:

I. Divisoren, welche dieselben Elemente haben, sind einander absolut äquivalent.

Hierbei sind, wie überhaupt zunächst, unter den Divisoren nur solche zu verstehen, die aus Linearformen hervorgehen. Mit der Begriffsbestimmung dieser besonderen Divisoren sind folgende Eigenschaften unmittelbar gegeben.

II. Jede Grösse, welche durch den algebraischen Divisor theilbar ist, kann dessen Elementen hinzugefügt werden, und es kann jedes Element weggelassen werden, welches für den aus den übrigen Elementen gebildeten Divisor congruent Null ist; d. h. bei den angegebenen Veränderungen wird der Divisor nur in einen absolut äquivalenten transformirt.

III. Der grösste gemeinsame Theiler von zwei algebraischen Divisoren wird durch einen dritten dargestellt, der die Elemente beider als Elemente enthält, so dass

$$\operatorname{mod}[x+u'x'+u''x''+\cdots+y+v'y'+v''y''+\cdots]$$

der grösste gemeinsame Theiler von

$$\operatorname{mod}[x+u'x'+u''x''+\cdots] \quad \text{und} \quad \operatorname{mod}[y+v'y'+v''y''+\cdots]$$

ist, wenn die Theilbarkeit eines Divisors in dem oben (§ 15, VII) definirten Sinne, d. h. als wirkliche Theilbarkeit seines Zählers aufgefasst wird.

Hieraus folgt jene Eigenschaft der algebraischen Divisoren, von welcher in § 14, S. 46 bei der Bildung derselben ausgegangen wurde, nämlich, dass jeder algebraische Divisor den grössten gemeinschaftlichen Theiler seiner Elemente darstellt. — Ist der grösste gemeinsame Theiler von zwei Divisoren äquivalent Eins, so haben sie „keinen gemeinsamen Theiler“ in der eigentlichen Bedeutung des Wortes und können auch als „gegen einander relativ prim“ bezeichnet werden.

IV. Das Product von zwei algebraischen Divisoren entsteht durch wirkliche Multiplication der Zähler, d. h. es ist

$$\operatorname{mod}[x+u'x'+u''x''+\cdots].\operatorname{mod}[y+v'y'+v''y''+\cdots]$$
$$\sim \operatorname{mod}[xy+w'xy'+w''x'y+\cdots],$$

da in der That erstens jedes einzelne Element des linearen Ausdrucks rechts

$$xy+w'xy'+w''x'y+\cdots,$$

also dieser Ausdruck selbst durch das Product links theilbar ist, und da zweitens jedes Glied des entwickelten Products

$$(x+u'x'+u''x''+\cdots)(y+v'y'+v''y''+\cdots)$$

ein Element des Moduls rechts bildet und also durch denselben theilbar ist.

V. Ist das Product von zwei algebraischen Divisoren durch einen dritten theilbar, und hat der erste Divisor mit dem dritten keinen gemeinsamen Theiler, so ist der zweite durch den dritten theilbar. Denn wenn die Elemente der drei Divisoren

$$x, x', x'', \ldots; \quad y, y', y'', \ldots; \quad z, z', z'', \ldots$$

sind, so ist für $\text{mod}[z + w'z' + w''z'' + \cdots]$ der Voraussetzung nach

$$(x + u'x' + u''x'' + \cdots)(y + v'y' + v''y'' + \cdots) \equiv 0,$$

also auch

$$(x + u'x' + u''x'' + \cdots + z + w'z' + w''z'' + \cdots)(y + v'y' + v''y'' + \cdots) \equiv 0,$$

und der aus dem ersteren dieser beiden Factoren zu bildende Modul ist der Voraussetzung nach äquivalent Eins.

§ 17.

Die allgemeinen algebraischen Divisoren; ihre Aequivalenz mit den besonderen, welche aus Linearformen gebildet sind.

Abgesehen von der Definition der Hauptclasse (§ 15, V) ist bei den bisherigen Darlegungen über die „algebraischen Divisoren" vom Begriffe der Art oder Gattung kein Gebrauch gemacht worden. In der That bedarf es einzig und allein der Feststellung des Begriffs der mit einander „conjugirten" Ausdrücke $x + u'x' + u''x'' + \cdots$, um die Norm und daraus den mit $\text{Fm}(x + u'x' + u''x'' + \cdots)$ bezeichneten Nenner des Divisors bilden zu können. Der Begriff der speciellen *Art* und damit auch der *Gattung* tritt aber von selbst auf, wenn man eine Anzahl ganzer algebraischer Grössen zusammen betrachtet, nämlich der Begriff derjenigen Art und Gattung niedrigster Ordnung, unter welcher dieselben enthalten sind, und in diesem Sinne ist mit dem Begriffe des grössten gemeinsamen Theilers von ganzen algebraischen Grössen $x, x', x'', \ldots$ auch der Begriff der Art gegeben, welche durch die Elemente $x, x', x'', \ldots$ bestimmt ist, sowie der Gattung, welcher die Art angehört.

Erst mit Festsetzung der Art oder eigentlich der Gattung, zu welcher die Art gehört, wird für einen algebraischen Divisor der Begriff der Irreductibilität bestimmbar, und dieser soll vorläufig in folgender Weise definirt werden, indem dabei — wie auch weiterhin — nur die *Haupt-Arten,* also diejenigen, welche *alle* ganzen Grössen einer Gattung umfassen, zu Grunde gelegt werden sollen.

I. Ein algebraischer Divisor ist „irreductibel“ oder „prim“ (Primmodul, Primtheiler, Primdivisor), wenn er durch keinen anderen „eigentlichen“ Divisor der festgesetzten Art oder Gattung theilbar ist, d. h. also, wenn er nur durch solche Divisoren der Art theilbar ist, die ihm selbst oder der Eins äquivalent sind.

Ich hebe ausdrücklich hervor, dass bei dieser Erklärung nur der Begriff der Theilbarkeit der Divisoren (nach § 15, VII), nicht der ihrer Zerlegbarkeit, d. h. ihrer Darstellbarkeit als Product von anderen Divisoren zur Anwendung kommt. Doch genügt diese beschränkte Definition zur Herleitung eines zweiten Fundamentalsatzes der Divisoren-Theorie, mit Hülfe dessen alsdann die Definition der Irreductibilität vervollständigt werden soll.

II. Algebraische Divisoren, welche dieselben Elemente haben, sind absolut äquivalent im Sinne der in § 15, VIII gegebenen Definition.

Um den Satz allgemein zu beweisen, genügt es offenbar, den Fall zu behandeln, wo einer der beiden Divisoren aus einer linearen Form hervorgegangen ist. Dass jeder andere algebraische Divisor durch einen solchen theilbar ist, folgt unmittelbar daraus, dass nach § 14 und § 16, I jedes einzelne Element eines Divisors, welcher aus einer Linearform gebildet ist, denselben als Theiler enthält. Es ist also nur noch andererseits der Nachweis zu führen, dass $x+u'x'+u''x''+\cdots$ durch $\mathrm{mod}[\varphi x+\varphi' x'+\varphi'' x''+\cdots]$ theilbar ist, wenn $x, x', x'', \ldots,$ wie oben, ganze algebraische Grössen und $\varphi, \varphi', \varphi'', \ldots$ die verschiedenen Producte von Potenzen irgend welcher unbestimmten Grössen $v, w, \ldots$ bedeuten.

Gemäss der unter No. I gegebenen Definition der Irreductibilität und auf Grund des in § 16, V aufgestellten Satzes kann ein Product ganzer algebraischer Grössen einer bestimmten Gattung $\mathfrak{G}$ nur dann durch einen irreductibeln aus einer Linearform gebildeten Divisor theilbar sein, wenn einer der Factoren des Products durch denselben theilbar ist. Dieser Satz gilt ebenso für ganze algebraische *Formen* mit beliebig vielen Unbestimmten; denn wenn man denselben für den Fall von $m-1$ Unbestimmten als erwiesen voraussetzt und beide Factoren des Products nach steigenden Potenzen der m^{ten} Unbestimmten u entwickelt denkt, so ist aus der Annahme, dass in dem einen Factor nur die ersten h Coefficienten, in dem anderen nur die ersten k Coefficienten durch einen irreductibeln Divisor theilbar seien, unmittelbar zu erschliessen, dass in dem Product der beiden Factoren der Coefficient von u^{h+k} den irreductibeln Divisor nicht enthalten kann, da ja

dieser Coefficient — nur in Bezug auf die Theilbarkeit durch den Divisor betrachtet — sich auf das Product der beiden Coefficienten von u^h in dem einen, und von u^k in dem anderen Factor, die beide als nicht theilbar angenommen worden, reducirt. — Bedeutet nun $\mathfrak{G}$ irgend eine Gattung, unter welcher alle conjugirten algebraischen Formen $x+u'x'+u''x''+\cdots$ enthalten sind, und $\mathfrak{D}$ einen im Sinne dieser Gattung irreductibeln, aus einer Linearform gebildeten algebraischen Divisor von $\mathrm{Nm}(\varphi x+\varphi' x'+\varphi'' x''+\cdots)$, d. h. also einen Divisor desjenigen Theilers dieser Norm, welcher von den in $\varphi, \varphi', \varphi'', \ldots$ enthaltenen Unbestimmten $v, w, \ldots$ unabhängig ist, so muss nach jenem eben bewiesenen Satze einer der conjugirten des Ausdrucks $\varphi x+\varphi' x'+\varphi'' x''+\cdots$ durch $\mathfrak{D}$ theilbar sein, und es muss daher dieser Ausdruck $\varphi x+\varphi' x'+\varphi'' x''+\cdots$ selbst einen der conjugirten des Divisors $\mathfrak{D}$ als Theiler enthalten. Dividirt man demnach $\varphi x+\varphi' x'+\varphi'' x''+\cdots$ durch den bezüglichen Divisor, so erhält man als Quotienten wiederum eine ganze algebraische Form der Gattung $\mathfrak{G}$, und diese Divisionen sind so lange fortzusetzen, bis der Quotient eine primitive Form wird. Durch ein solches Verfahren erhält man also den Ausdruck $\varphi x+\varphi' x'+\varphi'' x''+\cdots$, von welchem ausgegangen wurde, als ein Product von irreductibeln, aus Linearformen hervorgegangenen algebraischen Divisoren und einer primitiven Form der Gattung $\mathfrak{G}$ dargestellt, und es wird daher, wenn man das Product der irreductibeln Divisoren nach der Multiplications-Regel (§ 16, IV) zu einem einzigen, aus einer Linearform gebildeten, algebraischen Divisor der Gattung $\mathfrak{G}$, $\mathrm{mod}[\mathfrak{u}\mathfrak{x}+\mathfrak{u}'\mathfrak{x}'+\mathfrak{u}''\mathfrak{x}''+\cdots]$, vereinigt:

$$(A)\qquad \varphi x+\varphi' x'+\varphi'' x''+\cdots = \mathrm{mod}[\mathfrak{u}\mathfrak{x}+\mathfrak{u}'\mathfrak{x}'+\mathfrak{u}''\mathfrak{x}''+\cdots]\,.\,\mathfrak{F}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}', \ldots v, w, \ldots),$$

wo $\mathfrak{F}$ eine primitive Form ist. Nur der *zweite* Factor rechts enthält die Unbestimmten $v, w, \ldots$ und ist daher eine lineare homogene Function der verschiedenen Producte von Potenzen derselben, welche mit $\varphi, \varphi', \varphi'', \ldots$ bezeichnet sind. Die Gleichung (A) repräsentirt daher lauter Gleichungen

$$(A')\qquad x^{(k)} = \mathrm{mod}[\mathfrak{u}\mathfrak{x}+\mathfrak{u}'\mathfrak{x}'+\mathfrak{u}''\mathfrak{x}''+\cdots]\,.\,\mathfrak{F}^{(k)}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}', \ldots) \qquad (k=0,1,2,\ldots),$$

in welchen $\mathfrak{F}^{(k)}$ ganze algebraische Formen der Gattung $\mathfrak{G}$ mit den Unbestimmten $\mathfrak{u}, \mathfrak{u}', \ldots$ sind, oder lauter Congruenzen

$$x^{(k)} \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}[\mathfrak{u}\mathfrak{x}+\mathfrak{u}'\mathfrak{x}'+\mathfrak{u}''\mathfrak{x}''+\cdots]) \qquad (k=0,1,2,\ldots).$$

Sind $u', u'', \ldots$ neue Unbestimmte, so besteht also die Congruenz

$$x+u'x'+u''x''+\cdots \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}[\mathfrak{u}\mathfrak{x}+\mathfrak{u}'\mathfrak{x}'+\mathfrak{u}''\mathfrak{x}''+\cdots]),$$

welche, verbunden mit der Gleichung (A) zeigt, dass

$$(x+u'x'+u''x''+\cdots).\mathfrak{F}(\mathrm{u}, \mathrm{u}', \ldots v, w, \ldots)$$

durch $\varphi x+\varphi' x'+\varphi'' x''+\cdots$, also auch durch den mit $\operatorname{mod}[\varphi x+\varphi' x'+\varphi'' x''+\cdots]$ zu bezeichnenden allgemeineren algebraischen Divisor theilbar ist, und da $\mathfrak{F}$ eine *primitive* Form ist, so folgt aus jenem in § 15, IX aufgestellten ersten Fundamentaltheorem, dass in der That die Congruenz

$$x+u'x'+u''x''+\cdots \equiv 0 \quad (\operatorname{mod}[\varphi x+\varphi' x'+\varphi'' x''+\cdots])$$

und also die Aequivalenz

$$\operatorname{mod}[x+u'x'+u''x''+\cdots] \sim \operatorname{mod}[\varphi x+\varphi' x'+\varphi'' x''+\cdots]$$

besteht, welche den Inhalt des zu beweisenden zweiten Fundamentaltheorems bildet.

Da *jeder* algebraische Divisor, wie eben nachgewiesen worden, einem solchen äquivalent ist, der aus einer Linearform entsteht, so braucht man keine anderen als diese besonderen Divisoren anzuwenden. Der zweite Fundamentalsatz zeigt, dass, wenn man sich auf das Gebiet dieser besonderen Divisoren beschränken will, man auch bei der *Division* innerhalb desselben bleiben kann. Denn wenn ein Divisor $\operatorname{mod}[z+w'z'+w''z''+\cdots]$ durch einen anderen, $\operatorname{mod}[y+v'y'+v''y''+\cdots]$, theilbar sein soll, so muss nach der Definition (§ 15, VI) der Quotient, abgesehen vom Nenner des ersten Moduls, eine ganze algebraische Form sein, und der aus einer solchen gebildete Divisor ist eben stets einem Linearform-Divisor äquivalent. Um aber diesen entscheidenden Punkt noch genauer darzulegen, sei

$$\operatorname{Nm}(y+v'y'+v''y''+\cdots) = Q.\operatorname{Fm}(y+v'y'+v''y''+\cdots).$$

Wenn nun der Modul mit den Elementen z durch den Modul mit den Elementen y theilbar sein soll, so muss nach der Definition (§ 15, V und VI) der Ausdruck

$$(B) \qquad \frac{z+w'z'+w''z''+\cdots}{y+v'y'+v''y''+\cdots}.\operatorname{Fm}(y+v'y'+v''y''+\cdots)$$

oder der damit übereinstimmende Ausdruck

$$(B') \qquad \frac{1}{Q}(z+w'z'+w''z''+\cdots).\frac{\operatorname{Nm}(y+v'y'+v''y''+\cdots)}{y+v'y'+v''y''+\cdots}$$

eine ganze algebraische Form sein. In dieser letzteren Gestalt (B') ist es evident, dass der Ausdruck *ganz* in Bezug auf die Unbestimmten v, w ist. Denkt man sich denselben nach den verschiedenen Producten von Potenzen der Unbestimmten v, w entwickelt und bezeichnet alle diese verschiedenen

Producte der Einfachheit halber mit φ, φ', φ'', ..., so nimmt der Ausdruck die Gestalt an

$$\varphi x + \varphi' x' + \varphi'' x'' + \cdots,$$

und die Coefficienten der von einander linear unabhängigen Functionen φ, φ', φ'', ..., welche mit x, x', x'', ... bezeichnet sind, müssen nach der Voraussetzung *ganze* algebraische Grössen sein. Die Congruenz

$$(C) \qquad z + w'z' + w''z'' + \cdots \equiv 0 \quad (\operatorname{mod}[y + v'y' + v''y'' + \cdots]),$$

welche die Voraussetzung der Theilbarkeit des einen Divisors durch den anderen enthält, hat also eine Gleichung

$$(\bar{C}) \quad (\varphi x + \varphi' x' + \varphi'' x'' + \cdots) . \operatorname{mod}[y + v'y' + v''y'' + \cdots] = z + w'z' + w''z'' + \cdots$$

zur Folge, und aus dieser Gleichung soll nun die Aequivalenz (D)

$$\operatorname{mod}[x + u'x' + u''x'' + \cdots] . \operatorname{mod}[y + v'y' + v''y'' + \cdots] \sim \operatorname{mod}[z + w'z' + w''z'' + \cdots]$$

abgeleitet werden. Dass der Divisor auf der rechten Seite durch das Product der beiden Divisoren links theilbar ist, folgt aus der ersten Grundeigenschaft der Divisoren. Denn da jedes Element x durch $\operatorname{mod}[x + u'x' + u''x'' + \cdots]$ theilbar ist (vgl. § 16, I), so muss das Product auf der linken Seite der Gleichung $(\bar{C})$ und also auch $z + w'z' + w''z'' + \cdots$ durch das Product auf der linken Seite der Aequivalenz (D) theilbar sein. Damit aber auch andererseits das Product der beiden Divisoren auf der linken Seite der Aequivalenz (D) durch den Divisor auf der rechten theilbar sei, ist nothwendig und hinreichend, dass

$$(x + u'x' + u''x'' + \cdots)(y + v'y' + v''y'' + \cdots) . \operatorname{Fm}(z + w'z' + w''z'' + \cdots)$$

durch $z + w'z' + w''z'' + \cdots$, oder also, mit Rücksicht auf die Gleichung $(\bar{C})$, durch

$$(\varphi x + \varphi' x' + \varphi'' x'' + \cdots) . \operatorname{mod}[y + v'y' + v''y'' + \cdots]$$

theilbar sei. Es ist also nachzuweisen, dass der Ausdruck

$$\frac{x + u'x' + u''x'' + \cdots}{\varphi x + \varphi' x' + \varphi'' x'' + \cdots} \cdot \operatorname{Fm}(y + v'y' + v''y'' + \cdots) . \operatorname{Fm}(z + w'z' + w''z'' + \cdots)$$

ganz, d. h. eine ganze algebraische Form ist. Bezeichnet man diesen Ausdruck mit Φ und setzt

$$\frac{\operatorname{Nm}(z + w'z' + w''z'' + \cdots)}{\operatorname{Fm}(z + w'z' + w''z'' + \cdots)} = R,$$

so wird mit Hülfe der Gleichung $(\bar{C})$

$$\Phi R = G,$$

wo G die ganze algebraische Form

$$(x+u'x'+u''x''+\cdots)(y+v'y'+v''y''+\cdots)\cdot\frac{\operatorname{Nm}(z+w'z'+w''z''+\cdots)}{z+w'z'+w''z''+\cdots}$$

bedeutet. Da nun nach dem obigen zweiten Fundamentalsatz die Congruenz

$$x+u'x'+u''x''+\cdots\equiv 0 \quad (\operatorname{mod}[\varphi x+\varphi' x'+\varphi'' x''+\cdots])$$

besteht, also $\Phi.\operatorname{Fm}(\varphi x+\varphi' x'+\varphi'' x''+\cdots)$ oder

$$\frac{G}{R}\operatorname{Fm}(\varphi x+\varphi' x'+\varphi'' x''+\cdots)$$

eine ganze algebraische Form ist, so folgt aus dem ersten Fundamentalsatz (§ 15, IX), dass G selbst durch R theilbar sein muss, und dass daher Φ in der That eine ganze algebraische Form ist. Hiermit ist also der Nachweis geführt, dass aus der Congruenz (C) die Aequivalenz (D) hervorgeht, dass also, wenn ein algebraischer Divisor durch einen anderen theilbar ist, auch der Quotient wieder als ein eben solcher, aus einer Linearform gebildeter Divisor dargestellt werden kann.

Nunmehr kann auch an Stelle der obigen Irreductibilitäts-Definition (I) die folgende gesetzt werden:

I'. Ein algebraischer Divisor ist irreductibel oder prim, wenn er nicht einem Product algebraischer Divisoren der festgesetzten Gattung äquivalent ist.

Ferner kann als ein Corollar des obigen zweiten Fundamentaltheorems der Satz aufgestellt werden:

II'. Jedes Element eines beliebigen allgemeinen algebraischen Divisors ist durch denselben theilbar,

durch welchen jene erste Grundeigenschaft der in § 14 eingeführten besonderen Divisoren auf die allgemeineren ausgedehnt wird.

§ 18.

Die Zerlegung der algebraischen Divisoren in irreductible Factoren.

Zur vollen Begründung der in No. I des vorigen Paragraphen gegebenen Irreductibilitäts-Erklärung fehlt noch der Nachweis, dass es stets möglich ist, bei einem gegebenen algebraischen Divisor zu ermitteln, ob derselbe die Bedingungen der Irreductibilität erfüllt oder nicht. Es wird nun zwar später in § 25 noch gezeigt werden, wie die irreductibeln Divisoren

einer gegebenen algebraischen Grösse mit Hülfe weiterer Entwickelungen der Theorie direct aufzustellen sind, aber es erscheint doch angemessen, darzulegen, wie diese nothwendige Ergänzung der im vorigen Paragraphen enthaltenen Grundlagen der Theorie auch gleich Anfangs, wenn auch in einer weniger einfachen und eleganten Weise, erfolgen kann. Die Aufstellung der irreductibeln Divisoren braucht nur für die Haupt-Art, d. h. also für die Gattung zu erfolgen.

Um alle irreductibeln Divisoren einer gegebenen algebraischen Grösse aufzufinden, braucht man offenbar nur diejenigen zu suchen, die in ihrer Norm enthalten sind. Es genügt daher zu zeigen, wie die sämmtlichen irreductibeln Divisoren einer irreductibeln, ganzen rationalen Grösse des Bereichs $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ zu bestimmen sind*). Für den Fall $\mathfrak{R} = 1$ ist dies eine Primzahl p, und man hat alsdann zuvörderst alle ganzen algebraischen Zahlen der Gattung aufzustellen, bei denen die Coefficienten der Elemente des Fundamentalsystems nicht negativ und kleiner als p sind. Hierauf denke man sich, wenn x alle jene algebraischen Zahlen repräsentirt, die sämmtlichen Divisoren $\operatorname{div}[x + up]$, und von denjenigen, die nicht äquivalent Eins sind, alle grössten gemeinsamen Theiler gebildet. Die Reihe dieser Divisoren enthält dann alle, durch welche p theilbar ist, und wenn man aus derselben diejenigen weglässt, welche äquivalent Eins sind, sowie diejenigen, welche andere Divisoren der Reihe als Theiler enthalten, so bleiben *alle verschiedenen algebraischen Primdivisoren von p* übrig: Denn sie genügen den hierfür aufgestellten Kriterien, nämlich durch keinen anderen Divisor — der ja ebenfalls ein Divisor von p sein müsste — theilbar und nicht äquivalent Eins zu sein. — Für den Fall von Variabeln $\mathfrak{R}$ erfolgt, im Anschluss an das so eben für $\mathfrak{R} = 1$ auseinandergesetzte Verfahren, die Bestimmung der irreductibeln Divisoren einer beliebigen irreductibeln, ganzen rationalen Grösse des Bereichs ganz analog, wie in § 6 die Bestimmung der Elemente eines Fundamentalsystems gegeben worden ist.

Dividirt man einen aus einer Linearform gebildeten algebraischen Divisor der Gattung $\mathfrak{G}$ durch einen der in ihm enthaltenen algebraischen Divisoren, so ist der Quotient gemäss den am Ende des vorigen Paragraphen

---

*) Es ist kaum nöthig zu bemerken, dass der Ausdruck „Irreductibilität" sich bei „irreductibeln, ganzen, *rationalen* Grössen des Bereichs $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$, wie schon in § 1 hervorgehoben worden, auf diesen Bereich selbst bezieht, dass also solche Grössen keine ganzen rationalen, wohl aber *algebraische* Divisoren haben können.

gegebenen Entwickelungen wieder ein solcher algebraischer Divisor; ***man gelangt daher durch fortgesetzte Division zur vollständigen Zerlegung eines algebraischen Divisors der Gattung* 𝔊 *in seine irreductibeln Divisoren, und diese ist auf Grund des Satzes* § 16, V *eine völlig bestimmte.*** Es ist also im Besonderen auch jede irreductible ganze rationale Grösse des Bereichs als ein Product irreductibler algebraischer Divisoren der Gattung 𝔊 darstellbar, und zwar kommt darin dann und nur dann wenigstens einer der Primdivisoren mehrfach vor, wenn jene ganze rationale Grösse ein Theiler der Discriminante der Gattung ist (vgl. § 25). Die ***verschiedenen*** irreductibeln algebraischen Divisoren einer und derselben irreductibeln ganzen rationalen Grösse des Bereichs sollen ***„verbundene algebraische Divisoren“*** oder ***„Factoren“*** (divisores conjuncti)*) genannt werden, während nach der bereits oben (S. 50) getroffenen Festsetzung zwei algebraische Divisoren ***„conjugirte“*** (divisores conjugati) heissen, wenn die Elemente des einen die (im gewöhnlichen Sinne) conjugirten des anderen sind. Das Product der verschiedenen, verbundenen Divisoren eines irreductibeln, ganzen rationalen Factors P der Discriminante der Gattung hat — da ein solcher Factor P, wie eben erwähnt, mindestens einen der verbundenen Divisoren mehrfach enthält — die Eigenschaft, dass es, zu einer gewissen Potenz erhoben, durch jene ganze rationale Grösse des Bereichs, welche mit P bezeichnet ist, theilbar wird. — Die Norm eines irreductibeln algebraischen Divisors ist der Potenz einer irreductibeln ganzen (rationalen) Grösse des Bereichs $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ äquivalent; der Exponent dieser Potenz soll die „Ordnung“ des irreductibeln Divisors bezeichnen. Für eine Gattung n^{ter} Ordnung ist daher die Summe der Ordnungen sämmtlicher verbundener irreductibler Divisoren einer irreductibeln ganzen rationalen Grösse gleich n, wenn diese nicht Theiler der Discriminante ist und also keinen der verbundenen algebraischen Divisoren mehrfach enthält.

---

*) Da der Ausdruck „conjugirt“ bereits seine bestimmte Bedeutung hat, musste für den neu auftretenden Begriff eine davon verschiedene Bezeichnung gewählt werden, und ich habe dafür in dem nächstverwandten und auch von *Gauss* bei den Grössen $a+bi$ angewendeten Ausdruck „numeri conjuncti“ eine geeignete Bezeichnung zu finden geglaubt. Dass bei *diesen* Grössen, wie auch bei den aus Wurzeln der Einheit gebildeten Zahlen, im Lateinischen der Ausdruck „numeri conjuncti“, im Deutschen und Französischen das Wort „conjugirt“ gebraucht wird, konnte keinen Gegengrund für jene Einführung bilden, weil in diesen Fällen — wie überhaupt in allen Fällen, wo die Gattung keine conjugirten hat und also eine *Galois*sche Gattung ist, — die beiden unterschiedenen Begriffe selbst sich decken.

Im Falle $\mathfrak{R} = 1$ lässt sich für jeden algebraischen Divisor der Gattung $\mathfrak{G}$ und der Art $\mathfrak{S}$ ein System solcher Zahlen aufstellen, die ein vollständiges Restsystem bilden. Die Anzahl der verschiedenen Zahlen dieses Systems ist der Norm des Divisors gleich oder äquivalent. Dies folgt, wenn es keine zu $\mathfrak{G}$ conjugirten Gattungen giebt, d. h. wenn $\mathfrak{G}$ eine *Galois*sche Gattung ist, unmittelbar daraus, dass erstens die Anzahl der Elemente eines Restsystems für ein Product von Divisoren stets gleich dem Producte der Zahlen ist, welche die Anzahl der Elemente für die einzelnen Divisoren bezeichnen, dass zweitens die Anzahl der Elemente für conjugirte Divisoren dieselbe ist, und dass drittens die Anzahl der Elemente eines Restsystems für einen Divisor m, wenn m eine gewöhnliche Zahl bedeutet, offenbar gleich m^n ist, da das Restsystem alsdann aus allen denjenigen Zahlen besteht, welche man erhält, wenn man den n Coefficienten der Elemente eines Fundamentalsystems alle modulo m incongruenten Werthe beilegt. Der allgemeine Satz über die Anzahl der Elemente eines Restsystems für eine *beliebige* Gattung lässt sich aus dem für eine *Galois*sche Gattung herleiten; er kann aber auch direct auf die besondere Art und Weise gegründet werden, wie sich für die Primdivisoren die Restsysteme aufstellen lassen. Mittels eben jenes Verfahrens, welches zur Aufstellung eines Fundamentalsystems einer Art und Gattung führt, lässt sich nämlich das Restsystem für einen Primdivisor h^{ter} Ordnung, dessen Norm p^h ist, so aufstellen, dass alle Zahlen nur lineare Functionen von h Elementen des Fundamentalsystems sind, und hieraus folgt dann, dass die Anzahl dieser in Bezug auf den Primdivisor incongruenten Zahlen genau p^h ist.

§ 19.

Die ganzen algebraischen Zahlen und ihre Divisoren. Das *Kummer*sche Princip der Aequivalenz.

Die in § 14 eingeführten, aus Linearformen gebildeten algebraischen Divisoren, deren Eigenschaften in den darauf folgenden Paragraphen entwickelt worden sind, genügen für den einfachsten Fall $\mathfrak{R} = 1$ vollkommen, um die Theorie der aus dem Rationalitäts-Bereich hervorgehenden algebraischen Grössen, d. h. also die Theorie der *algebraischen Zahlen* zu erledigen. Man braucht nur noch jene Aequivalenz-Bestimmung, welche Herr *Kummer* für seine idealen Divisoren aufgestellt hat, auf diese *wirklichen* algebraischen Divisoren zu übertragen, um auch die Theorie der einzelnen besonderen

eine Gleichung

$$(A)\qquad F(u,v,w,\ldots).G(u,v,w,\ldots) = X.H(u,v,w,\ldots)$$

bestehen, in welcher X eine ganze algebraische Grösse und F, G, H ganze algebraische Formen bedeuten, von denen die erste primitiv ist. Mit u, v, w, ... sind die Unbestimmten der Formen bezeichnet. Aus der Gleichung (A) geht unmittelbar die folgende hervor:

$$(B)\qquad \mathrm{Nm}\left(z-\frac{G(u,v,w,\ldots)}{X}\right) = \mathrm{Nm}\left(z-\frac{H(u,v,w,\ldots)}{F(u,v,w,\ldots)}\right),$$

in welcher das Zeichen Nm, wie oben, das über alle conjugirten algebraischen Grössen und Formen erstreckte Product andeutet. Wird dieser Gleichung (B) die Gestalt gegeben

$$(C)\qquad \begin{aligned} &\mathrm{Nm}\,F(u,v,w,\ldots).\mathrm{Nm}(zX-G(u,v,w,\ldots)) \\ &= \mathrm{Nm}\,X.\mathrm{Nm}(zF(u,v,w,\ldots)-H(u,v,w,\ldots)), \end{aligned}$$

so sieht man, dass sie genau die oben erwähnten Voraussetzungen des zu beweisenden Satzes für den Fall rationaler Formen und Grössen enthält; denn an die Stelle der in der Gleichung (A) vorkommenden Formen und Grössen

$$F,\qquad G,\qquad X,\qquad H$$

sind in der Gleichung (C) die Ausdrücke

$$\mathrm{Nm}\,F,\quad \mathrm{Nm}(zX-G),\quad \mathrm{Nm}\,X,\quad \mathrm{Nm}(zF-H)$$

getreten, von denen der erste eine primitive ganze rationale Form mit den Unbestimmten u, v, w, ..., der zweite und vierte eine ganze rationale Form mit den Unbestimmten z, u, v, w, ... und der dritte eine ganze rationale Grösse des Bereichs darstellt. Mit Hülfe der Entwickelungen in § 4 ist daher aus der Gleichung (C) zu erschliessen, dass der zweite Factor auf der linken Seite durch den ersten Factor auf der rechten theilbar, also die linke Seite der Gleichung (B) *ganz* sein muss. Die Gleichung für z:

$$\mathrm{Nm}\left(z-\frac{G(u,v,w,\ldots)}{X}\right) = 0$$

ist somit eine solche, deren Coefficienten sämmtlich algebraisch ganz sind, und es ist also

$$\frac{G(u,v,w,\ldots)}{X}$$

algebraisch ganz, oder, der Behauptung des Satzes gemäss, $G(u,v,w,\ldots)$ durch X theilbar. — Wird nun endlich an Stelle der ganzen algebraischen

Grösse X ein Divisor, $\mathrm{mod}[\varphi x + \varphi' x' + \varphi'' x'' + \cdots]$, genommen, in welchem $x, x', x'', \ldots$ ganze algebraische Grössen und $\varphi, \varphi', \varphi'', \ldots$ die verschiedenen Producte von Potenzen unbestimmter Grössen $\mathfrak{v}, \mathfrak{w}, \ldots$ bedeuten, so folgt aus der darnach modificirten Gleichung (A) die Relation

$$(A') \qquad FG\Phi = PH,$$

in welcher Φ und P durch die Gleichung

$$(\varphi x + \varphi' x' + \varphi'' x'' + \cdots)\Phi = P.\mathrm{Fm}(\varphi x + \varphi' x' + \varphi'' x'' + \cdots)$$

erklärt und zur Vereinfachung die Unbestimmten der verschiedenen Formen weggelassen sind. Die Gleichung (A') geht in (A) über, wenn G an Stelle von $G\Phi$ und X an Stelle von P gesetzt wird. Aus der obigen Entwickelung folgt daher, dass die Congruenz

$$G\Phi \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod.}\, P)$$

bestehen muss, dass also, da

$$P = \Phi.\mathrm{mod}[\varphi x + \varphi' x' + \varphi'' x'' + \cdots]$$

ist, G in der That, wie im obigen Satze behauptet worden, durch den mit $\mathrm{mod}[\varphi x + \varphi' x' + \varphi'' x'' + \cdots]$ bezeichneten Divisor theilbar sein muss.

§ 16.

Die algebraischen Divisoren, welche aus Linearformen gebildet sind.

Jeder der allgemeineren Divisoren ist, wie nachher gezeigt werden wird, einem aus Linearformen gebildeten Divisor absolut äquivalent. Es genügt desshalb, die Eigenschaften dieser besonderen Divisoren darzulegen, welche in § 14 zuerst eingeführt worden sind, und es ist nothwendig, die Entwickelung damit zu beginnen, weil bei jenem Nachweise der Aequivalenz mit den allgemeineren Divisoren davon Gebrauch zu machen ist.

Die aus Linearformen entstandenen Divisoren haben, wie bereits in § 14 gezeigt worden ist, die Haupteigenschaft, dass *jede* Linearform durch einen Divisor theilbar ist, dessen Elemente die Coefficienten der Linearform bilden. Dies ist nach den in § 15 aufgestellten Definitionen in den Satz zu fassen:

I. Divisoren, welche dieselben Elemente haben, sind einander absolut äquivalent.

Hierbei sind, wie überhaupt zunächst, unter den Divisoren nur solche zu verstehen, die aus Linearformen hervorgehen. Mit der Begriffsbestimmung dieser besonderen Divisoren sind folgende Eigenschaften unmittelbar gegeben.

an *Eisenstein**), als ein „*Associiren*" bezeichnet werden. Da alle nur durch Einheiten von einander verschiedenen ganzen algebraischen Zahlen, als Divisoren, einander „absolut äquivalent" sind, so kann jede associirte Zahl durch eine ihr absolut äquivalente ersetzt werden. Ferner sind bei Uebertragung der oben eingeführten Begriffsbestimmung zwei associirte Zahlen als relativ äquivalent zu bezeichnen, sobald sie sich nur durch Factoren von einander unterscheiden, welche Zahlen der Gattung $\mathfrak{G}$ sind. Wenn sich nun zunächst als zu associirende Zahlen gewisse Wurzeln aus ganzen algebraischen Zahlen der Gattung $\mathfrak{G}$ darbieten, so ist doch dabei zu beachten, dass diese — wenn *alle* Divisoren damit dargestellt werden sollen — nicht in einer Gattung zusammengefasst werden können. Es tritt daher die Frage auf, ob es dennoch eine bestimmte Gattung Γ giebt, welche zur Darstellung aller Divisoren genügt. Ist dies der Fall, so müssen sich alle jene Wurzeln aus unendlich vielen ganzen algebraischen Zahlen der Gattung $\mathfrak{G}$ durch Zahlen der Gattung Γ, multiplicirt mit Einheiten, darstellen lassen; diese Gattung Γ muss also, in *naturgemässer* Weise der Gattung $\mathfrak{G}$ associirt, den vollständigsten Aufschluss über alle Theilbarkeits-Fragen derselben geben. Aber nicht um das für die Behandlung der complexen Zahlen geeignetste *Mittel* zu erlangen**) — denn ich habe die in § 14 eingeführte Darstellung der Divisoren, welche einer anderen Art von Association ihre Entstehung verdankt, von Anfang an als ein durchaus naturgemässes, äusserst werthvolles Mittel angesehen — sondern weil es mir von vorn herein als ein erstrebenswerthes höchstes *Ziel* der Theorie der algebraischen Zahlen erschien, habe ich mich bemüht, die Frage der *zu associirenden Gattungen* zu ergründen. Auf die Wichtigkeit dieser Frage bin ich schon bei meiner ersten Beschäftigung mit den singulären Moduln der elliptischen Functionen aufmerksam geworden, und dieselbe fand sich alsdann bei der Erledigung der analogen Frage für algebraische Functionen einer Variabeln durch die *Weierstrass*sche transcendente Darstellung der Primfunctionen bestätigt. Die Auffindung aller derjenigen Resultate in der Theorie der allgemeinen complexen Zahlen, welche in der Theorie der aus quadratischen Gleichungen entstehenden Zahlen oder also

*) Vergl. *Crelles* Journal Bd. 28 S. 318. Der Association der Formen, im Sinne *Eisensteins*, entspricht, nach der hier eingeführten Terminologie, in der Theorie einer bestimmten Species algebraischer Zahlen genau die Association algebraischer Divisoren.

**) Vergl. Herrn *Dedekinds* Aufsatz „Sur la théorie des nombres entiers algébriques" im Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques, 2[me] série, t. I, 1 p. 83. S. 50 der Separatausgabe.

in der Theorie der binären quadratischen Formen ihr vollkommenes Analogon haben, bot — sobald einmal die unzerlegbaren Divisoren in genügender Weise begrifflich fixirt und definirt waren — keinerlei Schwierigkeiten dar, da die von *Gauss* aufgestellten Principien mit Benutzung der *Dirichlet*schen Methoden dazu vollständig ausreichten, und ich habe schon im Jahre 1858 in einer Arbeit über die allgemeinen complexen Zahlen eben jene Resultate entwickelt*). Nur für die Frage der Association der Gattungen gab es in früheren Untersuchungen nichts Analoges; es war ein ganz neues, überraschendes und interessantes Phänomen, als mir bei der Beschäftigung mit der complexen Multiplication der elliptischen Functionen (im Winter 1856) Gattungen algebraischer Zahlen vor die Augen traten, welche in der angegebenen Weise mit den Gattungen von Quadratwurzeln negativer ganzer Zahlen associirt sind. Eine solche der Gattung $\sqrt{-n}$ associirte Gattung Γ liefert, wie ich schon in einer im Monatsbericht vom October 1857 abgedruckten Mittheilung hervorgehoben habe, die sämmtlichen, nach der *Kummer*schen Bezeichnung, idealen Divisoren der Gattung $\sqrt{-n}$; ihre Ordnung ist gleich der Classenanzahl für die Gattung $\sqrt{-n}$, und es haben überhaupt alle tieferen, auf die Composition und Classeneintheilung bezüglichen Eigenschaften der Gattung $\sqrt{-n}$ in den elementaren Eigenschaften der associirten Gattung Γ, so zu sagen, ihr Abbild. Durch dieses Beispiel belehrt, glaubte ich meine Arbeiten über die complexen Zahlen nicht eher veröffentlichen zu sollen, als bis ich denselben durch Erledigung jener Frage den eigentlichen Abschluss zu geben vermöchte, und ich habe eben darum auch die im *Kummer*schen Citat erwähnte Publication damals zurückgehalten. Aber ich habe mich nunmehr auf Grund anderweitiger Erwägungen (vergl. die Einleitung) um so eher dazu entschlossen, meine Methode der Behandlung der algebraischen Grössen und Zahlen hier zu entwickeln, als ich neuerdings, d. h. im Anfang des vorigen Jahres, zur aprioristischen Erkenntniss,

---

*) Auf die erwähnte Arbeit bezieht sich die Stelle in der *Kummer*schen Abhandlung über die allgemeinen Reciprocitätsgesetze: „*Ich kann in Betreff dieser, so wie überhaupt der allgemeinen Sätze, welche allen Theorieen complexer Zahlen gemein sind, auch auf eine Arbeit von Herrn Kronecker verweisen, welche nächstens erscheinen wird, in welcher die Theorie der allgemeinsten complexen Zahlen, in ihrer Verbindung mit der Theorie der zerlegbaren Formen aller Grade, vollständig und in grossartiger Einfachheit entwickelt ist*“. (Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1859 S. 57). Ich hatte dieselbe Arbeit schon im Sommer 1858 *Dirichlet*, bei einer zu diesem Zwecke verabredeten Zusammenkunft in Ilsenburg, vorgelegt und deren Resultate näher erläutert.

nämlich zu einer von der analytischen Entstehung unabhängigen Auffassung der Natur jener den Gattungen $\sqrt{-n}$ associirten Gattungen gelangt bin und damit Gesichtspunkte für das Studium der allgemeinen Frage dieser Art der Association gewonnen habe.

Das *Kummer*sche Princip der Aequivalenz oder Classeneintheilung für die idealen Zahlen, welches im Anfange dieses Paragraphen erwähnt worden, ist für die Theorie der algebraischen Zahlen und in seiner weiteren Ausbildung auch für die allgemeine arithmetische Theorie der algebraischen Grössen von fundamentaler Bedeutung. Freilich lag es schon als Grundgedanke in der *Gauss*schen Theorie der Composition der quadratischen Formen verborgen; aber eben diesen Gedankenkern aus der formalen Umhüllung, mit welcher ihn *Gauss* umgeben hatte, herausgelöst und den etwas umständlichen Apparat mittels einer neuen Begriffsbestimmung entbehrlich gemacht zu haben, ist, was *Kummers* Einführung der idealen Zahlen den grossen und dauernden Werth verleiht. Die *Kummer*sche, dem ursprünglichen abstracten Begriffe idealer Theiler adäquate *Ausdrucksweise* passt freilich nicht für jene wirklichen Divisoren, sei es, dass sie in der Form von Brüchen, sei es, dass sie als associirte ganze Zahlen, sei es, dass sie, wie in § 22, als associirte Formen erscheinen, aber die Idee des Idealen bleibt in der Anwendung des *Kummerschen Aequivalenz-Princips* für die — wie immer — definirten Divisoren erhalten. Dieses Princip der Aequivalenz oder der Classeneintheilung bildet den ganzen eigentlichen und neuen Inhalt der Theorie der idealen Zahlen. Als *Divisoren* hatte ich schon vorher in meiner Doctordissertation, sowie in allgemeineren oben erwähnten Untersuchungen, ideale Zahlen in der Form als wirkliche gebrochene Zahlen angewendet, und zwar, wie schon oben erwähnt, genau so, wie sie bei der *Kummer*schen Definition gebraucht werden*); aber die Idee, derartige

---

*) Vgl. die *Kummer*sche Abhandlung im 35. Bande des *Crelle*schen Journals S. 342. Die Theilbarkeit einer complexen Zahl $f(\alpha)$ durch einen Primfactor von q ist daselbst mit Hülfe einer complexen Zahl $\psi(\eta)$, deren Norm die Primzahl q nur in der ersten Potenz als Factor enthält, durch die Congruenz

$$f(\alpha)\,\Psi(\eta) \equiv 0 \pmod{q}, \quad \text{wo} \quad \Psi(\eta) = \frac{N\psi(\eta)}{\psi(\eta)} \text{ ist,}$$

definirt. Als *Divisor* ist der so definirte ideale Primfactor von q nichts Anderes als der Bruch $\frac{q}{\Psi(\eta)}$, und dieser geht in den Bruch $\frac{p}{\varphi(\varepsilon)}$ über, welcher in § 6 meiner Doctordissertation als Modul eingeführt ist, wenn p an die Stelle von q gesetzt und die Periode mit ε, statt mit η, bezeichnet wird.

Divisoren nun auch selbständig zu betrachten und eine Begriffsbestimmung der Aequivalenz daran zu knüpfen, lag von der Auffassung der Divisoren als solcher weit ab. Ich meinerseits habe bei meinen Arbeiten über complexe Zahlen in den Jahren 1843 bis 1846 zu einer solchen Erkenntniss nicht durchzudringen vermocht. Als ich dann später in den Jahren 1856 und 1857 durch das Studium der complexen Multiplication der elliptischen Functionen veranlasst wurde, auf meine früheren Untersuchungen über complexe aus Wurzeln beliebiger ganzzahliger Gleichungen $F(x) = 0$ gebildete Zahlen zurückzukommen, konnte ich mich auf das bereits seit einem Jahrzehnt bekannte *Kummer*sche Princip stützen und bediente mich bei dessen Anwendung zuerst jenes in § 25 für allgemeine algebraische Grössen dargelegten Mittels der Zerlegung der *Congruenz* $F(x) \equiv 0$ für die verschiedenen Primzahlmoduln zur Erklärung der Theilbarkeit durch einen idealen Primfactor oder Divisor. Die Darstellung der Divisoren mit Hülfe von Linearformen benutzte ich nur zum Uebergang von den „idealen" Zahlen zu den zerlegbaren Formen. Die Schwierigkeit, welche die ausserwesentlichen Primfactoren der Discriminante — die ich wegen dieses unregelmässigen Verhaltens damals als „irregulär" bezeichnete — bei der Zerlegung der Congruenz $F(x) \equiv 0$ darboten, suchte ich Anfangs dadurch zu beseitigen, dass ich andere Gleichungen derselben Gattung zu Grunde legte. Bald aber nahm ich zu jenem „methodischen Hülfsmittel der unbestimmten Coefficienten" meine Zuflucht und legte, um jegliche Zufälligkeit der besonderen Wahl einer Gleichung auszuschliessen, eine „Fundamentalgleichung" (vgl. § 25), d. h. eine solche Gleichung zu Grunde, deren n Wurzeln lineare Functionen unbestimmter Grössen $u_1, u_2, \ldots u_n$ sind, und welche alle ganzzahligen Gleichungen der Gattung repräsentirt, sobald man sich für $u_1, u_2, \ldots u_n$ alle möglichen ganzen Zahlen gesetzt denkt.

So bildete die Aufstellung der „Fundamentalgleichungen" den ursprünglichen Zweck einer Untersuchung, welche in ihrem Verlauf den richtigen *Ausgangspunkt* der Theorie, die wahre allgemeine Form der complexen Zahlen zeigte und zugleich auf die Methode führte, durch Association von linearen Formen und Divisoren die *Ziele* der Theorie *„vollständig"* und *„auf die einfachste Weise"* zu erreichen (vgl. § 22).

Zur Begründung der Definition der relativen Aequivalenz gehört noch die Angabe eines Verfahrens, mittels dessen entschieden werden kann, ob zwei gegebene Divisoren äquivalent sind oder nicht. Die Frage der rela-

tiven Aequivalenz ist aber unmittelbar auf die Frage zurückzuführen, ob eine gegebene Zahl sich als Norm einer complexen Zahl darstellen lässt, und diese ist nach Ermittelung der Einheiten durch Discussion einer endlichen Anzahl von Normen complexer Zahlen zu erledigen.

§ 20.

Einführung von Divisoren-Systemen verschiedener Stufen.

Die in § 14 bis § 17 enthaltenen Entwickelungen zeigen, dass auch für Gattungs-Bereiche $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$, d. h. auch wenn zwischen den Grössen $\mathfrak{R}$ algebraische Beziehungen statthaben, der grösste gemeinschaftliche Theiler je zweier ganzen rationalen Grössen des Bereichs, also jeder nothwendige Divisor — ohne irgend welche Verallgemeinerung des Begriffes der Division und ohne irgend welche Uebertragung seiner eigentlichen Bedeutung — in Wirklichkeit dargestellt werden kann. Der Uebergang aus der Sphäre der ganzen *rationalen* Zahlen oder der ganzen *rationalen* Functionen von Variabeln in die Sphäre der ganzen *algebraischen* Grössen einer Gattung macht eben keine Erweiterung des Begriffes der Division erforderlich. Wohl aber zeigt sich eine solche Erweiterung als geboten, sobald man von den Bereichen, in denen keine Variable $\mathfrak{R}$ vorhanden ist, zu solchen mit Variabeln $\mathfrak{R}$, oder, falls von den Zahlen abgesehen wird, von Bereichen, wo nur eine Variable $\mathfrak{R}$ vorhanden ist, zu solchen mit zwei oder mehr Variabeln $\mathfrak{R}$ übergeht, während auch hier wieder der Schritt von den rationalen zu den algebraischen Grössen keinerlei neue Einführung nothwendig macht. *Diese Erhaltung der Begriffsbestimmungen beim Uebergang vom Rationalen zum Algebraischen* war die Forderung, welche mir von vorn herein als leitendes Princip bei der Behandlung der algebraischen Grössen gedient hat.

Ganze rationale Functionen mehrerer Variabeln können, wenn sie zu Systemen von zwei oder mehreren Functionen zusammengefasst werden, zwar auch noch einen allen gemeinsamen Theiler haben, aber sie können überdies *„Gemeinsames“* haben, welches sich, wenn sämmtliche Functionen gleich Null gesetzt werden, als ein Gebilde von gewisser Ausdehnung oder als eine Zusammenfassung, ein „Complex“ mehrerer algebraischer Gebilde verschiedener Ausdehnung charakterisiren lässt. Dieses „Gemeinsame“ kann mit Hülfe der allgemeinen Eliminations-Theorie auch als eine Eigenschaft der Functionen selbst definirt werden, d. h. ohne die Werthsysteme der

Variabeln, wofür die Functionen gleichzeitig verschwinden, und die sich daran knüpfende Anschauungsweise zu benutzen, ohne also denjenigen „*arithmetischen*“ Boden zu verlassen, der für alle Rationalitäts-Bereiche $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$, wenn die Grössen $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots$ nicht als veränderliche sondern als unbestimmte und in ihrer Unbestimmtheit zu erhaltende Grössen aufgefasst werden, derselbe ist, wie für den der gewöhnlichen rationalen Zahlen. Das Studium des einer beliebigen Anzahl von ganzen Functionen mehrerer Variabeln „Gemeinsamen“ war es, wodurch ich im Jahre 1865 zu einer erneuten Behandlung der Eliminations-Theorie geführt worden bin, und es hat sich dabei jene „Interpolationsformel für ganze Functionen mehrerer Variabeln*)“ ergeben, welche die Bedeutung dessen, was als einer Anzahl von Functionen gemeinsam zu betrachten ist, in klares Licht treten liess. Die *Lagrange*sche Interpolationsformel war bis dahin nur in der, so zu sagen, trivialen Weise verallgemeinert worden, dass eine ganze Function von *mehreren* Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ aufgestellt wurde, welche vorgeschriebene Werthe annimmt, wenn der Variabeln x_1 einer der ν_1 Werthe beigelegt wird, für welche $F_1(x_1) = 0$ wird, der Variabeln x_2 einer der ν_2 Werthe, für welche $F_2(x_2) = 0$ wird, u. s. f. Aber bei dieser Weise der Verallgemeinerung zeigte sich weder irgend welche Schwierigkeit noch auch irgend welche Besonderheit; erst beim Wegfall der Beschränkung, die darin liegt, dass jede der Functionen F nur *eine* der Variabeln enthält, gewann die Frage an Interesse und die Lösung an Bedeutung. Soll nämlich eine ganze Function von $x_1, x_2, \ldots x_n$ gebildet werden, welche für die m durch die n Gleichungen

$$F_i(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0 \qquad (i=1, 2, \ldots n)$$

definirten Werthsysteme

$$x_1 = \xi_{1k}, \quad x_2 = \xi_{2k}, \quad \ldots \quad x_n = \xi_{nk} \qquad (k=1, 2, \ldots m)$$

m vorgeschriebene Werthe annimmt, so bedarf man dazu — genau wie im Falle, wo $n = 1$ ist — nur der Lösung der Aufgabe unter der speciellen Voraussetzung, dass $m-1$ der vorgeschriebenen Werthe Null sind. Eine ganze Function von $x_1, x_2, \ldots x_n$, welche für die $m-1$ Werthsysteme

$$x_1 = \xi_{1k}, \quad x_2 = \xi_{2k}, \quad \ldots \quad x_n = \xi_{nk} \qquad (k=2, 3, \ldots m)$$

verschwindet, repräsentirt aber offenbar eine Verallgemeinerung des im Falle $n = 1$ aus der Division von $F_1(x_1)$ durch $x_1 - \xi_1$ hervorgehenden Resultats;

*) Vgl. meine Mittheilung im Monatsbericht der Akademie der Wissenschaften vom December 1865.

mit der Herstellung einer solchen Function war daher diejenige Erweiterung des Begriffes der Division gegeben, welche beim Uebergang von ganzen Functionen einer Variabeln zu Functionen mehrerer Variabeln erfordert wird. Denkt man sich die Functionen F_i als ganze homogene lineare Functionen von $x_1 - \xi_{1k}, x_2 - \xi_{2k}, \ldots$ dargestellt, so dass

$$F_i = (x_1 - \xi_{1k}) F_{1i}^{(k)} + (x_2 - \xi_{2k}) F_{2i}^{(k)} + \cdots + (x_n - \xi_{nk}) F_{ni}^{(k)}$$

wird, so sind $F_{1i}^{(k)}, F_{2i}^{(k)}, \ldots$ ganze Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ und $\xi_{1k}, \xi_{2k}, \ldots \xi_{nk}$. Die Determinante

$$|F_{hi}^{(1)}| \qquad (h, i = 1, 2, \ldots n)$$

ist dann eine ganze Function von $x_1, x_2, \ldots x_n$ und $\xi_{11}, \xi_{21}, \ldots \xi_{n1}$, welche für die $m-1$ Werthsysteme

$$x_1 = \xi_{1k}, \quad x_2 = \xi_{2k}, \quad \ldots \quad x_n = \xi_{nk} \qquad (k = 2, 3, \ldots m)$$

verschwindet und daher unmittelbar zur Herstellung einer allgemeinen Interpolationsformel verwendet werden kann. Eben diese Determinante hat nun offenbar die Eigenschaft, dass sie, mit einem der Ausdrücke $x_i - \xi_{ik}$ multiplicirt, eine homogene lineare Function von $F_1, F_2, \ldots F_n$ ergiebt; an Stelle der Theilbarkeit durch eine ganze Function $F(x)$ — im Falle einer Variabeln — tritt also für den Fall von mehreren Variabeln ***die Darstellbarkeit als homogene lineare Function von mehreren ganzen Functionen*** $F(x_1, x_2, \ldots x_n)$. Bei der Analogie mit der einfachen Division erscheint es wohl gerechtfertigt, zur Abkürzung der Ausdrucksweise, wie ich es in meinen Universitäts-Vorlesungen öfters gethan habe, das System der Elemente $F_1, F_2, \ldots F_n$ in Bezug auf die daraus gebildeten homogenen linearen Functionen als ein

Divisoren-System oder ***Modulsystem*** n^{ter} ***Stufe*** $(F_1, F_2, \ldots F_n)$

zu bezeichnen und der Congruenz

$$G(x_1, x_2, \ldots x_n) \equiv 0 \quad (\text{modd.} F_1, F_2, \ldots F_n)$$

die Bedeutung beizulegen, dass die ganze Function $G(x_1, x_2, \ldots x_n)$ sich als ganze homogene lineare Function von $F_1, F_2, \ldots F_n$ darstellen lässt, in welcher die Coefficienten ebenfalls ganze Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ sind. Jene Congruenz bezeichnet also das Bestehen einer Gleichung

$$G(x_1, x_2, \ldots x_n) = \sum_{h=1}^{h=n} P_h(x_1, x_2, \ldots x_n) F_h(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

in welcher $P_1, P_2, \ldots P_n$ ganze Functionen der n Variabeln x bedeuten. Zwei Modulsysteme sind als „äquivalent" zu betrachten, wenn jede Function

des einen mit Beziehung auf das andere congruent Null ist. Die Aequivalenz

$$(F_1, F_2, \dots F_n) \sim (\Phi_1, \Phi_2, \dots \Phi_n)$$

ist demnach durch das System von Congruenzen

$$F_k \equiv 0 \ (\text{modd.}\ \Phi_1, \Phi_2, \dots \Phi_n), \quad \Phi_k \equiv 0 \ (\text{modd.}\ F_1, F_2, \dots F_n) \qquad (k=1,2,\dots n)$$

definirt. Wird die Voraussetzung festgehalten, welche meinen Entwickelungen in der erwähnten Mittheilung vom Dec. 1865 zu Grunde liegt, nämlich dass die Discriminante des Gleichungssystems $F_1 = 0,\ F_2 = 0,\ \dots\ F_n = 0$ von Null verschieden ist, so ist nicht bloss das System der Gleichungen

$$G(\xi_{1k}, \xi_{2k}, \dots \xi_{nk}) = 0 \qquad (k=1,2,\dots m)$$

eine *Folge* der Congruenz

$$G(x_1, x_2, \dots x_n) \equiv 0 \quad (\text{modd.}\ F_1, F_2, \dots F_n),$$

sondern es geht auch umgekehrt diese Congruenz aus jenem System von Gleichungen hervor. Dies beruht darauf, dass sich die Resultante von $n+1$ ganzen Functionen von n Variabeln als ganze homogene lineare Function der $n+1$ Functionen darstellen lässt. Denkt man sich nämlich die $n+1$ Functionen $F_0, F_1, \dots F_n$ als *vollständige* ganze Functionen von $x_1, x_2, \dots x_n$, d. h. als vollständige Ausdrücke der Dimensionen $\nu_0, \nu_1, \dots \nu_n$ mit unbestimmten Coefficienten $c^{(0)}, c^{(1)}, \dots c^{(n)}$, so ist die Resultante eine ganze ganzzahlige Function aller dieser Coefficienten c, welche verschwindet, sobald die Coefficienten c irgend welche Werthe erhalten, wofür die $n+1$ Functionen F gleichzeitig Null werden können. Ersetzt man nun in der Resultante die Coefficienten $c^{(k)}_{000\dots}$, welche die von $x_1, x_2, \dots x_n$ unabhängigen Glieder der Functionen F_k bilden, durch die Differenzen $c^{(k)}_{000\dots} - F_k$, so werden die n Gleichungen $F = 0$ identisch erfüllt, und es ist daher auch die Resultante *identisch* gleich Null. Entwickelt man dieselbe nunmehr nach $F_1, F_2, \dots F_n$, so gelangt man zu dem oben bezeichneten Satze, dass sich die Resultante ganzer Functionen als homogene lineare Function derselben darstellen lässt, und zwar so, dass die Coefficienten ganze Functionen von $x_1, x_2, \dots x_n$ sind. Setzt man $F_0 = x - (u_1 x_1 + u_2 x_2 + \dots + u_n x_n)$, so wird die Resultante eine ganze Function von x. Wenn diese mit $F(x)$ bezeichnet wird, so ist also

$$F(u_1 x_1 + u_2 x_2 + \dots + u_n x_n) \equiv 0 \quad (\text{modd.}\ F_1, F_2, \dots F_n),$$

und die *Gleichung*

$$F(u_1 x_1 + u_2 x_2 + \dots + u_n x_n) = 0$$

stellt die Resolvente des Gleichungssystems

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad . \; . \; . \quad F_n = 0$$

dar. Wenn man die Resultante der allgemeinen $n+1$ Functionen $F_0, F_1, \ldots F_n$, nachdem darin wie oben die Coefficienten $c^{(k)}_{000\ldots}$ durch die Differenzen $c^{(k)}_{000\ldots} - F_k$ ersetzt worden, nach einem beliebigen Coefficienten $c^{(i)}_{h_1, h_2, \ldots h_n}$, welcher mit $x_1^{h_1} x_2^{h_2} \ldots x_n^{h_n}$ multiplicirt ist, differentiirt, so erhält man eine identische Gleichung

$$-R' x_1^{h_1} x_2^{h_2} \ldots x_n^{h_n} + \overline{R} \;=\; 0,$$

in welcher R' die partielle Ableitung der Resultante nach $c^{(i)}_{000\ldots}$ und $\overline{R}$ die partielle Ableitung nach $c^{(i)}_{h_1, h_2, \ldots h_n}$ bedeutet. Dabei sind aber immer noch in R' und $\overline{R}$ an Stelle der Coefficienten $c^{(k)}_{000\ldots}$, und zwar für alle n Werthe $k = 1, 2, \ldots n$, die Differenzen $c^{(k)}_{000\ldots} - F_k$ zu denken. Lässt man nunmehr diese Differenzen wieder in die Coefficienten $c^{(k)}_{000\ldots}$ selbst übergehen, so geht jene Gleichung offenbar in eine Congruenz für das Modulsystem $(F_0, F_1, \ldots F_n)$ über, und für den obigen Fall $F_0 = x - (u_1 x_1 + u_2 x_2 + \cdots + u_n x_n)$ resultirt daher eine Congruenz

$$P x_1^{h_1} x_2^{h_2} \ldots x_n^{h_n} \equiv Q \quad (\text{modd.}\, F_1, F_2, \ldots F_n),$$

in welcher P und Q ganze Functionen von $u_1 x_1 + u_2 x + \cdots + u_n x_n$ bedeuten. Wenn endlich $P_1(x)$ so bestimmt wird, dass für jede Wurzel der Gleichung $F(x) = 0$

$$P(x) P_1(x) \;=\; 1$$

wird, so ist

$$P(x) P_1(x) \equiv 1 \quad (\text{modd.}\, F_1, F_2, \ldots F_n),$$

also

$$x_1^{h_1} x_2^{h_2} \ldots x_n^{h_n} \equiv P_1(x) Q(x) \quad (\text{modd.}\, F_1, F_2, \ldots F_n),$$

und es geht hieraus hervor, *dass jede ganze Function von $x_1, x_2, \ldots x_n$ für das Modulsystem $(F_1, F_2, \ldots F_n)$ einer ganzen Function der einen linearen Verbindung $u_1 x_1 + u_2 x_2 + \cdots + u_n x_n$ congruent wird, und dass sich hierdurch jede Congruenz für dieses Modulsystem in eine solche für den einfachen Modul $F(x)$ verwandeln lässt.*

Die vorstehende Entwickelung, bei welcher *allgemeine* Functionen $F_1, F_2, \ldots F_n$ zu Grunde gelegt worden, gilt auch noch für alle speciellen Functionen, sobald nur die Discriminante von Null verschieden ist; denn in diesem Falle ist R' nicht mit der Resultante zugleich Null und also $P(x)$

nicht congruent Null modd. $F_1, F_2, \dots F_n$. Unter der Voraussetzung, dass die oben mit $F(x) = 0$ bezeichnete Resolvente des Gleichungssystems

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \dots \quad F_n = 0$$

nicht gleiche Factoren enthält, kann also die Zerlegung der ganzen Function einer Variabeln $F(x)$ unmittelbar auf die „Zerlegung des Divisoren-Systems $(F_1, F_2, \dots F_n)$“ übertragen werden, wenn man die einzelnen den verschiedenen Factoren der Resolvente entsprechenden Gleichungssysteme bildet. Sobald eines dieser Gleichungssysteme mehr als n Gleichungen erfordert*), braucht man nur n lineare Verbindungen mit unbestimmten Coefficienten einzuführen, um zu erschliessen, dass die ganze Function von x, welche — gleich Null gesetzt — die Resolvente bildet, congruent Null für ein Modulsystem ist, dessen (mehr als n) Elemente — gleich Null gesetzt — jene Gleichungen bilden. Ist nämlich $F(x) = \Phi(x)\Psi(x)$, ist ferner

$\Phi(x) = 0$ die Resolvente des Gleichungssystems $\Phi_1 = 0, \ \Phi_2 = 0, \ \dots \ \Phi_r = 0$,
$\Psi(x) = 0$ die Resolvente des Gleichungssystems $\Psi_1 = 0, \ \Psi_2 = 0, \ \dots \ \Psi_r = 0$,

ist endlich $V(x, v_1, v_2, \dots) = 0$ die Resolvente von n Gleichungen

$$v_1\Phi_1 + v_2\Phi_2 + \dots + v_r\Phi_r = 0, \quad v_1'\Phi_1 + v_2'\Phi_2 + \dots + v_r'\Phi_r = 0, \quad \dots,$$

und ebenso $W(x, w_1, w_2, \dots) = 0$ die Resolvente von n Gleichungen

$$w_1\Psi_1 + w_2\Psi_2 + \dots + w_r\Psi_r = 0, \quad w_1'\Psi_1 + w_2'\Psi_2 + \dots + w_r'\Psi_r = 0, \quad \dots,$$

so ist $\Phi(x)$ der grösste von den unbestimmten Grössen v unabhängige Theiler von $V(x, v_1, v_2, \dots)$ und $\Psi(x)$ der grösste von den unbestimmten Grössen w unabhängige Theiler von $W(x, w_1, w_2, \dots)$. Ferner ist gemäss den obigen Darlegungen $V(x, v_1, v_2, \dots)$ congruent Null für das Modulsystem

$$(v_1\Phi_1 + v_2\Phi_2 + \dots + v_r\Phi_r, \quad v_1'\Phi_1 + v_2'\Phi_2 + \dots + v_r'\Phi_r, \quad \dots)$$

also auch

$$V(x, v_1, v_2, \dots) \equiv 0 \quad (\text{modd.}\ \Phi_1, \Phi_2, \dots \Phi_r);$$

endlich ist, wenn die verschiedenen Coefficienten der Glieder $v_1^{h_1} v_2^{h_2} \dots$ in $V(x, v_1, v_2, \dots)$ mit $\Phi(x)P_1(x)$, $\Phi(x)P_2(x)$, ... bezeichnet werden,

$$\Phi(x)P_1(x) \equiv 0, \quad \Phi(x)P_2(x) \equiv 0, \quad \dots \quad (\text{modd.}\ \Phi_1, \Phi_2, \dots \Phi_r)$$

und daher, weil der Voraussetzung nach nicht alle Functionen $P(x)$ einen und denselben gemeinsamen Theiler haben und desshalb Functionen $Q(x)$ existiren, für welche

*) Dass $n+1$ stets genügen, ist oben in § 10 nachgewiesen worden.

$$P_1(x)Q_1(x)+P_2(x)Q_2(x)+\cdots=1$$

wird,

$$\Phi(x)\equiv 0 \quad (\text{modd.}\, \Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_r),$$

und ebenso

$$\Psi(x)\equiv 0 \quad (\text{modd.}\, \Psi_1, \Psi_2, \ldots \Psi_r).$$

Das Gleichungssystem

$$\Phi_i \Psi_k = 0 \qquad (i, k=1, 2, \ldots r),$$

welches aus r^2 Gleichungen besteht, wird offenbar nur erfüllt, wenn eines oder das andere der beiden Gleichungssysteme

$$\Phi_k = 0 \quad \text{oder} \quad \Psi_k = 0 \qquad (k=1, 2, \ldots r)$$

erfüllt wird, d. h. also, wenn die Resolvente $\Phi=0$ oder $\Psi=0$ befriedigt wird. Die Functionen Φ und Ψ haben aber der Voraussetzung nach keinen gemeinsamen Theiler, da $F(x)$ oder $\Phi(x)\Psi(x)$ keine gleichen Factoren enthält; es muss daher $\Phi\Psi=0$ oder $F=0$ die Resolvente des Gleichungssystems

$$\Phi_i \Psi_k = 0 \qquad (i, k=1, 2, \ldots r)$$

sein, ebenso wie diejenige des Gleichungssystems

$$F_k = 0 \qquad (k=1, 2, \ldots r),$$

und die beiden Modulsysteme

$$(\Phi_i \Psi_k) \quad \text{und} \quad (F_k) \qquad (i, k=1, 2, \ldots r)$$

sind demnach einander äquivalent. Hieraus geht als Regel für die Composition zweier Modulsysteme hervor, dass man die einzelnen Elemente des einen Systems mit je einem Elemente des anderen Systems zu multipliciren hat, um die sämmtlichen Elemente des componirten Systems zu erhalten.

Immer unter der Voraussetzung, dass die Discriminante von Null verschieden ist, muss der vorstehenden Darlegung gemäss das Modulsystem $(F_1, F_2, \ldots F_n)$ in ebensoviel „Factoren" zerlegbar sein wie die Function $F(x)$. Es gilt daher auch für Functionen mehrerer Variabeln der Satz, dass eine ganze Function $G(x_1, x_2, \ldots x_n)$, wenn sie für irgend ein Werthsystem zugleich mit den n ganzen Functionen $F_1, F_2, \ldots F_n$ verschwindet, nothwendig für das Modulsystem $(F_1, F_2, \ldots F_n)$ congruent Null sein muss, falls dieses irreductibel ist.

§ 21.

Die Eigenschaften der Divisoren-Systeme.

Die im vorigen Paragraphen aus der Eliminations-Theorie entwickelten Begriffsbestimmungen beruhen einzig und allein darauf, dass auch bei der Betrachtung homogener linearer Functionen *mehrerer* Elemente ganz ebenso von den Coefficienten abstrahirt wird, wie dies im Falle eines einzigen Elements durch die Construction des Congruenzbegriffes erfolgt und durch die *Gauss*sche Bezeichnungsweise zum Ausdruck gebracht ist. Wenn man nun diese Begriffsbestimmungen in die allgemeine Sphäre eines *beliebigen* Rationalitäts-Bereichs $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ überträgt, so gelangt man zu folgenden Definitionen, welche der arithmetischen Behandlung der ganzen rationalen Functionen von $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$, $\mathfrak{R}'''$, $\ldots$, d. h. also der ganzen rationalen Grössen eines beliebigen Bereichs zu Grunde zu legen sind, um eine erschöpfende Darlegung alles dessen geben zu können, was einer beliebigen Anzahl solcher Grössen M_1, M_2, M_3, $\ldots$ gemeinsam ist und also dem, im Falle $\mathfrak{R} = 1$, allein vorhandenen, grössten gemeinschaftlichen Theiler einer beliebigen Reihe ganzer Zahlen m_1, m_2, m_3, $\ldots$ entspricht.

I. Jede homogene lineare ganze Function von M_1, M_2, M_3, $\ldots$ mit ganzen, dem Bereich $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ angehörigen Coefficienten wird als „das Modulsystem $(M_1, M_2, M_3, \ldots)$ enthaltend" oder auch als „congruent Null für dieses Modulsystem" bezeichnet, und es ist

$$M \equiv M' \quad (\text{modd.}\, M_1, M_2, M_3, \ldots),$$

wenn die Differenz $M - M'$ das Modulsystem $(M_1, M_2, M_3, \ldots)$ enthält. Bei der vollkommenen Analogie mit dem einfachen Falle, wo die Anzahl der Elemente des Systems gleich Eins ist, erscheint es auch unbedenklich, wie schon oben, die Bezeichnung „Divisoren-System" an Stelle von „Modulsystem" zu gebrauchen, welche jener Analogie unmittelbareren Ausdruck giebt.

II. Ein Modulsystem $(M_1, M_2, \ldots)$ enthält ein anderes $(M'_1, M'_2, \ldots)$, wenn jedes Element des ersteren das Modulsystem $(M'_1, M'_2, \ldots)$ enthält. Wenn jedes der beiden Modulsysteme das andere enthält, so sind sie einander äquivalent, und dies wird durch: $(M_1, M_2, \ldots) \sim (M'_1, M'_2, \ldots)$ bezeichnet.

III. Jede ein Modulsystem $(M_1, M_2, \ldots)$ enthaltende Grösse kann dessen Elementen hinzugefügt werden, und es kann ebenso jedes Element eines Modulsystems weggelassen werden, welches für das durch die übrigen gebildete Modulsystem congruent Null ist; d. h. bei den angegebenen Veränderungen wird

das Modulsystem nur in ein äquivalentes transformirt. Wenn daher die Zahl Eins für ein Modulsystem $(M_1, M_2, \ldots)$ congruent Null ist, so ist dieses äquivalent Eins und also überhaupt kein Modulsystem im eigentlichen Sinne des Wortes.

IV. Das zwei Modulsystemen $(M_1, M_2, \ldots)$, $(M'_1, M'_2, \ldots)$ gemeinsame, d. h. in beiden zugleich enthaltene Modulsystem wird durch die Elemente beider gebildet, ist also durch das System $(M_1, M_2, \ldots, M'_1, M'_2, \ldots)$ repräsentirt, da offenbar *jedes* in den beiden ersten zugleich enthaltene Modulsystem auch in diesem dritten enthalten ist.

V. Ein Modulsystem $(M_1, M_2, \ldots)$, dessen einzelne Elemente durch die verschiedenen Producte von je zwei Elementen $M'_h M''_k$ zweier Modulsysteme $(M'_1, M'_2, \ldots)$, $(M''_1, M''_2, \ldots)$ gebildet werden, heisst „aus diesen beiden Systemen zusammengesetzt oder componirt“, und diese beiden Systeme sollen, wegen der Analogie der Composition mit der Multiplication, auch als „Factoren“ bezeichnet werden.

Der Ausdruck „Composition“ soll ohne Weiteres auf äquivalente Systeme übertragen und demnach auch jedes dem System $(M'_h M''_k)$ äquivalente System als aus den beiden Systemen (M') und (M'') componirt bezeichnet werden, so dass die Elemente des componirten Systems als ***bilineare*** Functionen der beiderseitigen Elemente M', M'' mit ganzen dem Bereich angehörigen Coefficienten zu charakterisiren sind.

Ein Modulsystem $(M.M', M_1, M_2, \ldots)$ ist aus den beiden Systemen

$$(M, M_1, M_2, \ldots), \quad (M', M_1, M_2, \ldots)$$

zusammengesetzt, wenn das Modulsystem $(M, M') \sim 1$ ist, da dann stets je zwei bei der Composition entstehende Elemente $M_k M$, $M_k M'$ durch M_k zu ersetzen sind.

VI. Ein Modulsystem heisst irreductibel (oder ein Primmodulsystem), wenn es nicht aus zwei anderen zusammengesetzt ist, deren jedes ein Modulsystem im eigentlichen Sinne des Wortes ist.

VII. Enthalten die Grössen $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots$ nur genau $\mathfrak{n}-1$ von einander unabhängige variable oder unbestimmte Grössen $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots \mathfrak{R}^{(\mathfrak{n}-1)}$, so giebt es Modulsysteme erster, zweiter, ... $\mathfrak{n}^{\text{ter}}$ „*Stufe*“, und daher auch Modulsysteme, die aus solchen verschiedener Stufe zusammengesetzt sind. Die Modulsysteme $\mathfrak{m}^{\text{ter}}$ Stufe sind an sich $\mathfrak{m}$-faltige Systeme und können nicht aus weniger als $\mathfrak{m}$ Elementen gebildet werden.

Bei der Zerlegung eines Modulsystems in seine den verschiedenen Stufen angehörigen Factoren ist genau so wie bei der Elimination zu ver-

fahren, nur dass auch noch die Zahlengrössen zu beachten sind. Es ist zuerst der grösste gemeinsame Divisor (im engeren Sinne des § 14), also der Divisor erster Stufe, aus allen Elementen herauszuheben; aus den vom grössten gemeinsamen Theiler befreiten Elementen sind nunmehr zwei lineare Functionen mit unbestimmten Coefficienten U zu bilden, und alsdann ist für eine der Variabeln $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$, ... z. B. für $\mathfrak{R}^{(n-1)}$ eine lineare Function aller mit unbestimmten Coefficienten u einzuführen. Wird diese mit $\mathfrak{R}$ bezeichnet, so enthält die nach Elimination von $\mathfrak{R}^{(n-2)}$ aus jenen beiden linearen Functionen entstehende Resultante nur noch die $\mathfrak{n}-2$ Variabeln $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$, ... $\mathfrak{R}^{(n-3)}$. Von dieser Resultante ist der grösste von den Grössen U unabhängige Theiler, falls sie einen solchen hat, abzusondern, und es zerfällt alsdann das Modulsystem gemäss der unter No. V gegebenen Vorschrift — vorausgesetzt, dass die dort angegebene Bedingung erfüllt ist — in zwei Systeme, von denen das eine dem abgesonderten, das andere dem übrig gebliebenen Theiler der Resultante entspricht. Das erstere bildet das gesammte in dem ursprünglichen enthaltene Modulsystem zweiter Stufe, während das andere nur noch Modulsysteme höherer Stufen enthalten kann. Mit diesem ist alsdann ebenso zu verfahren. — Sind $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, ... die Elemente eines Modulsystems $\mathfrak{m}^{\text{ter}}$ Stufe, und zwar eines solchen, welchem auch keine Systeme höherer Stufen beigemischt sind, so ist die Resultante von $\mathfrak{m}$ linearen Verbindungen mit unbestimmten Coefficienten U eine ganze Function von $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$, ... $\mathfrak{R}^{(n-m-1)}$ und von den unbestimmten Grössen U, für den Fall $\mathfrak{m}=\mathfrak{n}$ also *nur* von diesen letzteren. Bezeichnet man nun den nach Absonderung des gesammten von den Grössen U unabhängigen Factors verbleibenden Theil der Resultante mit $\mathfrak{N}$, so bilden jene $\mathfrak{m}$ linearen Verbindungen der Elemente $\mathfrak{M}$, dividirt durch $\mathfrak{N}$, die $\mathfrak{m}$ Elemente eines Divisoren-Systems $\mathfrak{m}^{\text{ter}}$ Stufe, welches dem ursprünglichen aus beliebig vielen Elementen $\mathfrak{M}$ bestehenden System äquivalent ist. Dabei ist indessen vorausgesetzt, dass jener von der Resultante abgesonderte Factor aus lauter ungleichen Factoren besteht. Es ist ferner zu bemerken, dass die Resultante — falls noch algebraische Grössen $\mathfrak{R}$ vorhanden sind — immer mit Benutzung der bezüglichen Gleichung zu bilden ist.

Die angegebene Art, Modulsysteme $\mathfrak{m}^{\text{ter}}$ Stufe aus nur $\mathfrak{m}$ Elementen zu bilden, ist vollkommen analog jener Art, einfache Divisoren mit Hülfe linearer Functionen in Bruchform darzustellen. Sollen nur ganze rationale Grössen des Bereichs zu Elementen des Systems verwendet werden, so

genügt im Allgemeinen und zwar selbst bei natürlichen Rationalitäts-Bereichen nicht die der Stufenzahl gleiche Anzahl von Elementen, sondern es giebt auch Systeme, die mehr Elemente erfordern, ganz ähnlich wie es Gattungen algebraischer Grössen giebt, für welche die nothwendige Anzahl der Elemente des Fundamentalsystems die Ordnungszahl der Gattung übersteigt. Es erscheint daher angemessen, diejenigen irreductibeln Divisoren-Systeme, welche eine Darstellung durch eine der Stufenzahl gleiche Anzahl von Elementen gestatten, als zur „Hauptclasse" gehörig zu bezeichnen. Alsdann gehören offenbar, wenn unter den Grössen $\mathfrak{R}$ keine von den übrigen algebraisch abhängige vorkommen, alle irreductibeln Divisoren erster Stufe zur Hauptclasse. Wenn ferner die Anzahl der Grössen $\mathfrak{R}$ gleich Eins ist, wenn also die ganzen ganzzahligen Functionen *einer* unbestimmten Grösse $\mathfrak{R}'$ arithmetisch behandelt werden, so hat man noch Divisoren-Systeme zweiter Stufe zu betrachten, in denen eines der Elemente eine ganze Zahl, die übrigen aber ganze ganzzahlige Functionen von $\mathfrak{R}'$ sind. Diese Systeme sind also unmittelbar in solche zu zerlegen, bei denen die ganze Zahl die Potenz einer Primzahl p^m ist, und die übrigen Elemente sind hiernach nur im Sinne der Congruenz für den Modul p^m zu behandeln. Für $m = 1$ wird alsdann ein solches Divisoren-System zweiter Stufe nach der aus der Theorie der Congruenzen bekannten Weise als Product irreductibler Systeme von zwei Elementen $(F(\mathfrak{R}'), p)$ dargestellt, wo $F(\mathfrak{R}')$ eine ganze nach dem Modul p irreductible Function von $\mathfrak{R}'$ bedeutet. Diese Betrachtung zeigt die Theorie der höheren Congruenzen in einem neuen Lichte und bringt dieselbe mit ganz anderen zahlentheoretischen Gebieten in Verbindung. Es finden sich auch in dieser Theorie, sowohl in der von Herrn *Dedekind* aus *Gauss*' Nachlass publicirten Arbeit als in den *Schönemann*schen früher veröffentlichten Aufsätzen die ersten Andeutungen von Divisoren-Systemen zweiter Stufe, wenngleich nur unter beschränkterem Gesichtspunkte. Die naturgemässe und weitreichende Unterscheidung der Modulsysteme nach ihren verschiedenen Stufen, die Sonderung der in *Wahrheit* mehrfaltigen Divisoren-Systeme von denjenigen, die nur einfache Divisoren vertreten, konnte sich erst bei der arithmetischen Behandlung ganzer Functionen *mehrerer* Variabeln ergeben, und über diese ist bisher meines Wissens nichts bekannt gemacht worden. Wohl beruhen auch die *Dedekind*schen, nur den Fall $\mathfrak{R} = 1$ betreffenden Entwickelungen — nach der hier angenommenen Terminologie ausgedrückt — wesentlich auf der Betrachtung ganzer homogener linearer Functionen

mehrerer Elemente mit ganzen, dem Rationalitäts-Bereich angehörigen Coefficienten, also implicite auch auf der Betrachtung von „Divisoren-Systemen"; aber es sind dies — da bei algebraischen Zahlen überhaupt nur Divisoren erster Stufe vorhanden sind — doch nur solche, die die Stelle einfacher Divisoren vertreten. Ueberdies liegt grade darin, dass bei der *Dedekind*schen Auffassung die homogene lineare Function selbst, bei der meinigen aber das System der Elemente derselben als Divisoren-System den Ausgangspunkt bildet, noch eine gedankliche Verschiedenheit. In der That stellt Herr *Dedekind*, die Abweichung von der *Kummer*schen Auffassung selbst hervorhebend, den Inbegriff der durch einen idealen Divisor theilbaren wirklichen Zahlen an die Spitze der Entwickelung, während meine Begriffsbestimmungen von jeher, sowohl vor der Einführung der *Kummer*schen idealen Divisoren als nachher, in Uebereinstimmung mit der *Kummer*schen Gedankenrichtung auf die Erhaltung des Divisoren-Begriffes selbst zielten. Und dafür war gerade in den Elementen der homogenen linearen Functionen, wie sie bei der Behandlung von Functionen mehrerer Variabeln mit Nothwendigkeit an Stelle dessen auftraten, was der Divisor bei Functionen einer einzigen Variabeln ist, ein deutlicher Fingerzeig gegeben.

Divisoren-Systeme, welche die Stelle einfacher Divisoren vertreten, also nicht selbst Systeme höherer Stufe sind, können ebenso wie die gebrochenen Divisoren als Mittel der Untersuchung verwendet werden, aber die obige Zusammenfassung in Linearformen entspricht begrifflich und formal dem Zwecke am Besten. Die Beziehung der verschiedenen Darstellungsweisen der Divisoren lässt sich an den *Kummer*schen idealen Zahlen am Einfachsten erläutern. Sind nämlich nach den *Kummer*schen Bezeichnungen $\varphi(\alpha)$ und $\psi(\alpha)$ zwei äquivalente ideale Zahlen, die beide, mit derselben idealen Zahl $f(\alpha)$ multiplicirt, die wirklichen Zahlen $\Phi(\alpha)$ und $\Psi(\alpha)$ ergeben, und sind je zwei der drei idealen Zahlen ohne gemeinsamen Theiler, so kann offenbar der Bruch

$$\frac{\Phi(\alpha)}{\Psi(\alpha)} \quad \text{an Stelle des idealen Moduls} \quad \varphi(\alpha),$$

und das Divisoren-System

$$(\Phi(\alpha),\ \Psi(\alpha)) \quad \text{an Stelle des idealen Moduls} \quad f(\alpha)$$

verwendet werden. Dieses System von zwei Elementen ist aber nicht ein Modulsystem *zweiter Stufe,* da es nach der in § 14 dargelegten Weise, wenn

$$\mathrm{Nm}(u\Phi(\alpha)+v\Psi(\alpha)) = \mathrm{Nm} f(\alpha).F(u,v)$$

ist, durch den einfachen Divisor

$$\frac{u\,\Phi(\alpha)+v\,\Psi(\alpha)}{F(u,v)}$$

ersetzt werden kann. Indessen lässt sich doch auch ein Ursprung jenes Divisoren-Systems von zwei Elementen in einem eigentlichen Modulsystem zweiter Stufe nachweisen. Bezeichnet man nämlich mit $X(x)=0$ die irreductible Gleichung, welcher α genügt, so kommen in der arithmetischen Theorie der ganzen ganzzahligen Functionen von x Divisoren-Systeme zweiter Stufe mit in Betracht, in denen $X(x)$ eines der Elemente ist. Alle diese besonderen Systeme sind, von einem anderen Gesichtspunkte aus betrachtet, Gegenstand der Theorie der complexen aus α gebildeten Zahlen, und die Zerlegung dieser Systeme in ihre irreductibeln Factoren stimmt mit der Zerlegung der complexen Zahlen in ihre idealen Primfactoren vollkommen überein (vgl. § 25). Das Verhältniss der einzelnen Theorieen complexer Zahlen zu der arithmetischen Theorie der ganzen ganzzahligen Functionen einer Variabeln, in der sie sämmtlich inbegriffen sind, lässt sich — wie überhaupt die besondere Natur der Modulsysteme höherer Stufen — am Deutlichsten darlegen, wenn die oben mit $\mathfrak{n}-1$ bezeichnete Anzahl der unabhängigen Variabeln $\mathfrak{R}$ grösser als Eins genommen wird. Nimmt man z. B. $\mathfrak{n}=4$ und denkt sich die drei Variabeln $\mathfrak{R}$ als irgend welche Coordinaten des Raumes, so sind die Divisoren erster Stufe entweder Zahlen oder ganze Functionen der Coordinaten, deren Verschwinden also Flächen repräsentirt. Unter den Divisoren-Systemen zweiter Stufe kommen hier solche vor, bei denen überhaupt nicht die sämmtlichen Elemente gleichzeitig verschwinden können und eines der Elemente als eine Zahl gewählt werden kann, aber auch solche, bei denen das gleichzeitige Verschwinden sämmtlicher Elemente eine Curve repräsentirt; unter den Modulsystemen dritter Stufe sind solche, die in ähnlicher Weise Punktsysteme darstellen. In die Hauptclasse jener Divisoren-Systeme zweiter Stufe gehören dann diejenigen Curven, welche den vollständigen Durchschnitt von zwei Flächen bilden, und man findet hierbei in überraschender Weise einen höheren Gesichtspunkt, von welchem aus die Frage der Darstellung ganzer Zahlen als Normen complexer Zahlen mit der Frage der isolirten Darstellung geometrischer Gebilde in der unmittelbarsten Beziehung erscheint. Endlich zeigt sich die Analogie jenes oben berührten Verhältnisses der arithmetischen Theorie der ganzen ganzzahligen Functionen einer Variabeln zu den einzelnen Theorieen complexer Zahlen für den Fall

$\mathfrak{n} = 4$ z. B. in dem Verhältnisse der analytischen Geometrie des Raumes zu den einzelnen „Geometrieen" auf besonderen algebraischen Flächen.

Die vorstehenden Entwickelungen enthalten nur die Einführung, keineswegs aber eine erschöpfende Behandlung der Modulsysteme höherer Stufen. So ist oben die Zerlegung solcher Modulsysteme nicht ganz allgemein sondern nur unter gewissen Einschränkungen erfolgt, deren Beseitigung vorbehalten bleiben muss. Die Erläuterung der hierbei auftretenden Fragen lässt sich schon an den einfachsten Fall der Divisoren-Systeme zweiter Stufe für den Fall einer einzigen Variabeln $\mathfrak{R}'$ anknüpfen, und es bietet sich dabei zugleich die Möglichkeit, die Besonderheiten der Divisoren-Systeme höherer Stufen im Vergleich mit den einfachen Divisoren principiell darzulegen. Setzt man die Variable x an Stelle von $\mathfrak{R}'$, so kommen in der Theorie der ganzen ganzzahligen Functionen von x die Divisoren-Systeme zweiter Stufe

$$(x, p), \quad (x^2, px, p^2), \quad (x^2+p, p^2), \quad (x, pq)$$

vor, wo p und q zwei verschiedene ungerade Primzahlen bedeuten sollen. Die drei letzten Modulsysteme enthalten offenbar das erste, und das zweite und vierte lässt sich auch als das Product je zweier Factoren darstellen, von denen der eine (x, p) ist; denn es ist in der That

$$(x^2, px, p^2) \sim (x, p)^2, \quad (x, pq) \sim (x, p)(x, q),$$

da $(x^2, px, qx, pq) \sim (x, pq)$ wird. Aber das dritte Modulsystem (x^2+p, p^2) ist, obgleich das erste im Sinne der oben gegebenen Definition „enthaltend", doch zugleich der bezüglichen oben entwickelten Begriffsbestimmung nach unzerlegbar; es enthält also das erste System nicht in der Weise, wie eine gewöhnliche Zahl einen ihrer Divisoren enthält, sondern etwa in der Weise, wie ein Gattungs-Bereich höherer Ordnung einen von niederer Ordnung enthält. Dieses von den Gesetzen der gewöhnlichen Theilbarkeit abweichende Verhalten bildet eine Besonderheit der Modulsysteme höherer Stufen. Behandelt man auch die Divisoren erster Stufe als Divisoren-*Systeme,* so muss nachgewiesen werden, dass sie eben diese Besonderheit *nicht* haben. Dies ist auch Herrn *Dedekind* nicht entgangen; in seiner höchst sorgfältigen und scharfsinnigen Art der Deduction, die bei seinen ganz abstracten Begriffsbestimmungen ebenso nothwendig als bewundernswerth erscheint, hat er in § 172 seiner „allgemeinen Zahlentheorie"*) den erwähnten Umstand ausdrücklich hervorgehoben.

*) Vorlesungen über Zahlentheorie, III. Auflage, Braunschweig 1879. Supplement XI. S. 521.

§ 22.

Die ganzen algebraischen Formen der verschiedenen Stufen; ihre absolute Aequivalenz; ihre Zerlegung in irreductible Factoren.

Für irgend einen Rationalitäts-Bereich oder eigentlich Integritäts-Bereich $[\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots]$, sei es ein natürlicher oder ein Gattungs-Bereich, ist nach der obigen Definition (§ 15, III) eine Form des Bereichs $[\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots]$ *primitiv*, wenn ihre Coefficienten keinen gemeinsamen Theiler haben. Aber nach den Ergebnissen der in §§ 20 und 21 gegebenen Entwickelungen bedeutet diese Bedingung nur, dass die Coefficienten keinen gemeinsamen Theiler *erster Stufe* haben sollen. Während also durch die in § 15, III aufgestellte Bedingung eine Form nur in Beziehung auf Divisoren erster Stufe primitiv wird, ist nunmehr mit Hülfe der Entwickelungen in den beiden vorhergehenden Paragraphen der Begriff des „Primitiven" enger zu fassen, und

> eine *eigentlich* primitive Form ist dadurch zu charakterisiren, dass ihre Coefficienten überhaupt keinen Divisor irgend einer Stufe mit einander gemein haben sollen.

Der Einfachheit halber sind hier bei dem Ausdruck „Form" die Beiwörter „ganz" und „algebraisch" weggelassen worden, und dies soll auch weiter in diesem Paragraphen geschehen, weil keinerlei Unklarheit dadurch entstehen kann. Ist F eine Form des Bereichs $[\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots]$ mit den Unbestimmten $u', u'', u''', \ldots$, und sind $U', U'', U''', \ldots$ die verschiedenen Producte von Potenzen der Unbestimmten $u', u'', u''', \ldots$ in der Entwickelung von F, so dass

$$F = M'U' + M''U'' + M'''U''' + \cdots$$

ist, wo die Coefficienten M „ganze" Grössen des Bereichs $[\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots]$ sind, so ist die Bedingung dafür, dass F eigentlich primitiv sei, die Aequivalenz

$$(M', M'', M''', \ldots) \sim 1,$$

nach den in § 21 gegebenen Begriffsbestimmungen. Eine Form ist also eigentlich primitiv, wenn das Modulsystem, dessen Elemente durch ihre Coefficienten gebildet werden, äquivalent Eins ist. Die hierbei hervortretende Beziehung der beiden Betrachtungsweisen, nämlich der einen, wonach die Grössen M ganz abstract als Elemente eines Systems betrachtet, und der anderen, wonach sie als Coefficienten einer Form zur Construction eines concreten Grössengebildes verwendet werden, soll nun zur Uebertragung der in § 21 enthaltenen Definitionen auf die Formen leiten, deren Coefficienten die Grössen M sind.

I. Eine Form soll als eine andere Form *„enthaltend"* bezeichnet werden, wenn das Coefficienten-System der letzteren in dem der ersteren (nach der in § 21, II gegebenen Bestimmung) enthalten ist.

II. Ist die Form F in der Form F_0, aber auch umgekehrt F_0 in F enthalten, so sind die beiden Formen einander „absolut äquivalent" (vgl. § 21, II).

III. Jede eigentlich primitive Form ist absolut äquivalent Eins.

IV. Die Form $uF+F_0$, welche durch eine lineare Verbindung von irgend zwei Formen F und F_0 mit dem unbestimmten Coefficienten u entsteht, ist in jeder der beiden Formen F und F_0 enthalten, und bildet deren grössten gemeinsamen Inhalt (vgl. § 21, IV). Ist daher F in F_0 enthalten, so ist F der Form $uF+F_0$ absolut äquivalent.

V. Eine Form, welche durch wirkliche Multiplication von zwei anderen Formen entsteht, und jede einem solchen Product zweier Formen äquivalente Form soll auch, im Anschluss an die in § 21, V eingeführte Ausdrucksweise, die aus den beiden ersten zusammengesetzte oder componirte Form genannt werden.

VI. Eine Form wird als *„nicht zerlegbar"*, *„irreductibel"* oder als *„Primform"* bezeichnet, wenn sie keinem Producte von zwei *nicht primitiven* Formen des festgesetzten Bereichs $[\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots]$ äquivalent ist (vgl. § 21, VI).

VII. Enthalten die Grössen $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots$ nur genau $\mathfrak{n}-1$ von einander unabhängige Variable $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots \mathfrak{R}^{(\mathfrak{n}-1)}$, so giebt es Formen erster, zweiter, ... $\mathfrak{n}^{\text{ter}}$ Stufe und auch Formen, die aus solchen verschiedener Stufen zusammengesetzt sind (vgl. § 21, VII).

Formen zweiter oder höherer Stufe und überhaupt solche, die keine Formen erster Stufe enthalten, sind zwar in dem früheren, weiteren Sinne primitiv, aber *uneigentlich* primitiv, und diese Eigenschaft des „uneigentlich Primitiven" ist offenbar, wie die Formen selbst, verschieden „abgestuft".

Formen $\mathfrak{m}^{\text{ter}}$ Stufe bestehen aus $\mathfrak{m}$ oder mehr Gliedern; diejenigen, welche nicht mehr als $\mathfrak{m}$ Glieder haben, deren Coefficienten-System also auch nur aus $\mathfrak{m}$ Elementen besteht, bilden nebst allen, die solchen Formen äquivalent sind, die Hauptclasse. In natürlichen Rationalitäts-Bereichen sind sämmtliche Formen erster Stufe

zur Hauptclasse gehörig, nicht aber alle Formen höherer Stufe (vgl. § 21).

VIII. Verschiedene Formen mit ***denselben Coefficienten*** sind einander absolut äquivalent, da die oben (unter I und II) gegebenen Definitionen überhaupt nur auf die Coefficienten der Form Bezug nehmen. Jede Form ist also einer ***linearen*** absolut äquivalent.

IX. Ist eine homogene lineare Form F in einer anderen F_0 enthalten, so lässt sich die erstere in die letztere dadurch transformiren, dass für die Unbestimmten von F Formen des Bereichs substituirt werden; diese Formen sind selbst linear, sobald auch F_0 eine lineare Form ist. In diesem Falle lässt sich also die enthaltene lineare Form F in die enthaltende Form F_0 durch eine lineare Substitution mit ***ganzen*** Coefficienten transformiren, und es ist dies zugleich eine ***hinreichende*** Bedingung für das Enthalten-Sein von F in F_0.

Die „lineare Substitution" bezieht sich natürlich auf die ***Unbestimmten*** der Formen, und unter „ganzen" Coefficienten sind solche zu verstehen, welche ganze rationale Functionen von $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$, $\mathfrak{R}'''$, ..., also ***ganze*** Grössen des Bereichs $[\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots]$ sind. Als Corollar des Satzes IX muss noch der Satz hervorgehoben werden:

X. Aequivalente homogene lineare Formen sind durch Substitutionen mit ganzen Coefficienten in einander transformirbar.

Wenn die Formen F, F_0 beziehungsweise die Elemente M, M_0 haben und also

$$(A) \qquad F_0 = \sum_h M_0^{(h)} u_0^{(h)}, \quad F = \sum_k M^{(k)} u^{(k)} \qquad (h=1,2,\ldots;\ k=1,2,\ldots)$$

ist, so bestehen gemäss der Definition I Relationen

$$(B) \qquad M_0^{(h)} = \sum_k C_{hk} M^{(k)} \qquad (h=1,2,\ldots;\ k=1,2,\ldots).$$

Es wird also

$$(C) \qquad F_0 = \sum_h \sum_k C_{hk} M^{(k)} u_0^{(h)} \qquad (h=1,2,\ldots;\ k=1,2,\ldots),$$

und die Form F wird demzufolge durch die Substitution

$$(\bar{C}) \qquad u^{(k)} = \sum_h C_{hk} u_0^{(h)} \qquad (h=1,2,\ldots;\ k=1,2,\ldots)$$

in die Form F_0 transformirt, wie es in dem mit IX bezeichneten Satze ausgesprochen ist.

Da nach § 14 oder § 17, II′ jedes Element M durch den aus F gebildeten algebraischen Divisor theilbar ist, so hat, wie die Gleichung (C)

zeigt, auch die Form F_0 diese Eigenschaft, d. h. es ist

$$(D) \qquad \mathrm{Fm}(M'u'+M''u''+M'''u'''+\cdots).F_0 \equiv 0 \quad (\mathrm{mod.}\, F).$$

Die Form F charakterisirt sich als reine Form erster Stufe dadurch, dass die mit $\mathrm{Fm}(M'u'+M''u''+M'''u'''+\cdots)$ bezeichnete Form eigentlich primitiv ist, da sonst die Norm von F ausser dem Divisor erster Stufe, welchen alle ihre Coefficienten mit einander gemein haben, noch Divisoren-Systeme höherer Stufen enthält. Wenn also eine solche Form F durch eine lineare Substitution mit ganzen Coefficienten in F_0 transformirt werden kann, so ist die Form F_0, multiplicirt mit einer eigentlich primitiven Form, durch F theilbar. Es lässt sich aber auch andererseits jene Transformirbarkeit aus dem, was sich hier als Consequenz ergeben hat, ableiten, wie jetzt gezeigt werden soll.

Es seien E, F, F_0 lineare oder nicht lineare Formen des Bereichs, und zwar E eine *eigentlich* primitive Form und F_0 eine *reine Form erster Stufe;* es sei ferner

$$F_0 = \sum_i M_0^{(i)} U_0^{(i)}, \quad F = \sum_k M^{(k)} U^{(k)},$$

wo $U_0^{(i)}$, $U^{(k)}$ Producte von Potenzen der Unbestimmten der Formen bedeuten. Nun soll angenommen werden, dass die Congruenz

$$(E) \qquad EF_0 \equiv 0 \quad (\mathrm{mod.}\, F)$$

bestehe, so dass also auch F eine reine Form erster Stufe sein muss. Die angenommene Congruenz kann nach den in § 14 eingeführten Bezeichnungen auch in folgender Weise dargestellt werden:

$$(E') \qquad E.\mathrm{Fm}(M_0'U_0'+M_0''U_0''+\cdots).\mathrm{mod}[M_0'U_0'+M_0''U_0''+\cdots] \equiv 0 \quad (\mathrm{mod.}\, F),$$

und hierbei ist $\mathrm{Fm}(M_0'U_0'+M_0''U_0''+\cdots)$ eine *eigentlich* primitive Form, weil F_0 als reine Form erster Stufe vorausgesetzt worden ist. Auch das Product $E.\mathrm{Fm}(M_0'U_0'+M_0''U_0''+\cdots)$ ist also eine eigentlich primitive Form, und diese möge, nach den Producten von Potenzen der Unbestimmten entwickelt, gleich $L'V'+L''V''+L'''V'''+\cdots$ sein. Alsdann geht die Congruenz (E') in

$$\mathrm{mod}[M_0'U_0'+M_0''U_0''+\cdots].\sum_h L^{(h)}V^{(h)} \equiv 0 \quad (\mathrm{mod.}\, F)$$

über. Da auf Grund jenes zweiten Fundamentalsatzes (§ 17, II oder II′) jedes Element der Form F_0 durch $\mathrm{mod}[M_0'U_0'+M_0''U_0''+\cdots]$ theilbar ist, so ergiebt sich für jedes dieser Elemente $M_0^{(i)}$ die Congruenz

$$M_0^{(i)} \sum_h L^{(h)}V^{(h)} \equiv 0 \quad (\mathrm{mod.}\, F),$$

aus welcher die Congruenzen nach dem *Modulsystem* der Coefficienten von F

$$M_0^{(i)} L^{(h)} \equiv 0 \quad (\mathrm{modd.}\, M', M'', M''', \ldots)$$

und endlich, da das Modulsystem $(L', L'', L''', \ldots)$ äquivalent Eins ist, die Congruenzen

$$M_0' \equiv 0, \; M_0'' \equiv 0, \; M_0''' \equiv 0, \; \ldots \qquad (\text{modd.}\, M', M'', M''', \ldots)$$

hervorgehen. Diese Congruenzen enthalten die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Form F in F_0 enthalten und also F in F_0 durch eine Substitution mit ganzen Coefficienten transformirbar ist.

Aus der vorstehenden Entwickelung ergiebt sich, dass für reine Formen erster Stufe die obige Definition IX durch folgende ersetzt werden kann:

IX′. Eine Form F ist in F_0 enthalten, wenn eine eigentlich primitive Form E existirt, für welche das Product EF_0 wirklich durch F theilbar wird.

Für den Fall, dass diese Beziehung der beiden Formen eine gegenseitige ist, sind dieselben äquivalent, und man gelangt somit zu der neuen Aequivalenz-Bestimmung:

X′. Zwei Formen sind absolut äquivalent, wenn sie sich nur durch Factoren von einander unterscheiden, welche eigentlich primitive Formen sind.

Von den beiden verschiedenen Aequivalenz-Bestimmungen X und X′ ist die erstere auf die Transformation, die letztere auf die Composition der Formen gegründet; die erstere stützt sich also auf das *Gauss*sche Princip der Aequivalenz, mit welchem die Theorie der quadratischen Formen in der V. Section der Disqq. Arithm. art. 157 beginnt, die letztere auf das *Kummer*sche Princip der Aequivalenz, welches in seiner Theorie der idealen Zahlen den Ausgangspunkt bildet, während es bei *Gauss* erst in der weiteren Entwickelung der Theorie (Disqq. Arithm. art. 234 sqq.) zur Anwendung kommt. Dass die beiden verschiedenen Definitionen, welche unter No. X und X′ für die Aequivalenz der ganzen algebraischen Formen gegeben worden sind, sich vollkommen decken, bildet den Kernpunkt der obigen Auseinandersetzungen, und diese selbst basiren — wie wohl zu beachten ist — wesentlich auf jenem in § 17, II entwickelten zweiten Fundamentaltheorem.

Es ist offenbar der vollständige Einheitscharakter der *eigentlich* primitiven Formen, welcher durch jene zweite Definition der absoluten Aequivalenz X′ zum natürlichen Fundament der arithmetischen Theorie der ganzen algebraischen Grössen und Formen gemacht wird, und auf diesem natürlichen Fundamente lässt sich auch die ganze Theorie am einfachsten aufbauen. So lassen sich z. B. die Hauptresultate, welche in den §§ 14 bis 18

an den Begriff der algebraischen Divisoren geknüpft worden sind, in der übersichtlichsten Weise als Hauptsätze der Formentheorie aussprechen, wenn man dabei die eigentlich primitiven Formen wirklich als Einheiten oder „Einheitsformen" betrachtet und einfach

> eine Form F als Factor oder Divisor einer Form F_0 bezeichnet, sobald diese Theilbarkeit von F_0 durch F im Sinne der absoluten Aequivalenz stattfindet, d. h. also, sobald F_0 multiplicirt mit einer eigentlich primitiven Form wirklich durch F theilbar wird.

Die beiden Fundamentalsätze (§ 15, IX und § 17, II) lauten alsdann folgendermassen:

XI. Absolut äquivalente Formen haben dieselben Theiler.

XII. Formen mit denselben Coefficienten sind äquivalent.

Die beiden Sätze legen also dar, dass erstens äquivalente Formen in Bezug auf die Division durch andere Formen einander ersetzen können, und dass zweitens die ganzen algebraischen Grössen, welche die Coefficienten der Formen bilden, das einzig Wesentliche derselben sind (vgl. No. VIII).

Endlich aber ist die in § 18 angegebene Zerlegbarkeit der Divisoren in den Satz zu fassen:

XIII. Jede ganze algebraische Form ist im Sinne der absoluten Aequivalenz als Product von irreductibeln Formen (Primformen) darstellbar und zwar nur auf eine einzige, also völlig bestimmte Weise.

Sowohl die Aequivalenz-Definition X′ als die hier daran geknüpften Darlegungen beziehen sich ausschliesslich auf reine Formen erster Stufe, d. h. also auf solche Formen

$$M'u' + M''u'' + M'''u''' + \cdots,$$

für welche die (schon in § 14) mit $\mathrm{Fm}(M'u' + M''u'' + M'''u''' + \cdots)$ bezeichnete Form *eigentlich* primitiv ist. Sie genügen aber vollständig für den einfachsten Fall der algebraischen Zahlen, wo keine Divisoren höherer Stufen existiren; sie genügen ferner, um die allgemeine Bedeutung zu würdigen, welche die Einführung der ganzen algebraischen Formen für die Theorie der algebraischen Grössen hat, und auch um die Art und Weise zu erkennen, in welcher die Resultate auf die Formen höherer Stufen auszudehnen sind.

Die „ganzen" Grössen irgend eines natürlichen Rationalitäts-Bereichs mit den Elementen $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots$, d. h. also die ganzen ganzzahligen Functionen beliebig vieler unabhängiger Variabeln $\mathfrak{R}$ sind, wie in § 4 dargelegt ist, in irreductible Factoren zerlegbar, und zwar nur auf eine einzige,

also bestimmte Weise. Der Nachweis hierfür beruht einzig und allein darauf, dass

> erstens ein Verfahren angegeben wird, mittels dessen die Zerlegung einer solchen Grösse in Factoren, die dem festgesetzten Grössenbereich angehören, bewirkt, also auch die Irreductibilität erkannt werden kann, und dass
>
> zweitens der grösste gemeinsame Theiler zweier Grössen, also wenn sie gegen einander relativ prim sind, die Zahl Eins als lineare homogene Function derselben dargestellt werden kann und zwar mit Coefficienten, welche ebenfalls dem festgesetzten Grössenbereich entnommen sind.

Bezeichnet man dies als die beiden Erfordernisse der eindeutigen Zerlegung in irreductible Factoren, so ist bekanntlich das zweite nicht mehr allgemein erfüllt, sobald man von einem natürlichen Rationalitäts-Bereich zu Gattungs-Bereichen übergeht, und die dadurch bestimmten Grössenbereiche nicht weiter verändert. Erweitert man aber diesen Grössenbereich durch die Gesammtheit der ganzen algebraischen *Formen* des Gattungs-Bereichs, so wird dem zweiten Erforderniss entsprochen, und es wird in dieser erweiterten Sphäre algebraischer Gebilde immer noch sowohl jenem ersten als auch dem allgemeineren Erforderniss *der Erhaltung der algebraischen Rechnungsgesetze* vollkommen genügt, mit der einzigen Massgabe, dass durchweg an Stelle der Gleichheit die absolute Aequivalenz treten muss. So bildet z. B. die Gesammtheit der Formen mit beliebig vielen Unbestimmten, deren Coefficienten ganze algebraische *Zahlen* einer bestimmten Gattung sind, einen Bereich, in welchem alle Rechnungsoperationen sowie die einfachen Gesetze der gewöhnlichen ganzen Zahlen in vollem Umfange Geltung haben. Ebenso bleibt beim Uebergang von ganzen rationalen Functionen variabler $\mathfrak{R}$ zu ganzen algebraischen Functionen die eindeutige Zerlegbarkeit in irreductible Divisoren (erster Stufe) bestehen (vgl. XIII), wenn die Gesammtheit der Formen erster Stufe, unter welche die ganzen algebraischen Functionen selbst mit gehören, associirt wird. Wenn endlich zur vollständigen Entwickelung der Theorie der ganzen (rationalen und algebraischen) Functionen variabler Grössen $\mathfrak{R}$ auch die *Systeme* von Divisoren mit in Betracht gezogen werden, so ist die Association der Formen für die Erhaltung der Gesetze der Zerlegbarkeit erforderlich und ausreichend und zwar, was wohl zu beachten ist, ebenso bei natürlichen wie bei Gattungs-Bereichen, so dass

der Uebergang vom Rationalen zum Algebraischen auch hierin keinen Unterschied bedingt.

Bei der Definition der algebraischen Divisoren in §§ 14 und 15 und also auch bei deren Zerlegung ist von Divisoren höherer Stufen abstrahirt; die dort als primitiv bezeichneten Formen sind nicht *eigentlich* primitiv und können daher noch Divisoren höherer Stufen enthalten, und die Definition (§ 15, VIII) der Aequivalenz algebraischer Divisoren begründet also für die Formen, aus denen sie gebildet sind, nur eine „Aequivalenz *erster Stufe*". Bei jenen ersten Entwickelungen in Bezug auf die Divisoren sollte eben zur Erleichterung der Uebersicht nur der eine Schritt aus dem Gebiete der ganzen rationalen Functionen in das der algebraischen und nicht zugleich der andere Schritt von den Divisoren erster zu denen zweiter Stufe gemacht werden. Aber nachdem in den §§ 20 und 21 erst für natürliche und dann für beliebige Rationalitäts-Bereiche die Divisoren der verschiedenen Stufen eingeführt und behandelt worden sind, können auch die obigen Definitionen und Ergebnisse von den Formen erster Stufe auf die Formen höherer Stufe übertragen werden. An die Stelle der Definitionen IX′, X′ treten die allgemeineren für reine Formen $\mathfrak{m}^{\text{ter}}$ Stufe:

IX⁰. Bedeuten $F_1, F_2, \dots F_\mathfrak{m}$ ganze algebraische Formen, welche sämmtlich dieselben Coefficienten haben und sich also nur durch die Systeme der Unbestimmten von einander unterscheiden, so ist eine dieser Formen in einer Form F_0 enthalten, wenn F_0 einer ganzen homogenen Function der $\mathfrak{m}$ Formen $F_1, F_2, \dots F_\mathfrak{m}$ im Sinne der Definition X′ absolut äquivalent ist.

X⁰. Zwei Formen sind absolut äquivalent, wenn sie sich gegenseitig enthalten.

In der Definition IX⁰ ist die für die Formen erster Stufe gegebene Aequivalenz-Bestimmung X′ benutzt, implicite also auch in der Definition X⁰, welche auf jene erstere zurückgreift; aber jene Aequivalenz-Bestimmung X′ würde für Divisoren $\mathfrak{m}^{\text{ter}}$ Stufe zu eng und also nicht ausreichend sein. Die Aequivalenz-Bestimmung im Sinne der Definition X⁰ ist eine Folge derjenigen nach der Definition X′, aber nicht umgekehrt diese eine Folge jener.

Da bei jeder naturgemässen Aequivalenz-Bestimmung alle Formen mit denselben Coefficienten einander äquivalent sein müssen, so kann die Definition X⁰ auf zwei solche Formen angewendet werden. Alsdann muss eine Form $\mathfrak{m}^{\text{ter}}$ Stufe F, welche für andere und andere Systeme von Unbe-

stimmten, wie oben in IX^0 mit $F_1, F_2, \dots F_m$ bezeichnet werden möge, im Sinne der Aequivalenz-Bestimmung X′ als homogene lineare Function von $F_1, F_2, \dots F_m$ darstellbar sein. Dies kann zugleich als Definition für die Stufenzahl $\mathfrak{m}$ einer reinen Form F gelten, wenn nur noch hinzugefügt wird, dass keine kleinere Zahl als $\mathfrak{m}$ bei jener Darstellung ausreicht. Die allgemeine auf Formen aller Stufen bezügliche Aequivalenz-Bestimmung X^0 ist ebenso wie jene speciellere X′, welche für Formen erster Stufe gegeben worden ist, mit der früheren auf die Transformation gegründeten Definition der Aequivalenz in genauer Uebereinstimmung; sie gestattet auf Grund der Entwickelungen in den §§ 20 und 21 und nur, wie dort, mit Ausschliessung der Formen, die mehrfache Factoren enthalten, die Aufstellung des allgemeinen Satzes über die Zerlegung ganzer algebraischer Formen in ihre irreductibeln Factoren der verschiedenen Stufen, welcher als ein Hauptresultat hervorzuheben ist:

XIII^0. Jede ganze algebraische Form ist im Sinne der absoluten Aequivalenz X^0 als Product von irreductibeln Formen (Primformen) darstellbar, und zwar nur auf eine einzige, also völlig bestimmte Weise.

Dieser Satz zeigt, dass die Fundamentalgesetze der gewöhnlichen Zahlen auch in der allgemeinsten Sphäre algebraischer Grössen — bei Association der algebraischen Formen — noch Geltung behalten, und er legt zugleich jenes allgemeine Resultat der Eliminations-Theorie, welches in § 10 entwickelt worden ist, in dem umfassenderen Sinne der arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen dar. Denn wenn $G', G'', G''', \dots$ ganze ganzzahlige Functionen von $\mathfrak{n}-1$ unabhängig veränderlichen Grössen $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$, $\mathfrak{R}''', \dots$ und $U', U'', U''', \dots$ die verschiedenen Producte von Potenzen unbestimmter Grössen $u', u'', u''', \dots$ bedeuten, so ist

$$(F) \qquad G'U' + G''U'' + G'''U''' + \cdots$$

nach § 15, I eine ganze rationale Form des Bereichs $[\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \dots]$, und durch die Gleichung

$$G'U' + G''U'' + G'''U''' + \cdots = 0,$$

welche das Gleichungssystem

$$(G) \qquad G' = 0, \quad G'' = 0, \quad G''' = 0, \quad \dots$$

repräsentirt, werden nach § 10 algebraische Beziehungen zwischen den Veränderlichen $\mathfrak{R}$ hergestellt, deren nähere Darlegung a. a. O. als die Aufgabe der Eliminations-Theorie bezeichnet ist. Wird nun die Form (F) nach XIII^0 als Product von Primformen dargestellt, so sind diese insofern von

zweierlei Charakter, als die einen für besondere Werthe der Variabeln $\mathfrak{R}$ gleich Null werden, die anderen aber nicht. Zu den letzteren gehören z. B. Primzahlen, welche etwa Divisoren von (F) sind. Die ersteren Primformen aber, welche nur von den ersten $n-1$ Stufen sein können, ergeben, gleich Null gesetzt, die verschiedenen irreductibeln Resolventen des Gleichungssystems (G), und die Systeme von Gleichungen, welche dadurch entstehen, dass die einzelnen Coefficienten je einer der Primformen gleich Null gesetzt werden, bilden die einzelnen, den verschiedenen Stufen angehörigen irreductibeln Theile jenes ursprünglichen Systems (G).

Die Association der ganzen algebraischen Formen, zu welcher die weitere Ausbildung jenes „methodischen Hülfsmittels der unbestimmten Coefficienten" geführt hat, bewirkt, wie das obige Hauptresultat XIII^0 zeigt, „die Erhaltung der Begriffsbestimmungen und Gesetze beim Uebergang vom Rationalen zum Algebraischen", welche im Anfange des § 20 als Forderung aufgestellt worden ist; sie gewährt den *„einfachsten"* erforderlichen und hinreichenden Apparat, um die arithmetischen Eigenschaften der allgemeinsten algebraischen Grössen *„vollständig"* und *„auf die einfachste Weise"* darzulegen. Die hervorgehobenen Ausdrücke sind dem ersten Satze von Herrn *Kirchhoffs* Mechanik entnommen, in welchem als die Aufgabe der Mechanik bezeichnet wird, die in der Natur vor sich gehenden Bewegungen *vollständig* und *auf die einfachste Weise* zu beschreiben. In dem Worte „beschreiben" wird hierbei mit Recht ein Hinweis auf den zu benutzenden wissenschaftlichen Apparat gegeben, und die *Kirchhoff*sche Forderung der Einfachheit ist ebensowohl auf die Mittel der Beschreibung als auf diese selbst zu beziehen. An sich könnte freilich die einfachste Darlegung mechanischer Vorgänge, auch wenn sie die ausgebildetsten Mittel der Analysis in Anspruch nimmt, genügend erscheinen, aber jener andere Vorzug der einfachsten Mittel, wie ihn *Dirichlets* Aufsatz über die Stabilität des Gleichgewichts*) zeigt, erfüllt, was die zweite *Kirchhoff*sche Forderung im höheren Sinne verlangt, dass die einfachsten Quellen der Erkenntniss aufzusuchen sind.

Die Association der Formen hat in der arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen genau dieselbe Nothwendigkeit für sich wie die

---

*) Journal f. Mathematik Bd. 32, S. 85.

Association der imaginären zu den reellen Grössen in der Analysis und ist überhaupt in vielfacher Hinsicht damit vergleichbar. Ganz ähnlich wie die Linie der reellen Zahlen durch die „laterale Einheit"*) zur Ebene der complexen Zahlen sich ausdehnt, wird ein Grössenbereich $[\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots]$ durch die Unbestimmten der ganzen algebraischen Formen gewissermassen in Bezug auf seine „Dimension" erweitert, und *genau* ebenso wie der biquadratische Restcharakter in der Linie der reellen Zahlen nur von Punkten zu beiden Seiten derselben zu erkennen ist, sind die Gesetze der Erscheinungen an der Grenze des *Formen*gebietes, welche durch den ursprünglichen *Grössen*bereich gebildet wird, in der einfachsten Weise nur von Standpunkten aus darzulegen, welche im Innern des Gebietes der den Grössen associirten Formen liegen. So wie es ferner wohl angeht, die Eigenschaften der Functionen von $x+yi$ auch als solcher von x und y „vollständig" zu entwickeln, so können auch an Stelle der Formen erster Stufe die Systeme ihrer Coefficienten als Modulsysteme nach § 21 „vollständig" behandelt werden. In dem einen wie im anderen Falle würde jedoch bei solcher Behandlungsweise der zweiten *Kirchhoff*schen Forderung nicht genügt und das Wesentlichste der Einsicht und Erkenntniss entgangen sein.

Wenn einerseits die Zweckmässigkeit der Association der Formen durch die fast überraschende Einfachheit und Allgemeinheit der erzielten Resultate dargethan wird, so erscheint sie andererseits bei Bereichen mit variabeln Grössen $\mathfrak{R}$ auch vollkommen *angemessen,* weil die hinzugefügten algebraischen Gebilde ganz in der Sphäre der Betrachtung bleiben, und zwar so sehr, dass es vielmehr Sorgfalt erfordert, die Unbestimmten der Formen (u) von den Unbestimmten oder Variabeln $(\mathfrak{R})$, welche die Elemente des Bereichs bilden, nach ihren ganz verschiedenen Stellungen in der Entwickelung gehörig aus einander zu halten**). Aber für die aus dem absoluten Rationalitäts-Bereich $\mathfrak{R}=1$ hervorgehenden Gattungs-Bereiche, d. h. also für Bereiche algebraischer *Zahlen,* hat die Association der Formen mit ganzen algebraischen Coefficienten auf den ersten Blick etwas Fremdartiges; jedoch braucht man nur an die *Gauss*sche Einführung der quadratischen Formen in die reine Arithmetik zu erinnern, um den Schein des Fremdartigen aufzuheben. Vor *Gauss* kannte man nur quadratische Formen der *Zahlen;*

*) *Gauss* Werke Bd. II, S. 178.

**) In § 10 kommt eine ähnliche Unterscheidung zwischen den Variabeln z und $\mathfrak{R}$ vor.

erst *Gauss* hat bei den quadratischen Formen den früheren beschränkten Gesichtspunkt, bei welchem nur die Darstellbarkeit der Zahlen ins Auge gefasst wurde, fallen gelassen und Formen mit wirklichen „Unbestimmten" (indeterminatae) in die Arithmetik eingeführt. Diese ganz neue und von der früheren völlig abweichende Auffassung der quadratischen Formen ist eine der bewundernswerthesten Conceptionen seines weit- und scharfblickenden Geistes. Welche Wichtigkeit er selbst der Einführung der Unbestimmten in die Arithmetik beigelegt hat, zeigt sich an vielen Stellen seiner neuen, in ihren Hapttheilen darauf gegründeten, systematischen Behandlung der quadratischen Formen, und es sind namentlich die späteren Theile der Entwickelung, die Composition der Formen, die Darstellung der ternären durch binäre Formen, welche darauf beruhen. Die Nebenstellung, welche *Gauss* den Unbestimmten x, y in der Form $ax^2+2bxy+cy^2$ anweist, charakterisirt er gleich Anfangs durch die Bezeichnung (a, b, c), welche er für die Form einführt. Und in der That könnte die ganze *Gauss*sche Theorie der binären quadratischen Formen $ax^2+2bxy+cy^2$, nachdem die Aequivalenz durch die Transformationsgleichungen der Coefficienten erklärt ist, als eine Theorie der Systeme von drei Zahlen (a, b, c) aufgefasst und behandelt werden; aber wenn man so das Rechnungs-Substrat der Unbestimmten x und y ganz wegliesse, würde die Uebersicht der Operationen und Resultate bedeutend erschwert sein, und es würden auch wesentliche theoretische Gesichtspunkte damit verloren gehen. — Diese Darlegung kann auch zugleich als erläuterndes Beispiel für das oben erwähnte Verhältniss dienen, in welchem eine Theorie der abstracten Modulsysteme zur Theorie der mit dem Rechnungs-Substrat der Unbestimmten versehenen Formen steht.

Irgend eine Art der Association ist erforderlich; entweder der „analytische" oder der „dimensionale" Charakter der algebraischen Grössen muss erweitert werden, wenn beim Uebergange von der rationalen zur algebraischen Sphäre die Gesetze bezüglich der Zerlegung in Factoren vollständige Geltung behalten sollen. Während in der obigen Association der *Formen* eine dimensionale Erweiterung des ursprünglichen Grössenbereichs liegt, enthält jene Art der Association, welche in § 19 erwähnt worden ist, eine Modification des analytischen Charakters; denn die *Weierstrass*schen *transcendenten* Primfunctionen waren den *algebraischen* Functionen einer Variabeln, und die singulären Moduln der elliptischen Functionen waren den aus Quadratwurzeln gebildeten, also durch Kreistheilungsgrössen rational

darstellbaren, algebraischen Zahlen zu associiren. Auch die *Kummer*schen idealen Zahlen sind, wenigstens begrifflich, associirte Gebilde, und dass hierbei, wie bei der obigen Association der Formen, an Stelle der Gleichheit eine gewisse Aequivalenz tritt, findet sich ganz ebenso bei *jeder* stufenweisen Gebietserweiterung der Arithmetik*), welche durch das Hinzunehmen neuer Gebilde, also durch „Associiren" erfolgt.

§ 23.

Die relative Aequivalenz der ganzen algebraischen Formen.

Im vorigen Paragraphen ist ein ganz beliebiger Rationalitäts-Bereich zu Grunde gelegt und von jeder Unterscheidung der natürlichen und Gattungs-Bereiche abgesehen worden; es war dies nicht nur zulässig, sondern auch angemessen, um deutlich zu zeigen, dass die dort gegebenen Entwickelungen keinerlei Unterscheidung zwischen rationalen und algebraischen Functionen erheischen. Aber für die in diesem und in den folgenden Paragraphen enthaltenen Darlegungen ist eine solche Unterscheidung wesentlich, und es soll für dieselben desshalb ein natürlicher Rationalitäts-Bereich $[\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots]$ und eine bestimmte daraus hervorgegangene Gattung $\mathfrak{G}$ und Species $\mathfrak{S}$ algebraischer Grössen von vorn herein festgesetzt werden. Nunmehr lässt sich nach dem *Kummer*schen Princip der Aequivalenz (vgl. § 19) für die allgemeinsten ganzen algebraischen Formen in analoger Weise, wie es in § 19 für die algebraischen Zahlen und Divisoren erster Stufe geschehen ist, der Begriff relativer (durch die besondere Art $\mathfrak{S}$ bedingter) Aequivalenz aufstellen.

I. Zwei Formen irgend welcher Stufe sind relativ äquivalent, wenn beide, mit derselben Form zusammengesetzt (§ 22, V), einer ganzen algebraischen Grösse der Art $\mathfrak{S}$, also einer nach § 15, V der Hauptclasse zugehörigen Form absolut äquivalent sind.

Die hier aufgestellte Bedingung der relativen Aequivalenz ist stets hinreichend, aber nur für Formen erster Stufe zugleich nothwendig, und es wird unten (I'') für Formen höherer Stufen die allgemeinere gegeben werden. Aber um dahin zu leiten, muss diese erste beschränktere Bedingung noch etwas modificirt werden.

Zwei Formen F und F_0, welche die aufgestellte Bedingung erfüllen, müssen Gleichungen

$$F.\bar{F}.\Phi = X\Psi, \quad F'.\bar{F}.\Phi' = X'\Psi'$$

*) *Gauss* Werke Bd. II, S. 175.

genügen, in denen X, X' ganze algebraische Grössen und $\bar{F}$, Φ, Ψ, Φ', Ψ' ganze algebraische Formen der Species 𝔖 bedeuten, von denen die vier letzteren eigentlich primitiv sind. Hieraus folgt die Relation $FX'\Phi\Psi' = F'X\Phi'\Psi$, oder also, da $\Phi\Psi'$ und $\Phi'\Psi$ eigentlich primitive Formen der Species 𝔖 sind, die *absolute* Aequivalenz $FX' \backsim F'X$, und zwar in dem engeren Sinne, ***welcher bei der Benutzung der absoluten Aequivalenz für die relative überhaupt durchweg festzuhalten ist*** *), dass die primitiven — als Factoren zur Verwandlung der Aequivalenz in eine Gleichung dienenden — Formen ebenfalls der für den Begriff der ***relativen*** Aequivalenz massgebenden Species angehören. Rechnet man nun zur ***Hauptclasse*** der Formen von 𝔖 alle diejenigen, welche den (schon nach § 15, V dazu gehörigen) ganzen algebraischen ***Grössen*** der Species 𝔖 in dem angegebenen engeren Sinne absolut äquivalent sind, so kann an Stelle der obigen Definition I eine Modification derselben gesetzt werden, welche der in § 22, X′ gegebenen Begriffsbestimmung der absoluten Aequivalenz vollkommen analog ist.

I′. Ganze algebraische Formen sind relativ äquivalent, wenn sie sich nur durch Factoren von einander unterscheiden, welche der Hauptclasse angehören. Im Sinne der relativen Aequivalenz verhalten sich also Formen der Hauptclasse wie Einheiten.

Diese Begriffsbestimmung der relativen Aequivalenz reicht auch für Formen höherer Stufe aus, wenn man darin die weiteren und allgemeineren, in § 22, VII und X⁰ gegebenen Bestimmungen der Hauptclasse und der absoluten Aequivalenz für die engeren (§ 15, V u. § 22, X′) substituirt.

Für die Formen ***erster*** Stufe ergeben sich ferner den in § 22, II und X aufgestellten Bedingungen der absoluten Aequivalenz entsprechende, nämlich:

II. Zwei ganze algebraische Formen erster Stufe F, F' sind relativ äquivalent, wenn die Coefficienten von F, multiplicirt mit einer ganzen algebraischen Grösse X' und die Coefficienten von F', multiplicirt mit einer ganzen algebraischen Grösse X, so beschaffen sind, dass sich die einen als homogene lineare Functionen der anderen und zwar so darstellen lassen, dass die Coefficienten der linearen Ausdrücke zum festgesetzten Art-Bereich (𝔖) gehören.

---

*) Auch oben im § 19 (S. 64) ist die bei der relativen Aequivalenz benutzte absolute Aequivalenz der algebraischen Divisoren in dem engeren Sinne zu nehmen, dass der Zähler je eines algebraischen Divisors, dividirt durch den andern Divisor, gleich einer ganzen algebraischen Form *der festgesetzten Art* wird.

III. *Lineare* ganze algebraische Formen erster Stufe sind relativ äquivalent, wenn sie, multiplicirt mit je einer ganzen algebraischen Grösse der Art $\mathfrak{S}$, durch lineare Substitutionen mit ganzen, dem Art-Bereich ($\mathfrak{S}$) angehörigen Coefficienten in einander transformirt werden können.

Die Aufstellung analoger Transformations-Bedingungen für die relative Aequivalenz von Formen höherer Stufen muss noch vorbehalten bleiben. Diese Bedingungen werden sich wohl einfacher aus derjenigen Auffassung ergeben, welche in § 25 dargelegt ist, wonach ganze *algebraische* Formen $\mathfrak{m}^{\text{ter}}$ Stufe eines Bereichs mit $\mathfrak{n}-1$ Variabeln $\mathfrak{R}$ durch ganze *rationale* Formen $(\mathfrak{m}+1)^{\text{ter}}$ Stufe eines Bereichs mit $\mathfrak{n}$ Variabeln $\mathfrak{R}$ zu ersetzen sind.

§ 24.

Die Fundamentalformen, insbesondere die linearen des algebraischen Zahlenreichs.

Um zu zeigen, dass die Darlegung der *allgemeinen* Eigenschaften der ganzen algebraischen Formen nur die einfachsten Mittel und namentlich keinerlei formalen Apparat erfordert, ist bisher von jeder „Reduction" der Formen abgesehen worden. Nunmehr soll aber eine solche Reduction auf gewisse „Grundformen" angegeben werden, um einige *speciellere* Entwickelungen daran knüpfen zu können.

Multiplicirt man die Elemente eines Modulsystems $(M', M'', M''', \ldots)$ der Gattung $\mathfrak{G}$ mit den sämmtlichen Elementen eines Fundamentalsystems von ($\mathfrak{G}$), so resultirt ein äquivalentes Modulsystem $(M'_0, M''_0, M'''_0, \ldots)$, welches die Eigenschaft hat, dass jede das Modulsystem M_0 enthaltende ganze Grösse des Gattungs-Bereichs $\mathfrak{G}$ sich als homogene lineare ganze Function von $M'_0, M''_0, M'''_0, \ldots$ mit ganzen dem Rationalitäts-Bereich $[\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots]$, also dem *Stammbereich* angehörigen Coefficienten darstellen lässt. *Alle* durch diese Eigenschaft charakterisirten Systeme M_0 — und es existiren solche auch in jeder besonderen *Species* $\mathfrak{S}$ — gestatten hiernach eine speciellere als die bisher angewendete Darstellungsweise, bei welcher Coefficienten der Gattung oder der Species selbst zugelassen wurden, und wenn diese auch, wie sich zeigen wird, von besonderem Interesse ist, so darf man sich doch nicht auf die Anwendung der specielleren Systeme M_0 beschränken, weil man sich dadurch mannigfacher Vortheile begeben würde. Die Systeme M_0 können nach der in §§ 6 und 7 angegebenen Weise auf äquivalente mit möglichst wenig

Elementen reducirt werden, und die Anzahl der Elemente dieser reducirten Systeme ist für $\mathfrak{R} = 1$ immer gleich n, d. h. gleich der Zahl, welche die Ordnung der Art $\mathfrak{S}$ bezeichnet. Irgend eine daraus gebildete Form, d. h. also eine Form, deren Coefficienten die Elemente jenes Modulsystems (M_0) sind, soll als *„Grundform"* oder *„Fundamentalform"* bezeichnet werden. Eine Form, deren Coefficienten die verschiedenen Elemente eines Fundamentalsystems der Species $\mathfrak{S}$ sind, ist demnach eine *„eigentlich primitive Fundamentalform"*.

Für den Fall des absoluten Rationalitäts-Bereichs $\mathfrak{R} = 1$, auf welchen jetzt näher eingegangen werden soll, existiren für alle Formen äquivalente lineare Grundformen von n Gliedern

$$u'x' + u''x'' + \cdots + u^{(n)}x^{(n)},$$

in welchen $x', x'', x''', \ldots$ ganze algebraische Zahlen des Art-Bereichs $(\mathfrak{S})$ bedeuten. Dies geht unmittelbar aus den vorstehenden allgemeineren Auseinandersetzungen hervor; doch soll die dem Gedanken nach höchst einfache Entwickelung, welche zu solchen Grundformen führt, zur besseren Uebersicht für den vorliegenden elementarsten Fall $\mathfrak{R} = 1$, hier noch ausführlich dargelegt werden.

Bedeuten $\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{x}''', \ldots$ irgend welche ganze algebraische Zahlen eines Gattungs-Bereichs $(\mathfrak{G})$, von denen wenigstens eine, z. B. $\mathfrak{x}'$, zur Gattung $\mathfrak{G}$ selbst gehört und also von der Ordnung n ist, so bilden nach § 5 die ganzen ganzzahligen Functionen von $\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{x}''', \ldots$ einen bestimmten mit $[\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{x}''', \ldots]$ zu bezeichnenden Art-Bereich $(\mathfrak{S})$ des Gattungs-Bereichs $(\mathfrak{G})$; die *homogenen* ganzen Functionen von $\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{x}''', \ldots$, d. h. diejenigen, welche bei der Darstellung als ganze Functionen kein von $\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{x}''', \ldots$ unabhängiges Glied haben und also homogene ganze *lineare* Functionen der Grössen $\mathfrak{x}$ mit Coefficienten des Art-Bereichs $(\mathfrak{S})$ sind, füllen entweder den ganzen Bereich $(\mathfrak{S})$ aus, oder sie bilden einen Theilbereich $(\bar{\mathfrak{S}})$ von $(\mathfrak{S})$. Da schon die n^{te} Potenz jedes der Elemente $\mathfrak{x}$ sich als ganze ganzzahlige Function $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von $\mathfrak{x}$ darstellen lässt, so genügen alle diejenigen Producte von Potenzen der Elemente $\mathfrak{x}$, in welchen der Exponent kleiner als n ist, um jene homogenen Functionen sämmtlich als homogene ganze ganzzahlige lineare Functionen derselben auszudrücken. Bezeichnet man diese neuen, zur *linearen* Darstellung ausreichenden Elemente mit $\mathfrak{x}_0', \mathfrak{x}_0'', \mathfrak{x}_0''', \ldots$, so bildet

das System $(\mathfrak{x}_0', \mathfrak{x}_0'', \mathfrak{x}_0''', \ldots)$ ein Modulsystem von jener besonderen schon oben erwähnten Beschaffenheit, vermöge welcher sich jede das Modulsystem enthaltende Zahl der Art $\mathfrak{S}$ als homogene lineare Function der Elemente mit ganzzahligen, also dem Stammbereich $\mathfrak{R} = 1$ angehörigen Coefficienten darstellen lässt, und es ist auch für den Zweck dieser besonderen Darstellung offenbar jedem anderen $(\mathfrak{x}_1', \mathfrak{x}_1'', \mathfrak{x}_1''', \ldots)$ äquivalent, welches die Eigenschaft hat, dass jedes der Elemente des einen Systems eine homogene ganze ganzzahlige lineare Function des anderen ist. Denkt man sich nun in dem System $(\mathfrak{x}_0', \mathfrak{x}_0'', \mathfrak{x}_0''', \ldots)$ jedes der Elemente als homogene lineare Function von irgend welchen n derselben $\mathfrak{x}_0', \mathfrak{x}_0'', \ldots \mathfrak{x}_0^{(n)}$, die nur linear unabhängig sein müssen, dargestellt, so sind die Coefficienten rationale, ganze oder gebrochene Zahlen; und wenn man in allen diesen Ausdrücken die ganzzahligen Coefficienten durch Null ersetzt und die gebrochenen Coefficienten auf die durch ganzzahlige Differenzen von ihnen verschiedenen, positiven, echten Brüche reducirt, so resultirt ein äquivalentes System $(\mathfrak{x}_0', \mathfrak{x}_0'', \ldots \mathfrak{x}_0^{(n)}, \mathfrak{x}_1^{(n+1)}, \ldots)$, welches die ersten n Elemente mit dem ursprünglichen System gemein hat. Falls dieses System überhaupt noch aus mehr als n Elementen besteht, so muss der lineare Ausdruck von $\mathfrak{x}_1^{(n+1)}$ durch $\mathfrak{x}_0', \mathfrak{x}_0'', \ldots \mathfrak{x}_0^{(n)}$ wenigstens *eines* dieser n Elemente, z. B. $\mathfrak{x}_0'$, wirklich enthalten. Der Coefficient von $\mathfrak{x}_0'$ in dem linearen Ausdrucke ist dann ein echter Bruch, und es ist also die Discriminante der n ganzen algebraischen Zahlen $\mathfrak{x}_0'', \mathfrak{x}_0''', \ldots \mathfrak{x}_1^{(n+1)}$ kleiner als die Discriminante der ersten n Elemente $\mathfrak{x}_0', \mathfrak{x}_0'', \ldots \mathfrak{x}_0^{(n)}$. Da nun schon in dem System $(\mathfrak{x}_0', \mathfrak{x}_0'', \mathfrak{x}_0''', \ldots)$, von welchem ausgegangen wird, die ersten n Elemente als diejenigen angenommen werden können, deren Discriminante möglichst klein ist, so lässt sich das Resultat der obigen Deduction dahin formuliren,

> dass ein System von $n+1$ oder mehr ganzen algebraischen Zahlen $(\mathfrak{x}_0', \mathfrak{x}_0'', \mathfrak{x}_0''', \ldots)$ entweder durch ein solches ersetzt werden kann, welches nur n von den Elementen $\mathfrak{x}_0$ enthält, oder durch ein solches, in welchem eine der Discriminanten kleiner ist als die kleinste von allen, die aus den Elementen des ersteren Systems zu bilden sind.

Da indessen die Möglichkeit der Verkleinerung der Discriminanten einmal aufhören muss, so folgt schliesslich, dass *jedes* Modulsystem von ganzen algebraischen Zahlen n^{ter} Ordnung $(\mathfrak{x}_0', \mathfrak{x}_0'', \mathfrak{x}_0''', \ldots)$ durch ein Fundamentalsystem $(x', x'', \ldots x^{(n)})$ von nur n Elementen zu ersetzen ist. Für den Fall, dass die Zahl Eins das fundamentale Modulsystem $(x', x'', \ldots x^{(n)})$

enthält, ist dasselbe ein Fundamentalsystem der Art $\mathfrak{S}$ oder des Art-Bereichs $(\mathfrak{S})$.

Wird der Inhalt der vorstehenden Auseinandersetzungen gemäss § 22 von den „Modulsystemen" auf die „Formen" übertragen, so ergiebt sich, dass in dem hier behandelten Falle jede Grundform einer linearen mit nur n Coefficienten absolut äquivalent ist, und es kommt damit für die Theorie der ganzen algebraischen Formen, welche aus dem absoluten Rationalitäts-Bereich $\mathfrak{R} = 1$ hervorgehen, ein neues Element der Entwickelung hinzu. Um dies näher darzulegen, soll hier eine kurze übersichtliche Aufstellung dieser Theorie folgen, welche auch zeigen mag, dass die allgemeineren Resultate sich in der Anwendung auf diesen besonderen Fall vollständig bewähren.

Aus dem absoluten Rationalitäts-Bereich der rationalen Zahlen geht das Gesammtreich der ganzen algebraischen Formen hervor, deren Coefficienten irgend welche ganze algebraische Zahlen sind. Alle ganzen rationalen Functionen von Formen des bezeichneten Formenreichs, speciell auch alle ganzen algebraischen Zahlen, gehören selbst dazu, und man bleibt also bei jeder ganzen rationalen Operation innerhalb des bezeichneten Gebiets. Diesem gesammten Formenreiche selbst, nicht den einzelnen Gattungs- und Art-Bereichen von ganzen algebraischen Formen, welche dasselbe in sich schliesst, gehören die Begriffe des Conjugirt-Seins, der Norm*), des Enthalten-Seins und der absoluten Aequivalenz der Formen an, den einzelnen Art-Bereichen aber die Begriffe der relativen Aequivalenz und der Fundamentalform, und für den Begriff der Irreductibilität der Form ist der Gattungs-Bereich massgebend.

Eine ganze rationale Form ist primitiv, wenn ihre Coefficienten nicht sämmtlich einen gemeinsamen Theiler haben; eine ganze algebraische Form ist primitiv, wenn ihre Norm primitiv ist. In dem hier betrachteten Formenreiche sind alle primitiven Formen *eigentlich* primitiv. Die algebraischen Einheiten werden von der Gesammtheit der primitiven Formen mit umfasst, welche oben auch als Einheitsformen bezeichnet wurden. Eine Form F ist in einer anderen Form F_0 enthalten, wenn jeder Coefficient von F_0 sich als eine ganze lineare homogene Function der Coefficienten von F so darstellen lässt, dass die Coefficienten dieser Function ganze algebraische Zahlen

*) Nur der Begriff der „Partialnorm" gehört der einzelnen Gattung an.

werden (vgl. § 22, I und § 21, II). Die zweite hiermit sich völlig deckende Begriffsbestimmung für das Enthalten-Sein von F in F_0 ist hier fast wörtlich nach § 22, IX' anzufügen: Eine Form F ist in F_0 enthalten, wenn eine primitive Form (Einheitsform) E existirt, für welche das Product $E.F_0$ durch F, im gewöhnlichen Sinne des Wortes, theilbar wird. Zwei Formen sind absolut äquivalent, wenn sie sich gegenseitig enthalten. Jedes der Coefficienten-Systeme äquivalenter Formen ist also durch das andere in linearer homogener Weise mit ganzen algebraischen Coefficienten darstellbar, und der Quotient von zwei äquivalenten Formen ist gleich dem Quotienten von zwei primitiven. Dass Formen mit denselben Coefficienten, die sich also nur durch die Unbestimmten von einander unterscheiden, absolut äquivalent sind, folgt unmittelbar aus der ersteren der beiden Aequivalenz-Bedingungen. Jede primitive Form (Einheitsform) ist äquivalent Eins, also eine „Einheit" im Sinne der absoluten Aequivalenz. In demselben Sinne ist alsdann eine Form F, die in F_0 enthalten ist, als ein Theiler von F_0, und eine lineare homogene Function von zwei oder mehreren Formen $u'F' + u''F'' + \cdots$ mit den unbestimmten Coefficienten $u', u'', \ldots$ als der grösste gemeinschaftliche Theiler von $F', F'', \ldots$ zu bezeichnen.

Bei Festsetzung eines bestimmten Gattungs-Bereichs ($\mathfrak{G}$) ist jede ganze algebraische Form nach § 22, XIII einem unveränderlichen Product irreductibler Formen (Primformen) äquivalent. Bei Festsetzung eines bestimmten *Art-Bereichs* ($\mathfrak{S}$) der Ordnung n ist jede ganze algebraische Form einer linearen Grundform desselben Bereichs absolut äquivalent, also auch speciell einer solchen, die eine lineare Function von nur n Unbestimmten $u', u'', \ldots u^{(n)}$ mit ganzen algebraischen dem Art-Bereich ($\mathfrak{S}$) angehörigen Zahlcoefficienten ist, und es soll fernerhin in diesem Paragraphen der Ausdruck „Grundform" *nur* in der angegebenen engeren Bedeutung gebraucht werden. Primitive lineare Grundformen sind diejenigen, deren Coefficienten ein Fundamentalsystem des Art-Bereichs ($\mathfrak{S}$) bilden und zwar ein solches von nur n Elementen. Ist eine lineare Grundform F in irgend einer Form F_0 enthalten, so lässt sie sich nach § 22, IX in F_0 dadurch transformiren, dass für die Unbestimmten von F *ganzzahlige Formen* mit den Unbestimmten von F_0 substituirt werden, d. h. Formen, deren Coefficienten gewöhnliche ganze Zahlen sind. Wenn F_0 ebenfalls eine lineare Grundform ist, so sind auch die substituirten Formen linear, und es findet daher die Transformirbarkeit in dem gewöhnlichen Sinne des Wortes statt, dass die Form F in F_0 durch eine lineare ganz-

zahlige Substitution übergeführt werden kann. Für die absolute Aequivalenz linearer Grundformen ergiebt sich hieraus als nothwendige und hinreichende Bedingung, dass die eine in die andere durch eine ganzzahlige Substitution mit der Determinante Eins transformirt werden kann. Die Vergleichung mit der obigen auf die Composition gegründeten Aequivalenz-Bedingung führt daher zu dem Schluss, dass die Existenz einer Transformation von

$$\sum_h u^{(h)} x^{(h)} \quad \text{in} \quad \sum_k v^{(k)} y^{(k)} \qquad (h, k = 1, 2, \dots n)$$

durch eine Substitution

$$u^{(h)} = \sum_k c_{hk} v^{(k)} \qquad (h, k = 1, 2, \dots n)$$

oder

$$y^{(k)} = \sum_h c_{hk} x^{(h)} \qquad (h, k = 1, 2, \dots n)$$

mit ganzzahligen Coefficienten c, deren Determinante gleich Eins ist, zugleich die Existenz von zwei primitiven Formen E, E' mit den Unbestimmten u, v bedingt, für welche die Gleichung

$$(u'x' + u''x'' + \dots + u^{(n)}x^{(n)}) \cdot E = (v'y' + v''y'' + \dots + v^{(n)}y^{(n)}) \cdot E'$$

besteht. Eine solche Gleichung begründet nach § 15 die Aequivalenz der beiden aus den Linearformen gebildeten Divisoren

$$\operatorname{mod}[u'x' + u''x'' + \dots + u^{(n)}x^{(n)}] \sim \operatorname{mod}[v'y' + v''y'' + \dots + v^{(n)}y^{(n)}],$$

und die Entwickelungen a. a. O. geben das Mittel, geeignete primitive Formen E und E' zu bestimmen. Das Product

$$(u'x' + u''x'' + \dots + u^{(n)}x^{(n)}) \cdot \mathrm{Fm}\,(v'y' + v''y'' + \dots v^{(n)}y^{(n)})$$

muss nämlich durch $v'y' + v''y'' + \dots + v^{(n)}y^{(n)}$ theilbar und der Quotient alsdann, ebenso wie die mit Fm bezeichnete Form, primitiv sein. So sind, um ein einfaches Beispiel aus der durch $\sqrt{-31}$ bezeichneten Species ganzer algebraischer Formen anzuführen, die drei Formen

$$5u + (2 + \sqrt{-31})u', \quad (1 + 3\sqrt{-31})v + (1 - 2\sqrt{-31})v', \quad 5w + (1 - 2\sqrt{-31})w'$$

einander absolut äquivalent. Nur die ersten beiden sind Grundformen der Species, die dritte gehört einer darin enthaltenen Species an; desshalb sind auch die Substitutions-Coefficienten bei den Transformationen der ersten beiden in einander und in die dritte gewöhnliche ganze Zahlen, aber bei der Transformation der dritten in eine der beiden ersten sind es ganze algebraische Zahlen der Species. In der That sind

$$\begin{array}{llll} u = -v + v' & v = 2u + u' & u = w + w' & w = u + 2(6 + \sqrt{-31})u' \\ u' = 3v - 2v', & v' = 3u + u'; & u' = -2w', & w' = (4 - \sqrt{-31})u' \end{array}$$

die betreffenden Substitutionen, und die Gleichung

$$\frac{5u+(2+\sqrt{-31})u'}{5v+(1-2\sqrt{-31})v'} = \frac{5uv+(2+\sqrt{-31})u'v+(1+2\sqrt{-31})uv'-(12-\sqrt{-31}\,u'v')}{5v^2+2vv'+25v'^2}$$

legt den Quotienten der ersten und dritten Form als Quotienten von zwei primitiven Formen dar.

Die ganzen algebraischen *Zahlen* der Art 𝔖 und alle ihnen absolut äquivalenten Formen bilden die Hauptclasse derselben. Zwei Formen der Art 𝔖 sind einander relativ äquivalent, wenn sie, mit Formen der Hauptclasse multiplicirt, einander absolut äquivalent werden, d. h. also wenn sie sich im Sinne der absoluten Aequivalenz nur durch algebraische Zahlfactoren von einander unterscheiden. Im Sinne der relativen Aequivalenz verhalten sich also die Formen der Hauptclasse wie Einheiten (vgl. § 23, I'). Die Gesammtheit unter einander relativ äquivalenter Formen bildet je eine Formenclasse der Art 𝔖. Nach der zweiten, in § 23, II gegebenen Definition sind zwei Formen relativ äquivalent, wenn die *Verhältnisse* der Coefficienten je einer derselben in diejenigen der Coefficienten der anderen durch eine lineare Substitution mit ganzen algebraischen Zahlcoefficienten des Art-Bereichs (𝔖) transformirbar sind. Wendet man diese Aequivalenz-Bestimmung auf die linearen Grundformen mit n Coefficienten an, so ergiebt sich als nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass

$$u'x'+u''x''+\cdots+u^{(n)}x^{(n)} \quad \text{relat. aequ.} \quad v'y'+v''y''+\cdots+v^{(n)}y^{(n)}$$

ist, die Existenz einer Substitution

$$x':x'':\ldots:x^{(n)} = \sum_k c_{1k}y^{(k)} : \sum_k c_{2k}y^{(k)} : \ldots : \sum_k c_{nk}y^{(k)} \qquad (k=1,2,\ldots n),$$

bei welcher die n^2 Coefficienten c ganze Zahlen mit der Determinante Eins sind. Diese Aequivalenz-Bedingung ist besonders hervorzuheben, insofern eine völlig neue Auffassungs- und Behandlungsweise der ganzen algebraischen Zahlen eines bestimmten Art-Bereichs (𝔖) darauf gegründet werden kann. Die ganze Theorie charakterisirt sich dann als eine solche der *Proportionen* von n Zahlen der festgesetzten Species, welche begrifflich in Systeme zusammen zu fassen sind. Ich beabsichtige in einer nächsten Abhandlung, in welcher ich die *speciellere* Theorie der ganzen algebraischen Zahlen entwickeln werde, auch auf diese Theorie der Proportionen näher einzugehen, und bemerke hier nur noch, dass ich durch meine Untersuchungen über die singulären Moduln der elliptischen Functionen zuerst auf den hier angegebenen Gesichtspunkt aufmerksam geworden bin; denn dort drängten sich

mir die (im Allgemeinen) gebrochenen, durch Gleichungen $ax^2+bx+c=0$ definirten algebraischen Zahlen x, also die Verhältnisse zweier *ganzen* algebraischen Zahlen bestimmter Art, als Gegenstand arithmetischer Behandlung auf, und zwar in der Weise, dass die Aequivalenz-Bestimmung zweier durch die Gleichungen $ax^2+bx+c=0$, $a_0x_0^2+b_0x_0+c_0=0$ erklärten algebraischen Zahlen x und x_0 mit derjenigen der quadratischen Formen (a, b, c), (a_0, b_0, c_0) übereinkommt.

Gemäss der *dritten* in § 23, III aufgestellten Definition sind zwei lineare Grundformen (von n Gliedern) relativ äquivalent, wenn sie nach Multiplication mit ganzen algebraischen Zahlen der Species $\mathfrak{S}$ durch lineare Substitutionen, deren Coefficienten gewöhnliche ganze Zahlen sind, in einander transformirt werden können. Diese Definition ist unmittelbar auf die zerlegbaren homogenen Formen n^{ten} Grades anzuwenden, welche aus den linearen Grundformen entstehen. Es seien nämlich

$$u'x'+u''x''+\cdots+u^{(n)}x^{(n)}, \quad v'y'+v''y''+\cdots+v^{(n)}y^{(n)}$$

einander relativ äquivalente lineare Grundformen der Species $\mathfrak{S}$; ferner seien x^0, y^0 ganze algebraische Zahlen der Species $\mathfrak{S}$, und es gehe

$$y^0(u'x'+u''x''+\cdots+u^{(n)}x^{(n)})$$

in

$$x^0(v'y'+v''y''+\cdots+v^{(n)}y^{(n)})$$

mittels einer Substitution

$$u^{(h)} = c_{h1}v'+c_{h2}v''+\cdots+c_{hn}v^{(n)} \qquad (h=1, 2, \ldots n)$$

über, bei welcher die n^2 Substitutions-Coefficienten c_{hi} gewöhnliche ganze Zahlen mit der Determinante *Eins* sind, so dass die Gleichung

$$(A) \qquad y^0.\sum_h u^{(h)}x^{(h)} = x^0.\sum_k v^{(k)}y^{(k)} \qquad (h, k=1, 2, \ldots n)$$

unter der Transformations-Bedingung

$$(B) \qquad u^{(h)} = \sum_k c_{hk}v^{(k)}, \quad |c_{hk}|=1 \qquad (h, k=1, 2, \ldots n)$$

besteht. Wird nun in (A) auf beiden Seiten die Norm genommen und zur Abkürzung

$$\text{Nm}\, x^0 = X, \quad \text{Nm}\, y^0 = Y,$$

ferner gemäss den Bezeichnungen in § 14:

$$\text{Nm}(u'x'+u''x''+\cdots+u^{(n)}x^{(n)}) = P.\text{Fm}(u'x'+u''x''+\cdots+u^{(n)}x^{(n)}),$$
$$\text{Nm}(v'y'+v''y''+\cdots+v^{(n)}y^{(n)}) = Q.\text{Fm}(v'y'+v''y''+\cdots+v^{(n)}y^{(n)})$$

gesetzt, so resultirt die Gleichung

$$P.Y.\mathrm{Fm}(u'x'+u''x''+\cdots+u^{(n)}x^{(n)}) = Q.X.\mathrm{Fm}(v'y'+v''y''+\cdots+v^{(n)}y^{(n)}),$$

und es muss daher, da beide mit Fm bezeichneten Formen primitiv sind,

$$\mathrm{Fm}(u'x'+u''x''+\cdots+u^{(n)}x^{(n)}) = \mathrm{Fm}(v'y'+v''y''+\cdots+v^{(n)}y^{(n)})$$

sein, d. h. die eine dieser Formen muss in die andere durch die Substitution (B) übergehen. Die primitiven Formen

$$\mathrm{Fm}(u'x'+u''x''+\cdots+u^{(n)}x^{(n)})$$

sind nichts Anderes als die *„allgemeinen, in Linearfactoren zerlegbaren, homogenen ganzen ganzzahligen Formen mit einer ihrer Dimension gleichen Anzahl von Unbestimmten"*; es sind dies diejenigen Formen, welche bisher hauptsächlich für die Verallgemeinerung der binären quadratischen Formen ins Auge gefasst worden sind. Da jedoch die Theorie derselben aus derjenigen der linearen Grundformen unmittelbar resultirt, so charakterisirt sie sich nur als ein gewisser *Theil* der allgemeinen Theorie der *„ganzen algebraischen Formen"*. Aber diese Theorie hat nicht bloss den Vortheil grösserer Allgemeinheit für sich, sondern sie entspricht auch nicht minder den leitenden Gedanken der *Gauss*schen Einführung von Unbestimmten in die Arithmetik als denjenigen der *Kummer*schen Schöpfung der idealen Zahlen, und indem sie einerseits die Anwendung der unbestimmten Grössen überhaupt weiter entwickelt, andererseits die idealen Divisoren zu wirklichen algebraischen Ausdrücken mit unbestimmten Grössen umbildet, vermittelt sie die beiden „entgegengesetzten" Auffassungen der Theorie der zerlegbaren Formen und derjenigen der complexen Zahlen. Mit derselben Uebersichtlichkeit wie bei den *Kummer*schen idealen Zahlen lassen sich bei den ganzen algebraischen Formen alle aus der Compositions-Theorie hervorgehenden Resultate entwickeln, und ich habe dies schon in einer an Herrn *Schering*s Abhandlung über die Fundamentalclassen*) anknüpfenden Arbeit**) gezeigt, in welcher — nach der hier eingeführten Terminologie ausgedrückt — gewisse Beziehungen zwischen der Classenanzahl ganzer algebraischer Formen einer Gattung und derjenigen von Formen „enthaltener" Gattungen dargelegt sind. Aus denselben Principien lässt sich die einer elementareren Sphäre angehörige Bestimmung des Verhältnisses der Classenanzahlen für die verschiedenen Arten einer Gattung

*) „Die Fundamentalclassen der zusammensetzbaren arithmetischen Formen" von *Ernst Schering* (Abhandlungen d. Königl. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen, Bd. XIV, 1869).

**) Monatsbericht der Berliner Akad. d. Wissensch. 1. Dec. 1870.

herleiten, und zwar desshalb in so einfacher Weise, weil die zu den Fundamentalclassen der Haupt-Art $\mathfrak{S}$ bei irgend einer anderen Art $\overline{\mathfrak{S}}$ hinzukommenden Classen nur Formen enthalten, welche Producte von primitiven Formen und von solchen ganzen algebraischen Zahlen der Haupt-Art $\mathfrak{S}$ sind, die sich in der Art $\overline{\mathfrak{S}}$ nur als gebrochene Zahlen darstellen lassen.

Die verschiedene Dichtigkeit in verschiedenen Classen zerlegbarer Formen wird in der ersten *Kummer*schen Abhandlung mit Recht als ein wesentlicher Mangel der Theorie der zerlegbaren Formen gegenüber der Theorie der complexen Zahlen bezeichnet. Dieser Mangel rührt davon her, dass die Linearfactoren, welche als „ganze algebraische Formen" für sich zu behandeln sind, in den zerlegbaren Formen durch die Multiplication confundirt werden. Die ganzen algebraischen Formen haben also mit den *Kummer*schen idealen Zahlen auch den Vorzug gemein, dass ihre Dichtigkeit in jeder Classe dieselbe ist. Diese Vorbedingung eines sachgemässen Begriffes der Classenanzahl findet sich nämlich bei zerlegbaren Formen nicht erfüllt, wenn die conjugirten Linearfactoren nicht sämmtlich verschiedenen Gattungen angehören, und wenn die gewöhnliche (auf die lineare Transformation mit der Substitutions-Determinante Eins basirte) Aequivalenz-Bestimmung nicht modificirt wird. *Gauss* hat bei den quadratischen Formen eine solche Modification eingeführt, indem er die *„eigentliche* Aequivalenz" durch die Bedingung positiver Substitutions-Determinanten beschränkt; diese Weise der Beschränkung passt freilich nicht für Formen, welche mehr als zwei Unbestimmte enthalten, aber es lassen sich dann andere geeignete Beschränkungen aufstellen, und das massgebende Princip für die einzuführende Aequivalenz-Bestimmung ist,

> dass auf Grund derselben jede der Classen gleich dicht und ihre Anzahl möglichst klein werde.

Die ganzen algebraischen Formen haben endlich vor den zerlegbaren Formen das voraus, dass sie allen rationalen Rechnungsoperationen — nicht, wie diese, bloss dem in der Composition enthaltenen Multiplications-Verfahren — unterworfen werden können; sie können also, genau so wie gewöhnliche ganze Zahlen oder wie ganze Functionen von Variabeln, zu einander addirt, mit einander multiplicirt und auch durch einander dividirt werden, und wenn alsdann die Rechnungsresultate, d. h. die aus der Rechnung hervorgehenden Formen durch die ihnen absolut äquivalenten linearen Grundformen ersetzt werden, so tritt an die Stelle der Gleichheit die Aequivalenz.

§ 25.

Die Fundamentalgleichungen; die Discriminanten-Formen und ihre Divisoren der verschiedenen Stufen.

Wenn mit $x', x'', \ldots x^{(n+m)}$, wie in § 8, die Elemente eines Fundamentalsystems der Art $\mathfrak{S}$ bezeichnet und die n Conjugirten jedes Elements durch untere Indices von einander unterschieden werden, so bilden die $n(n+m)$ ganzen algebraischen Grössen

$$x_i^{(k)} \qquad (i=1,2,\ldots n;\ k=1,2,\ldots n+m)$$

ein System, aus welchem das fundamentale System der Discriminanten hervorgeht, wenn man die verschiedenen Determinanten n^{ter} Ordnung des Systems $x_i^{(k)}$ bildet und jede derselben zum Quadrat erhebt. Nun ist schon a. a. O. eine „Form" gebildet worden, welche dieses Discriminanten-System vertritt, indem ein System von $m(m+n)$ „Unbestimmten"

$$x_h^{(k)} \qquad (h=n+1,n+2,\ldots n+m;\ k=1,2,\ldots n+m)$$

eingeführt und alsdann das Determinanten-Quadrat

$$|x_{k'}^{(k)}|^2 \qquad (k,k'=1,2,\ldots n+m)$$

gebildet wurde. Es ist dies gemäss der Definition § 15, I eine ganze (rationale) Form des natürlichen Bereichs $[\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots]$ mit den $m(m+n)$ Unbestimmten $x_{n+1}^{(k)}, x_{n+2}^{(k)}, \ldots x_{n+m}^{(k)}$, und diese kann durch jede ihr absolut äquivalente Form, z. B. auch durch eine lineare, ersetzt werden. Eine solche Form soll nunmehr als „***Discriminanten-Form*** der Art $\mathfrak{S}$ oder des Art-Bereichs $(\mathfrak{S})$" bezeichnet werden; denn sie repräsentirt — wie die Darlegungen in § 8, verbunden mit den Entwickelungen in § 22, ergeben — den Complex der sämmtlichen Discriminanten des Art-Bereichs. Nämlich:

I. Die Discriminanten-Form ist der grösste gemeinschaftliche Theiler aller Discriminanten von je n ganzen algebraischen ***Formen*** des Art-Bereichs und als solcher dessen vollständige Invariante.

Wenn für einen Art-Bereich $(\mathfrak{S})$ ein Fundamentalsystem von nur n Elementen existirt, so gehört die Discriminanten-Form der Hauptclasse an, und an ihre Stelle tritt dann jene ganze rationale Form von $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots$, welche in § 8 „die Discriminante der Art" genannt worden ist.

Nach der im Anfange des vorigen Paragraphen aufgestellten Definition repräsentirt der Ausdruck

$$u'x' + u''x'' + \cdots + u^{(n+m)}x^{(n+m)}$$

eine „lineare, eigentlich primitive Fundamentalform" mit den Unbestimmten u, und soll, weil er die Art $\mathfrak{S}$ repräsentirt, wenn an Stelle der Unbestimmten u ganze Grössen des natürlichen Bereichs $[\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots]$ treten, einfach mit $\mathfrak{S}$ bezeichnet werden. Wird das Product

$$\prod_i (x - u' x_i' - u'' x_i'' - \cdots - u^{(n+m)} x_i^{(n+m)}) \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

mit $\mathfrak{F}(x)$ und das Product

$$\prod_h (x - u' x_h' - u'' x_h'' - \cdots - u^{(n+m)} x_h^{(n+m)}) \qquad (h = n+1, n+2, \ldots n+m),$$

in welchem die Grössen x_h, wie oben, $m(m+n)$ Unbestimmte bedeuten, mit $F(x)$ bezeichnet, so genügt jene mit $\mathfrak{S}$ bezeichnete eigentlich primitive Fundamentalform der Gleichung

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{S}) = 0,$$

welche desshalb die *„Fundamentalgleichung* des Art-Bereichs $(\mathfrak{S})$" genannt werden soll.

Dem in § 8 aufgestellten Determinantensatze kann auf Grund der späteren Entwickelungen eine einfachere Fassung gegeben werden. Dort lautete nämlich der Satz so, dass die $n(n-1)^{\text{te}}$ Potenz der Determinante von n linearen Ausdrücken

$$\sum_k a_{ik} u_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

eine lineare ganze homogene Function der Coefficienten Φ ist, welche bei der Entwickelung des Productes

$$\prod_{h,i} \Big(\sum_k a_{hk} u_k - \sum_k a_{ik} u_k\Big) \qquad (h, i, k = 1, 2, \ldots n;\ h \gtrless i)$$

auftreten. Da hiernach $|a_{ik}|^{n(n-1)}$ für das „Modulsystem" Φ congruent Null, also auch durch jede *Form* theilbar ist, deren Coefficienten die Elemente dieses Modulsystems sind, so ist

$$|a_{ik}|^{n(n-1)} \ \textit{theilbar durch} \ \prod_{h,i} \Big(\sum_k a_{hk} u_k - \sum_k a_{ik} u_k\Big) \qquad (h, i, k = 1, 2, \ldots n),$$

im Sinne der absoluten Aequivalenz.

Die Discriminante der Gleichung $\mathfrak{F}(x) = 0$ ist ein Theiler der Discriminante der Gleichung $\mathfrak{F}(x) . F(x) = 0$, und diese wiederum, gemäss jenem Determinantensatze, wie er hier formulirt worden ist, ein Theiler von

$$|x_{k'}^k|^{n(n-1)} \qquad (k, k' = 1, 2, \ldots n).$$

Mit Benutzung des obigen Satzes I folgt also der Satz:

II. Für jeden Art-Bereich ist die Discriminante der Fundamentalgleichung ein Theiler der $\frac{1}{2}n(n-1)^{\text{ten}}$ Potenz der Discriminanten-Form, und enthält daher ausser der Discriminanten-Form selbst nur noch Theiler derselben.

Werden alle einzelnen Elemente des Fundamentalsystems $x', x'', x''', \ldots$ als ganze Functionen $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von $\mathfrak{S}$ ausgedrückt, so erscheinen die Coefficienten als Brüche, und zwar als ganze rationale Formen des Bereichs $[\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots]$, dividirt durch die Discriminante der Fundamentalgleichung. In der reducirten Gestalt haben diese Brüche also nur solche Nenner, welche Theiler der Discriminante der Fundamentalgleichung sind. Denkt man sich alle diese Nenner, welche ganze ganzzahlige Functionen der Variabeln $\mathfrak{R}$ und der Unbestimmten u sind, nach § 4 in ihre irreductibeln Factoren zerlegt, und dieselben in zwei Gruppen gesondert, von denen die eine die (eigentlich oder uneigentlich) primitiven *Formen* (mit den Unbestimmten u), die andere die rationalen *Grössen* des Bereichs $[\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots]$ umfasst, so kann die Discriminante der Fundamentalgleichung nur in *dem* Falle, nach Division durch die Discriminanten-Form, noch Theiler derselben enthalten, wenn überhaupt Factoren jener zweiten Gruppe vorkommen. Ist dies also nicht der Fall, so ist die Discriminante der Fundamentalgleichung der Discriminanten-Form äquivalent, wenigstens in jenem früheren weiteren Sinne, dass sich die eine von der anderen nur durch Factoren unterscheidet, welche (eigentlich oder uneigentlich) primitive Formen sind. Man findet aber leicht Beispiele von Art-Bereichen, für welche eine solche Aequivalenz nicht besteht, also die Discriminante der Fundamentalgleichung einzelne irreductible Divisoren der Discriminanten-Form, und zwar solche erster Stufe, in grösserer Anzahl enthält, als die Discriminanten-Form selbst. Anders verhält es sich bei der Haupt-Art, welche nunmehr allein betrachtet werden soll.

Sind $x', x'', \ldots x^{(n+m)}$ die Elemente des Fundamentalsystems der Haupt-Art $\mathfrak{S}$ oder der Gattung $\mathfrak{G}$, so soll die lineare eigentlich primitive Fundamentalform

$$u'x' + u''x'' + \cdots + u^{(n+m)}x^{(n+m)},$$

weil sie alle ganzen algebraischen Grössen der Gattung repräsentirt, mit $\mathfrak{G}$ bezeichnet werden. Wird nun für eine Variable $\mathfrak{R}$

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{R}) = \prod_i (\mathfrak{R} - u'x_i' - u''x_i'' - \cdots - u^{(n+m)}x_i^{(n+m)}) \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

gesetzt, die Discriminante der Gleichung $\mathfrak{F}(\mathfrak{R}) = 0$ mit $\mathfrak{D}$ und das Determinanten-Quadrat

$$|x_{k'}^{k}|^2 \qquad (k, k' = 1, 2, \ldots n)$$

mit D bezeichnet, so soll

$\mathfrak{F}(\mathfrak{R}) = 0$ die „Fundamentalgleichung *der Gattung*",

$\mathfrak{D}$ die „Discriminante der Fundamentalgleichung *der Gattung*" und

D die „Discriminanten-Form *der Gattung*"

genannt werden. Nach dem obigen Satze I ist alsdann D der grösste gemeinschaftliche Theiler aller Discriminanten der Gattung, also auch ein Theiler von $\mathfrak{D}$, und nach dem Satze II ist $\mathfrak{D}$ wiederum ein Theiler von $D^{\frac{1}{2}n(n-1)}$. Bedeutet nun $\mathfrak{H}$ eine ganze algebraische Form, welche aus der Form $\mathfrak{G}$ entsteht, wenn die Unbestimmten $u', u'', \ldots$ durch $v', v'', \ldots$ ersetzt werden, unterscheidet man ferner die Conjugirten von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$, den conjugirten Werthen der Elemente x entsprechend, durch untere Indices von einander, so ist

$$\mathfrak{H}_i - \mathfrak{H}_k = \sum_h v^{(h)} (x_i^{(h)} - x_k^{(h)}) \qquad (h=1, 2, \ldots n+m).$$

Dieser Ausdruck stellt eine ganze algebraische Form dar, welche nach § 17, II durch den algebraischen Divisor

$$\operatorname{mod}[\sum_h u^{(h)} (x_i^{(h)} - x_k^{(h)})] \quad \text{oder} \quad \operatorname{mod}[\mathfrak{G}_i - \mathfrak{G}_k] \qquad (h=1, 2, \ldots n+m)$$

theilbar ist, und nach der in § 14 eingeführten Bezeichnungsweise ist daher

$$\frac{\mathfrak{H}_i - \mathfrak{H}_k}{\mathfrak{G}_i - \mathfrak{G}_k} \operatorname{Fm}(\mathfrak{G}_i - \mathfrak{G}_k)$$

eine ganze algebraische Form. Demgemäss ist auch

$$\operatorname{Fm}(\mathfrak{G}_i - \mathfrak{G}_k) . \sum_k \frac{\mathfrak{H}_i - \mathfrak{H}_k}{\mathfrak{G}_i - \mathfrak{G}_k} \qquad (k=1, 2, \ldots i-1, i+1, \ldots n)$$

eine ganze algebraische Form und zwar von der Gattung $\mathfrak{G}_i$. Denkt man sich $\mathfrak{H}$ als ganze Function $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von $\mathfrak{G}$ dargestellt, so erscheinen, wie oben erwähnt, die Coefficienten als Brüche mit Nennern, deren irreductible Factoren dort in zwei Gruppen gesondert worden sind. Die Factoren der ersten Gruppe, welche in den Nennern vorkommen, können nun, da sie primitive Formen sind, weggeschafft werden, wenn $\mathfrak{H}$ mit einer dazu erforderlichen primitiven Form multiplicirt wird. Nachdem dies geschehen, mögen alle diejenigen Glieder der Form weggelassen werden, in welchen die Coefficienten der Potenzen von $\mathfrak{G}$ *ganz* sind. Ist alsdann $\mathfrak{G}^m$ die höchste Potenz von $\mathfrak{G}$, welche in der resultirenden Form, die mit $\mathfrak{H}^0$ bezeichnet werden möge, vorkommt, so ist der Coefficient von $\mathfrak{G}^m$ ein Bruch, dessen Nenner N, da er nur Factoren jener zweiten Gruppe enthält, eine Grösse des Bereichs $[\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots]$ ist. Derselbe Coefficient bildet aber, multi-

plicirt mit $(n-m)$, den Coefficienten von $\mathfrak{G}^{m-1}$, d. h. der höchsten Potenz von $\mathfrak{G}$, in der Form

$$\mathrm{Fm}(\mathfrak{G}_i-\mathfrak{G}_k).\sum_k \frac{\mathfrak{H}_i^0-\mathfrak{H}_k^0}{\mathfrak{G}_i-\mathfrak{G}_k} \qquad (k=1,2,\ldots i-1,i+1,\ldots n),$$

und wenn also der Nenner N nicht eine in $(n-m)$ enthaltene Zahl ist, so kann aus dieser Form auf die angegebene Weise eine neue gebildet werden, welche in Beziehung auf $\mathfrak{G}$ nur vom $(m-2)^{\text{ten}}$ Grade ist. Solche Formen können aber nicht von beliebig kleinem Grade m existiren, namentlich nicht solche, für welche $m=0$ ist, und es ergiebt sich demnach, dass, wenn die mit $x', x'', \ldots$ bezeichneten Elemente der Form $\mathfrak{H}$ als ganze Functionen von $\mathfrak{G}$ dargestellt werden, in den Coefficienten als Nenner nur eigentlich primitive Formen und solche Factoren der Discriminanten-Form auftreten können, welche uneigentlich primitive Formen mit den Unbestimmten u oder ganze Zahlen aus der Reihe $2, 3, \ldots n-2$ sind. Diese Zahlenreihe kann noch weiter beschränkt werden, aber statt hierauf näher einzugehen, soll die wichtigere Bemerkung angefügt werden, dass diese Zahlenreihe und demnach die zweite Alternative überhaupt wegfällt, wenn die Gattung $\mathfrak{G}$ keine Conjugirte hat, also eine *Galois*sche Gattung ist. In diesem Falle kann nämlich die Form

$$\frac{\mathfrak{H}_i^0-\mathfrak{H}_k^0}{\mathfrak{G}_i-\mathfrak{G}_k}\,\mathrm{Fm}(\mathfrak{G}_i-\mathfrak{G}_k)$$

selbst, weil sie alsdann ebenfalls zur Gattung $\mathfrak{G}$ gehört, an Stelle der oben daraus gebildeten Summe, zur Reduction verwendet werden, und wenn man diese aus $\mathfrak{H}^0$ gebildete Form mit $\mathfrak{H}'$ bezeichnet, dann aus $\mathfrak{H}'$ ebenso eine Form $\mathfrak{H}''$ u. s. w. bildet, so reducirt sich $\mathfrak{H}^{(m)}$ einfach auf den Coefficienten, welcher in $\mathfrak{H}^0$ mit $\mathfrak{G}^m$ multiplicirt ist. Da dieser Coefficient hiernach eine ganze rationale Grösse des Bereichs sein muss, so kann ein Nenner N der zweiten Gruppe überhaupt nicht vorkommen. Die vorstehende Deduction stimmt ihrem wesentlichen Inhalte nach mit derjenigen überein, welche ich in § 5 meiner Abhandlung „über die Discriminante algebraischer Functionen einer Variabeln*)“ gegeben habe; aber mit Hülfe der in der vorliegenden Arbeit enthaltenen Entwickelungen konnte die Darstellung vereinfacht und der Kern der Sache bloss gelegt werden. Die Deduction zeigt,

---

*) Journal für Mathematik, Bd. 91, S. 301 sqq.

III. dass für irgend eine Gattung $\mathfrak{G}$ die Discriminante der Fundamentalgleichung $\mathfrak{D}$ entweder mit der Discriminanten-Form der Gattung D im Sinne der vollständigen absoluten Aequivalenz (§ 22, X^{0}) übereinstimmt oder doch, in demselben Sinne der Aequivalenz, ausser D selbst nur noch solche Divisoren von D enthalten kann, welche Formen höherer als erster Stufe oder — falls die Gattung $\mathfrak{G}$ Conjugirte hat — Zahlen aus der Reihe 2, 3, ... $n-2$ sind.

Ob in Wirklichkeit solche überflüssigen Zahlentheiler in der Discriminante der Fundamentalgleichung vorkommen, habe ich noch nicht ermitteln können; ich habe mich vergeblich bemüht ein Beispiel dafür aufzufinden, habe aber ebensowenig vermocht das Gegentheil zu beweisen. Jene Beschränkung ist also vielleicht unnöthig; im Wesentlichen hat das aus dem obigen (III) abzuleitende fernere Resultat,

IV. dass die gesammte arithmetische Theorie der algebraischen Grössen auf eine Theorie der ganzen ganzzahligen Functionen von Variabeln und Unbestimmten zurückgeführt werden kann,

seine Geltung; es ist für die früher allein betrachteten Divisoren erster Stufe auch von jeder Einschränkung zu befreien, und weil es auf diese angewendet und an denselben näher erläutert werden soll, möge es hiermit specieller formulirt werden:

IV^{0}. Die arithmetische Theorie der algebraischen Grössen eines durch $(\mathfrak{G}, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \dots \mathfrak{R}^{(n-1)})$ bezeichneten Gattungs-Bereichs ist durch die Theorie der ganzen rationalen *„Formen"* eines natürlichen Rationalitäts-Bereichs von $\mathfrak{n}$ Variabeln $(\mathfrak{R}^{0}, \mathfrak{R}', \dots \mathfrak{R}^{(n-1)})$ zu ersetzen, und zwar so, dass dabei an die Stelle der jenem Gattungs-Bereich angehörigen ganzen *algebraischen* Formen $\mathfrak{m}^{\text{ter}}$ Stufe diejenigen ganzen *rationalen* Formen dieses natürlichen Rationalitäts-Bereichs treten, deren Stufenzahl $\mathfrak{m}+1$ ist.

Einzig und allein die Formen höherer als erster Stufe, welche Factoren der Discriminanten-Form von $\mathfrak{G}$ sind, würden da, wo die obige zweite Alternative eintritt, eine besondere Behandlung (z. B. ein Zurückgehen auf eine höhere Gattung) erfordern; für die Formen erster Stufe aber soll jene principiell wichtige Reduction vom Algebraischen auf das Rationale hier vollständig dargelegt werden.

Es bedeute $\mathfrak{F}(\mathfrak{R}) = 0$, wie oben, die Fundamentalgleichung der durch $\mathfrak{G}$ bezeichneten Gattung, so dass $\mathfrak{F}(\mathfrak{G}) = 0$ wird; es sei ferner P eine irre-

ductible ganze rationale Function der Variabeln $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$, $\mathfrak{R}'''$, ..., also eine Grösse des Rationalitäts-Bereichs $[\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots]$, und es sei endlich mit $F(\mathfrak{R})$ irgend eine ganze Function von $\mathfrak{R}$, deren Coefficienten Grössen desselben Bereichs $[\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots]$ sind, d. h. also eine ganze ganzzahlige Function von $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$, $\mathfrak{R}'''$, ... bezeichnet. Alsdann lässt sich die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass

$$\mathrm{Nm}\, F(\mathfrak{S}) \equiv 0 \pmod{P}$$

sei, dadurch ausdrücken, dass die beiden Formen

$$P + \mathfrak{v}\mathfrak{F}(\mathfrak{R}), \quad P + vF(\mathfrak{R})$$

einen gemeinschaftlichen Theiler zweiter Stufe haben. Ist dies nämlich nicht der Fall, so kann die Resultante der Elimination von $\mathfrak{R}$ aus $\mathfrak{F}(\mathfrak{R})$ und $F(\mathfrak{R})$ nicht durch P theilbar sein, und da dieselbe in der Form

$$\Phi(\mathfrak{R})F(\mathfrak{R}) + \Psi(\mathfrak{R})\mathfrak{F}(\mathfrak{R})$$

dargestellt werden kann, so ist sie auch gleich $\Phi(\mathfrak{S})F(\mathfrak{S})$. Die Norm dieses Products $\mathrm{Nm}\,\Phi(\mathfrak{S}).\mathrm{Nm}\,F(\mathfrak{S})$ ist also die n^{te} Potenz der Resultante und folglich $\mathrm{Nm}\,F(\mathfrak{S})$ nicht durch P theilbar. Wenn aber andererseits jene beiden Formen einen gemeinsamen Theiler zweiter Stufe haben, so muss wenigstens einer der irreductibeln Factoren von $P + \mathfrak{v}\mathfrak{F}(\mathfrak{R})$ in $P + vF(\mathfrak{R})$ enthalten sein. Die erstere der beiden Formen ist eine Form zweiter Stufe, und ihre irreductibeln Factoren sind, wie nachher (S. 117) gezeigt werden soll, sämmtlich von einander verschieden. Wird von Formen höherer als zweiter Stufe abgesehen, d. h. werden diese äquivalent Eins angenommen, so wie es bei den algebraischen Divisoren in §§ 14 sqq. schon mit den Formen zweiter Stufe geschah, so lässt sich die Zerlegung durch folgende Aequivalenz darstellen:

$$(A) \qquad P + \mathfrak{v}\mathfrak{F}(\mathfrak{R}) \sim (P + \mathfrak{v}_1\mathfrak{F}_1(\mathfrak{R}))(P + \mathfrak{v}_2\mathfrak{F}_2(\mathfrak{R}))\ldots,$$

und es ist hiernach die auf alle Wurzeln der Gleichung $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{R}) = 0$ bezogene Norm von $\mathfrak{F}(\mathfrak{R})$ durch P theilbar. Diese Norm ist ihrem absoluten Werthe nach mit $\mathrm{Nm}\,\mathfrak{F}_1(\mathfrak{S})$ identisch, so dass die Congruenz

$$(B) \qquad \mathrm{Nm}(P + \mathfrak{v}_1\mathfrak{F}_1(\mathfrak{S})) \equiv 0 \pmod{P}$$

besteht. Die Voraussetzung, dass die Form $P + \mathfrak{v}\mathfrak{F}(\mathfrak{R})$ in $P + vF(\mathfrak{R})$ enthalten sei, hat demnach in der That die Congruenz

$$\mathrm{Nm}(P + vF(\mathfrak{S})) \equiv 0 \pmod{P}$$

und also schliesslich auch die Congruenz

$$\mathrm{Nm}\, F(\mathfrak{G}) \equiv 0 \pmod{P}$$

zur Folge. — Die obige Zerlegung der Form $P + \mathfrak{v}\,\mathfrak{F}(\mathfrak{R})$ in irreductible Formen zweiter Stufe kann aus der Zerlegung der Congruenz $\mathfrak{F}(\mathfrak{R}) \equiv 0 \pmod{P}$ in ihre (mod. P) irreductibeln Factoren hergeleitet werden. Wird nämlich eine solche Zerlegung durch die Congruenz

$$(C) \qquad \mathfrak{F}(\mathfrak{R}) \equiv f_1(\mathfrak{R})^{n_1} f_2(\mathfrak{R})^{n_2} \dots \pmod{P}$$

dargestellt, in welcher unter den Functionen $f_1(\mathfrak{R})$, $f_2(\mathfrak{R})$, ... irreductible, im Sinne der Congruenz modulo P, zu verstehen sind, so bedeutet diese Congruenz nichts Anderes als eine Gleichung

$$(C') \qquad \mathfrak{F}(\mathfrak{R}) = f_1(\mathfrak{R})^{n_1} f_2(\mathfrak{R})^{n_2} \dots + P.\bar{\mathfrak{F}}(\mathfrak{R}).$$

Da $\mathfrak{F}(\mathfrak{R})$ irreductibel ist, so kann der grösste gemeinschaftliche Theiler von $\bar{\mathfrak{F}}(\mathfrak{R})$ und $f_1(\mathfrak{R})^{n_1}$, im Sinne der Congruenz modulo P, nur eine Potenz von $f_1(\mathfrak{R})$ sein, deren Exponent kleiner als n_1 ist, und die Zerlegung von $\bar{\mathfrak{F}}(\mathfrak{R})$ liefert daher eine Gleichung

$$\bar{\mathfrak{F}}(\mathfrak{R}) = f_1(\mathfrak{R})^{m_1} f_2(\mathfrak{R})^{m_2} \dots + P.\bar{\bar{\mathfrak{F}}}(\mathfrak{R}),$$

in welcher $n_1 > m_1$, $n_2 > m_2$, ... ist. Zerlegt man hier wieder $\bar{\bar{\mathfrak{F}}}(\mathfrak{R})$ und fährt dann in derselben Weise fort, so gelangt man schliesslich zu einer Gleichung, in welcher die mit P multiplicirte Function von $\mathfrak{R}$, im Sinne der Congruenz modulo P, keinen der Factoren $f_1(\mathfrak{R})$, $f_2(\mathfrak{R})$, ... mehr enthält. Für einen dieser Factoren z. B. für $f_1(\mathfrak{R})$ resultirt daher eine Gleichung

$$(D) \qquad \mathfrak{F}(\mathfrak{R}) = f_1(\mathfrak{R})^{n_1} \varphi(\mathfrak{R}) + P f_1(\mathfrak{R})^{m_1} \varphi_1(\mathfrak{R}) + P^2 f_1(\mathfrak{R})^{l_1} \varphi_2(\mathfrak{R}) + \dots + P^r \varphi_r(\mathfrak{R}),$$

in welcher $\varphi_r(\mathfrak{R})$, nach dem Modul P betrachtet, keinen Factor mit $\mathfrak{F}(\mathfrak{R})$ gemein hat, also $\mathrm{Nm}\,\varphi_r(\mathfrak{G})$ nicht durch P theilbar ist, und in welcher überdies die Bedingungen

$$n_1 \geqq r, \quad m_1 \geqq r-1, \quad l_1 \geqq r-2, \dots$$

erfüllt sind. Wenn nun in der Gleichung (D) für die Variable $\mathfrak{R}$ der Werth $\mathfrak{G}$ substituirt wird, so resultirt eine Gleichung für den Bruch

$$\frac{P}{f_1(\mathfrak{G})} \mathrm{Nm}\,\varphi_r(\mathfrak{G}),$$

welche denselben als *ganze* algebraische Form charakterisirt, und da dieser Bruch auch als ein solcher mit dem Nenner P dargestellt werden kann,

so folgt, dass P ein Theiler der Discriminanten-Form und zwar, da P eine ganze rationale Grösse des Bereichs ist, zur zweiten Gruppe gehörig sein muss. Nach dem obigen Satze (III) existiren aber solche Theiler nicht, ausser etwa — falls die Gattung $\mathfrak{G}$ Conjugirte hat — Zahlen aus der Reihe $2, 3, \ldots n-2$. Wenn ferner P nicht Theiler der Discriminanten-Form und also auch nicht Theiler der Discriminante der Fundamentalgleichung ist, so ist überhaupt keiner der Exponenten $n_1, n_2, \ldots$ in der Congruenz (C) grösser als Eins. Es ergiebt sich also aus vorstehender Entwickelung, dass — abgesehen von dem Falle, wo P eine der Zahlen $2, 3, \ldots n-2$ und zugleich Theiler der Discriminanten-Form ist, und wo überdies die Gattung $\mathfrak{G}$ Conjugirte hat — stets

> die durch die Gleichung (C^0) definirte Function $\bar{\mathfrak{F}}(\mathfrak{R})$, im Sinne der Congruenz modulo P, relativ prim gegen die Function $\mathfrak{F}(\mathfrak{R})$ und daher $\mathrm{Nm}\,\bar{\mathfrak{F}}(\mathfrak{G})$ nicht durch P theilbar ist.

Das hier entwickelte Resultat begründet die vollkommene Regularität der durch die Congruenz (C) oder durch die Gleichung (C') dargestellten Zerlegung der Congruenz $\mathfrak{F}(\mathfrak{R}) \equiv 0 \pmod{P}$ in ihre irreductibeln Factoren. Es ergiebt sich daraus unmittelbar die Zerlegung von P in die irreductibeln algebraischen Divisoren der Gattung $\mathfrak{G}$, auf welche im Anfange des § 18 (S. 60) hingewiesen worden ist, nämlich

$$(A^0) \qquad P \sim \operatorname{mod}[P + \mathfrak{v}_1 f_1(\mathfrak{G})]^{n_1} . \operatorname{mod}[P + \mathfrak{v}_2 f_2(\mathfrak{G})]^{n_2} \ldots,$$

so wie auch die Zerlegung der Form zweiter Stufe $P + \mathfrak{v}\mathfrak{F}(\mathfrak{R})$ in ihre irreductibeln Factoren:

$$(A') \qquad P + \mathfrak{v}\mathfrak{F}(\mathfrak{R}) \sim (P + \mathfrak{v}_1 f_1(\mathfrak{R})^{n_1})(P + \mathfrak{v}_2 f_2(\mathfrak{R})^{n_2}) \ldots,$$

und es ist also in jener Aequivalenz (A)

$$\mathfrak{F}_1(\mathfrak{R}) = f_1(\mathfrak{R})^{n_1}, \quad \mathfrak{F}_2(\mathfrak{R}) = f_2(\mathfrak{R})^{n_2}, \ldots$$

zu nehmen. Hieraus ist auch, wenn $F(\mathfrak{R})$, wie oben, irgend eine ganze ganzzahlige Function von $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots$ bedeutet, die Zerlegung der Formen

$$(E) \qquad F(\mathfrak{R}) + \mathfrak{v}\mathfrak{F}(\mathfrak{R})$$

(wie bei (A), im Sinne der Aequivalenz) herzuleiten. Unter den irreductibeln Formen zweiter Stufe, welche bei Fixirung von $\mathfrak{F}(\mathfrak{R})$ als Factoren der unendlich vielen Formen (E) auftreten, bilden diejenigen die Hauptclasse (im Sinne der relativen durch Fixirung von $\mathfrak{F}(\mathfrak{R})$ bedingten Aequivalenz, genau übereinstimmend mit der in § 23, I gegebenen Definition), welche unter

den Formen (E) selbst vorkommen, also aus zwei Gliedern bestehen, deren eines $\mathfrak{F}(\mathfrak{R})$ selbst zum Coefficienten hat. Im Uebrigen sind es nämlich Formen $P + \mathfrak{v}_k f_k(\mathfrak{R})^{n_k}$, welche die irreductibeln Factoren der Formen (E) bilden.

Es ist wohl zu beachten, dass die Formen zweiter Stufe $P + \mathfrak{v}_k f_k(\mathfrak{R})^{n_k}$, auch wenn $n_k > 1$ ist, irreductibel sind. Die Zerlegung (A') der Formen $P + \mathfrak{v}\,\mathfrak{F}(\mathfrak{R})$ ergiebt also, wie oben (S. 114) schon im Voraus erwähnt worden ist, stets ungleiche irreductible Factoren; aber bei der Zerlegung (A'') von P in algebraische Divisoren kommen dann und nur dann Divisoren mehrfach vor, wenn P ein irreductibler Factor der Discriminanten-Form ist. Ist dies nämlich nicht der Fall, so sind — wie schon oben (S. 116) hervorgehoben worden — die Zahlen $n_1, n_2, \ldots$ sämmtlich nur gleich Eins. Wenn andererseits P Factor der Discriminanten-Form ist, so muss wenigstens eine der Zahlen grösser als Eins sein, weil dann die Function $\mathfrak{F}(\mathfrak{R})$ mit ihrer nach $\mathfrak{R}$ genommenen Ableitung, im Sinne der Congruenz modulo P, einen gemeinsamen Theiler hat. Der hier bewiesene Satz kann dahin formulirt werden,

> dass von den sämmtlichen irreductibeln ganzen rationalen Grössen eines Bereichs $[\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots]$ nur alle diejenigen, welche Theiler der Discriminanten-Form der Gattung $\mathfrak{G}$ sind, irreductible algebraische Divisoren der Gattung mehrfach enthalten.

Für den Fall, wo die Gattung $\mathfrak{G}$ Conjugirte hat, kann der Satz ohne Weiteres aus der Geltung des Satzes für eine die Gattung $\mathfrak{G}$ enthaltende *Galois*sche Gattung erschlossen werden.

Tritt an Stelle eines beliebigen Rationalitäts-Bereichs $[\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots]$ der absolute der gewöhnlichen ganzen Zahlen, so ist P Primzahl und die oben eingeführte Grösse $\mathfrak{R}$ die einzige Variable; es existiren also keine Formen höherer als zweiter Stufe, und jene Zerlegung (A') der Form zweiter Stufe $P + \mathfrak{v}\mathfrak{F}(\mathfrak{R})$ in ihre irreductibeln Factoren gilt also im Sinne der vollständigen absoluten Aequivalenz (§ 22, X^0). Der Sache nach stimmt jene Zerlegung mit derjenigen der Congruenz $\mathfrak{F}(\mathfrak{R}) \equiv 0 \pmod{P}$ überein, und die Benutzung *dieser* für die Zerlegung (A'') einer Primzahl P in ihre algebraischen Primtheiler oder (nach der *Kummer*schen Ausdrucksweise) in ihre idealen Primfactoren ist ebenso einfach als natürlich. Wie schon in § 19 (S. 69) erwähnt, habe ich gleich im Anfange meiner Beschäftigung mit der Theorie der algebraischen Zahlen den Versuch gemacht, die Theorie der höheren Congruenzen dafür zu benutzen, und wenn man von den Factoren der Discriminante absieht, so gelingt dies auch in der elementarsten und leichtesten

Weise. Denn bei der Uebertragung der *Kummer*schen Definition der idealen Zahlen auf ganzzahlige Functionen einer Wurzel einer ganzzahligen Gleichung $\varphi(x) = 0$ handelt es sich nur darum, für die Coefficienten einer ganzen ganzzahligen Function $\psi(x)$ die linearen Congruenz-Bedingungen aufzustellen, unter denen die Eliminations-Resultante von $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ durch eine Primzahl p theilbar wird; offenbar müssen aber dann $\varphi(x)$ und $\psi(x)$, modulo p betrachtet, einen gemeinsamen Theiler haben, und jene Congruenz-Bedingungen bestehen also einfach darin, dass $\psi(x)$ irgend einen der modulo p irreductibeln Factoren von $\varphi(x)$, im Sinne einer Congruenz modulo p, als Theiler enthalten muss. Es ist dies fast nur eine andere Einkleidung jener elementaren Resultate, welche in der schon in § 21 (S. 80) citirten *Schönemann*schen Abhandlung*) entwickelt sind. Ganz anders verhält es sich aber, wenn die Primfactoren der Discriminante mit in Betracht gezogen werden. Ein Versuch, auch diese in einer Theorie mit zu umfassen, welche auf jener beschränkten Darstellungsweise der complexen Zahlen (als ganze Functionen einer einzigen ganzen algebraischen Zahl) aufgebaut ist, liegt in der *Zolotareff*schen Arbeit vor, die im neusten Bande des *Resal*schen Journals veröffentlicht ist. Dieser Versuch ist aber, wie ich glaube, verfehlt; und nach den von *Zolotareff* im Eingange seiner Arbeit citirten *Dedekind*schen Publicationen aus dem Jahre 1871, in welchen mit voller Klarheit und Schärfe die Nothwendigkeit dargethan ist, jene beschränkte Grundlage der complexen Zahlentheorie aufzugeben, musste ein Versuch, dieselbe dennoch beizubehalten, von vorn herein, als der Natur der Sache widersprechend, aussichtslos erscheinen. Nicht bei irgend einer speciellen Gleichung einer Gattung algebraischer Zahlen, sondern nur bei der ***Fundamentalgleichung***, deren Bildung sich einerseits auf die Construction des Fundamentalsystems und andererseits auf die Association der „Formen" stützt, ist jene Anknüpfung an die Theorie der höheren Congruenzen von Erfolg. Da in dem hier betrachteten Falle des absoluten Rationalitäts-Bereichs die Discriminanten-Form einer gewöhnlichen ganzen Zahl äquivalent ist, so kann diese selbst unter D verstanden werden, und der Quotient $\frac{\mathfrak{D}}{D}$ ist alsdann eine primitive Form mit den Unbestimmten u, welche nur, falls die Gattung $\mathfrak{G}$ Conjugirte hat, noch mit Potenzen von Primfactoren von D, die kleiner als $n-1$ sind, multiplicirt sein kann. Ist dies wirklich der Fall, so hat natürlich auch die

*) Journal f. Mathematik Bd. 31, S. 269.

Discriminante jeder speciellen Zahlengleichung der Gattung $\mathfrak{G}$ dieselben überflüssigen Factoren, aber auch wenn es nicht der Fall und der Quotient $\frac{\mathfrak{D}}{D}$ also nur eine primitive Form ohne Zahlenfactor ist, kann dieselbe doch für alle ganzzahligen Werthe der Unbestimmten u einen und denselben Theiler enthalten; denn dies tritt z. B. ein (vgl. § 8 am Schlusse, S. 25), wenn die primitive Form sich als ganze homogene Function von lauter Ausdrücken $u^p - u$ darstellen lässt und p Primzahl ist. Ein solcher Fall liegt bei einer von Herrn *Dedekind* angegebenen Gattung algebraischer Zahlen vor, die durch die kubische Gleichung $\alpha^3 - \alpha^2 - 2\alpha - 8 = 0$ definirt wird*). Hierbei ist, wenn u eine Unbestimmte bedeutet, $\alpha + \frac{4u}{\alpha}$ Wurzel einer Fundamentalgleichung, und deren Discriminante enthält ausser D nur das Quadrat der primitiven Form $2u^3 + u^2 + u - 2$, welche allerdings für alle ganzzahligen Werthe von u durch 2 theilbar wird. Ich selbst habe bei meiner ersten Beschäftigung mit dieser Theorie im Jahre 1858 ein ähnliches Beispiel bei den dreizehnten Wurzeln der Einheit gefunden. Diese Beispiele zeigen eben nur, dass die Association der Formen nicht bloss in der allgemeinen Theorie der algebraischen Grössen, sondern selbst in der specielleren der algebraischen Zahlen der Natur der Sache entspricht. Doch darf hier nicht unerwähnt bleiben, dass merkwürdiger Weise auch bei dieser elementareren Frage der Darstellung der complexen Zahlen, ganz analog wie bei der höheren Frage der Darstellung ihrer Primtheiler, eine zweite Art der Association, nämlich die von algebraischen Zahlen höherer Ordnung, zu demselben Ziele führt. In der That sieht man leicht, dass die Unbestimmten jener primitiven Form, welche eine Wurzel der Fundamentalgleichung darstellt, stets als ganze *algebraische* Zahlen dem angegebenen Zwecke gemäss bestimmt werden können, und wenn man z. B. oben für u eine dritte Wurzel der Einheit setzt, so wird die primitive Form ihrem absoluten Werthe nach gleich Eins.

Kommen im Rationalitäts-Bereich überhaupt Variable $\mathfrak{R}$ vor, so enthält die Discriminanten-Form stets Formen höherer Stufen als mehrfache

---

*) *R. Dedekind,* „Ueber den Zusammenhang zwischen der Theorie der Ideale und der Theorie der höheren Congruenzen." Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissensch. zu Göttingen. Bd. 23, S. 30.

Theiler; sie bilden „die Singularitäten“ der Discriminanten-Form, deren Untersuchung das grösste Interesse aber auch wohl grosse Schwierigkeiten bietet. Um so mehr ist es hervorzuheben, dass in einer von Herrn *Netto* neuerdings veröffentlichten Arbeit*), welche die algebraischen Probleme ebenfalls, wie es hier geschehen, im Geiste der Arithmetik behandelt, schon eine Reihe von Resultaten jener Art entwickelt sind. Um deren Bedeutung für die allgemeine Theorie der algebraischen Grössen darzulegen, muss ich an die aus einem Rationalitäts-Bereich $(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots \mathfrak{f}_n)$ hervorgehenden Gattungen anknüpfen, welche den Gegenstand der Erörterungen des § 12 bilden. Die ganzen algebraischen Grössen dieser Gattungen sind ganze Functionen der Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ und also algebraische Functionen der mit $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots \mathfrak{f}_n$ bezeichneten elementaren symmetrischen Functionen derselben n Variabeln x. In jeder dieser Gattungen existiren Fundamentalsysteme von nur ebenso viel Elementen, als die Ordnung der Gattung beträgt (vgl. § 12, S. 39), und diese Ordnung ist oben (§ 12, S. 35), wie auch a. a. O. von Herrn *Netto*, mit ϱ bezeichnet worden. An die Stelle der Discriminanten-Form tritt demnach **) eine „Discriminante der Gattung“, und diese ist eine Potenz der Discriminante der Gleichung

$$x^n - \mathfrak{f}_1 x^{n-1} + \mathfrak{f}_2 x^{n-2} - \cdots \pm \mathfrak{f}_n = 0,$$

deren Exponent in der *Netto*schen Arbeit bestimmt wird. Die Discriminante jeder einzelnen Gleichung der Gattung ist durch diese Discriminante der Gattung theilbar, und überdies enthält, wie von Herrn *Netto* gezeigt wird, jede der Gleichungs-Discriminanten (nach der hier angenommenen Terminologie) noch Divisoren-Systeme oder Formen höherer Stufe als Theiler, welche zugleich mehrfache Theiler der Discriminanten-Form selbst sind. Wenn diese *Netto*schen Resultate sich, wie es mir wahrscheinlich ist, auch für die hier eingeführte Fundamentalgleichung verwenden lassen, so würden sie Beiträge zur Erkenntniss jener primitiven Form $\frac{\mathfrak{D}}{D}$ (namentlich in Bezug auf ihre Divisoren höherer Stufe) liefern, welche einen Hauptgegenstand der obigen Entwickelungen (vgl. den Satz III) bildet.

Für einen natürlichen Rationalitäts-Bereich von $n-1$ Variabeln $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots \mathfrak{R}^{(n-1)})$ repräsentirt eine bestimmte Gattung algebraischer Grössen

---

*) *E. Netto*, „Zur Theorie der Discriminanten“. Journal f. Mathematik, Bd. 90, S. 164.

**) Vgl. den oben (S. 108) an den Satz I angeschlossenen Zusatz.

insofern eine ($\mathfrak{n}-1$)-fache Mannigfaltigkeit, als jedem System reeller Werthe der $\mathfrak{n}-1$ Variabeln $\mathfrak{R}$ eine Gattung algebraischer Grössenwerthe $\mathfrak{G}$ entspricht. Das Gleichungssystem, welches dadurch entsteht, dass die Discriminanten-Form D gleich Null gesetzt wird, definirt den „Ort" derjenigen Punkte der ($\mathfrak{n}-1$)-fachen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{R}$, für welche alle Elemente des Fundamentalsystems und daher *alle* Grössen der Gattung mit conjugirten zusammenfallen, wo also der Gattungsbegriff eigentlich aufhört. Dieser Ort ist im Allgemeinen eine ($\mathfrak{n}-2$)-fache Mannigfaltigkeit, aber es können auch „isolirte" Mannigfaltigkeiten geringerer Ausdehnung dazu gehören, wie ich schon an dem Beispiele der durch biquadratische Gleichungen definirten Gattungen gezeigt habe *). Die Mannigfaltigkeiten geringerer Ausdehnung werden von denjenigen Punkten $\mathfrak{R}$ erfüllt, für welche mehr als zwei conjugirte Reihen von Elementen des Fundamentalsystems, z. B. also drei Reihen oder zwei Paare von Reihen, mit einander identisch werden, und alle diese besonderen Mannigfaltigkeiten bilden die „Singularitäten" jener gesammten durch $D=0$ repräsentirten ($\mathfrak{n}-2$)-fachen Mannigfaltigkeit. Die für irgend eine Gattung $\mathfrak{G}$ — also allgemeiner als für eine einzelne *Gleichung* — zu bildenden *Sturm*schen Reihen haben keine andere Bestimmung als die weitere Sonderung der durch die ($\mathfrak{n}-2$)-fache Mannigfaltigkeit $D=0$ von einander abgetrennten ($\mathfrak{n}-1$)-fach ausgedehnten Gebiete, gemäss der Anzahl reeller oder complexer Reihen conjugirter Elemente des Fundamentalsystems, und da diese Gebietstheile nur durch jene Singularitäten von einander geschieden sind, so ist für die Bildung einer *Sturm*schen Reihe ganzer rationaler Functionen der Variabeln $\mathfrak{R}$ allein der Gesichtspunkt massgebend, dass sie, gleich Null gesetzt, ($\mathfrak{n}-2$)-fache Mannigfaltigkeiten darstellen sollen, welche bestimmte von jenen Singularitäten enthalten und im Uebrigen mit der Mannigfaltigkeit $D=0$ nichts gemeinsam haben. ***Die ganze theoretische Bedeutung der Sturmschen Reihen geht hiernach in jenen „Singularitäten der Discriminantenform" vollständig auf*** **); und diese Singularitäten selbst

---

*) Vgl. meine beiden im Monatsbericht der Berliner Akademie vom Febr. 1878 veröffentlichten Mittheilungen, in denen überhaupt den obigen verwandte Entwickelungen gegeben sind.

**) Es ist wohl zu unterscheiden zwischen dem ursprünglichen, klassischen *Sturm*schen *Verfahren* und den später so viel behandelten *Sturm*schen Reihen oder Functionen. Jenes Verfahren bewährt sich gerade auch in denjenigen Entwickelungen, welche über den beschränkten Standpunkt der *Sturm*schen Reihen hinaus führen. (Vgl. meine citirte Mittheilung im Monatsbericht d. Berl. Akademie vom Febr. 1878 S. 149.)

sind — von jenen Hülfsmitteln der Anschauung losgelöst und rein arithmetisch aufgefasst — nichts Anderes als

V. ***die in der Discriminantenform als mehrfache Theiler enthaltenen Formen höherer Stufe.***

Aber diese arithmetische Auffassung greift in derselben Weise über jene „geometrische" hinaus wie in § 22 XIII⁰ (S. 92) bei der Zerlegung einer Form in ihre irreductibeln Factoren, wenn hier wie dort unter den Formen auch solche vorkommen, die für keinerlei Werthsysteme der Variabeln $\mathfrak{R}$ gleich Null werden und sich also der bildlichen geometrischen Darstellung entziehen. Dass aber gerade auch derartige Formen, unter diesen auch reine ***Zahlen,*** als Discriminanten-Theiler wirklich vorkommen und von wesentlicher Bedeutung sein können, dafür habe ich bei meinen arithmetischen Untersuchungen über die singulären Moduln ein Beispiel in den Gleichungen gefunden, von denen die Theilung der elliptischen Functionen mit unbestimmten Moduln abhängt.

Der eigentliche Ausgangspunkt für die vorliegende arithmetische Behandlung der algebraischen Grössen wurde in § 3 durch die Einschränkung der allgemeinsten Rationalitäts-Bereiche gewonnen; aber es mussten dabei die Gattungs-Bereiche noch neben den natürlichen in Betracht gezogen werden. Gleich nach Einführung der Gattungen wurden alsdann in § 8 die charakteristischen Invarianten derselben in den fundamentalen Systemen der Discriminanten ermittelt; aber der dortige Standpunkt gestattete noch keinen Einblick in ihren ganz verschiedenartigen Inhalt. Wenn jetzt in diesem Schlussparagraphen oben (IV) die weitere Einschränkung der Rationalitäts-Bereiche und hier (V) die Erkenntniss der verschiedenen Stufen der in der Discriminanten-Form enthaltenen Divisoren dargelegt werden konnte, so hat die arithmetische Theorie der algebraischen Grössen, indem sie in ihrer weiteren Entwickelung zur grösstmöglichen Vereinfachung und vollständigsten Klärung der eigenen Grundlagen geführt hat, ihre innere Wahrheit und Folgerichtigkeit dargethan.

Ueber die Umformung gewisser Determinanten, welche in der Lehre von den Kegelschnitten vorkommen.

(Von Herrn *F. Caspary.*)

Der nachfolgende Aufsatz beschäftigt sich mit der Umformung gewisser Determinanten, welche der algebraische Ausdruck bekannter, auf Kegelschnitte bezüglicher Sätze sind. Wenn ich mir damit erlaube von neuem auf ein Thema zurückzukommen, welches die Herren ***Hunyady****), ***Mertens*****) und ***Pasch******) eingehend behandelt haben, so geschieht es, weil die veränderte Auffassung der Determinanten, von der ich hier Gebrauch mache, jene Umformungen ganz ausserordentlich vereinfacht und die directe Ueberführung der einen Determinante in alle übrigen sehr erleichtert. Ausserdem scheint mir diese Auffassung der Determinanten, die im wesentlichen von ***Grassmann*** (vergl. ***Ausdehnungslehre***. Berlin 1862. S. 37 flgd.) herrührt, an sich nicht ohne Interesse und insbesondere verwendbar, um bekannte Sätze von Kegelschnitten auf Curven höherer Ordnung und selbst auf Oberflächen auszudehnen.

§ 1.

Erklärungen und vorbereitende Sätze.

Bezeichnet man mit $[pq]$ denjenigen Ausdruck, welcher aus dem algebraischen Product zweier Grössen:

$$(1.)\quad \begin{cases} p = p_1 e_1 + p_2 e_2 + p_3 e_3, \\ q = q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3 \end{cases}$$

---

*) Dieses Journal Bd. 83 S. 76 flgd.
**) Dieses Journal Bd. 84 S. 355 flgd.
***) Dieses Journal Bd. 89 S. 247 flgd.

hervorgeht, wenn für die Producte der e die folgenden Bedingungsgleichungen:

$$(\text{I.})\quad \begin{cases} e_1 e_1 = e_2 e_2 = e_3 e_3 = 0; \\ e_2 e_3 = -e_3 e_2; \quad e_3 e_1 = -e_1 e_3; \quad e_1 e_2 = -e_2 e_1 \end{cases}$$

festgesetzt werden, so erhält man:

$$(2.)\quad [pq] = (p_2 q_3 - p_3 q_2) e_2 e_3 + (p_3 q_1 - p_1 q_3) e_3 e_1 + (p_1 q_2 - p_2 q_1) e_1 e_2,$$

woraus sofort:

$$(3.)\quad [pp] = 0$$

und

$$(4.)\quad [pq] = -[qp]$$

sich ergiebt.

Im Folgenden mögen mit ***Grassmann*** die Grössen e_1, e_2, e_3 als ***Einheiten*** und die Grössen der Form (1.) als ***extensive Grössen*** bezeichnet werden. Von ihnen werde gesagt, sie seien aus den Einheiten e_1, e_2, e_3 durch die ***Ableitungszahlen*** p_1, p_2, p_3; q_1 u. s. w. ***abgeleitet.*** Grössen wie die Ableitungszahlen mögen zur Unterscheidung von den extensiven Grössen ***Zahlgrössen*** heissen. Das unter den Bedingungen (I.) gebildete Product $[pq]$ werde das ***äussere Product*** der beiden ***Factoren*** p und q genannt; die Rechnung selbst heisse ***äussere Multiplication.***

Bedeuten $\varkappa$ und λ zwei Zahlgrössen, so folgt aus (2.) sofort:

$$(5.)\quad [\varkappa p\ \lambda q] = \varkappa\lambda[pq],$$

wobei natürlich $\varkappa$ und λ, wie Zahlgrössen stets, algebraisch mit einander multiplicirt sind.

Wegen (3.), (4.) und (5.) ergiebt sich aus (2.) sehr leicht:

Setzt man:

$$(6.)\quad \begin{cases} a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3, \\ b = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3, \\ c = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3, \\ d = d_1 e_1 + d_2 e_2 + d_3 e_3, \end{cases}$$

und

$$(7.)\quad \begin{cases} k = \varkappa a + \varkappa' b + \varkappa'' c, \\ l = \lambda a + \lambda' b + \lambda'' c, \end{cases}$$

so ist

$$(8.)\quad [kd] = \varkappa[ad] + \varkappa'[bd] + \varkappa''[cd],$$

und

$$(9.)\quad [kl] = (\varkappa'\lambda'' - \lambda'\varkappa'')[bc] + (\varkappa''\lambda - \lambda''\varkappa)[ca] + (\varkappa\lambda' - \lambda\varkappa')[ab].$$

Führt man zur Abkürzung die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\text{(II.)}\quad \begin{cases} e_2e_3 = E_1, \\ e_3e_1 = E_2, \\ e_1e_2 = E_3, \end{cases}$$

und:

$$\text{(10.)}\quad \begin{cases} [pq] = L, \\ p_2q_3-p_3q_2 = L_1, \\ p_3q_1-p_1q_3 = L_2, \\ p_1q_2-p_2q_1 = L_3, \end{cases}$$

so geht (2.) in

$$\text{(11.)}\quad L = L_1E_1+L_2E_2+L_3E_3$$

über. Die Grössen E_1, E_2, E_3 mögen wie die e_1, e_2, e_3 ***Einheiten*** heissen; sollen sie von diesen unterschieden werden, so seien sie als ***Einheiten zweiter Stufe***, jene als ***Einheiten erster Stufe*** bezeichnet. Ebenso mögen Grössen der Form (11.) ***extensive Grössen*** heissen und zwar ***zweiter Stufe*** im Gegensatz zu den extensiven Grössen ***erster Stufe***, welche aus den Einheiten e_1, e_2, e_3 abgeleitet sind. Endlich heisse auch L aus den Einheiten E_1, E_2, E_3 durch die ***Ableitungszahlen*** L_1, L_2, L_3 ***abgeleitet***.

Unterwirft man die Einheiten E_1, E_2, E_3 den analogen Bedingungen, wie sie für die Einheiten e_1, e_2, e_3 bestehen, setzt also fest, dass:

$$\text{(III.)}\quad \begin{cases} E_1E_1 = E_2E_2 = E_3E_3 = 0; \\ E_2E_3 = -E_3E_2; \quad E_3E_1 = -E_1E_3; \quad E_1E_2 = -E_2E_1 \end{cases}$$

sei, so erkennt man, dass sich den Formeln (2.) bis (9.) entsprechende an die Seite stellen lassen, welche aus ihnen hervorgehen, wenn man die kleinen Buchstaben durch grosse ersetzt. Um in allen Fällen Formeln, welche sich auf extensive Grössen erster Stufe beziehen, auf solche zweiter Stufe übertragen zu dürfen, müssen die Einheiten E_1, E_2, E_3 in der nämlichen Weise die Einheiten e_1, e_2, e_3 erzeugen, wie sie selbst aus diesen hervorgehen. Daraus ergiebt sich, dass analog (II.)

$$\text{(IV.)}\quad \begin{cases} E_2E_3 = e_1, \\ E_3E_1 = e_2, \\ E_1E_2 = e_3 \end{cases}$$

sein muss.

Setzt man ferner:

$$\text{(V.)}\quad e_1e_2e_3 = e_2e_3e_1 = e_3e_1e_2 = 1,$$

so ergiebt sich aus (I.) und (II.) das folgende System von Bedingungsgleichungen:

$$\text{(VI.)} \quad \begin{cases} E_1 e_1 = e_1 E_1 = 1, & E_2 e_1 = e_1 E_2 = 0, \quad E_3 e_1 = e_1 E_3 = 0, \\ E_1 e_2 = e_2 E_1 = 0, & E_2 e_2 = e_2 E_2 = 1, \quad E_3 e_2 = e_2 E_3 = 0, \\ E_1 e_3 = e_3 E_1 = 0, & E_2 e_3 = e_3 E_2 = 0, \quad E_3 e_3 = e_3 E_3 = 1, \end{cases}$$

welches bei der jetzt zu behandelnden Multiplication zweier extensiven Grössen erster und zweiter Stufe seine Verwendung findet.

Ehe ich zu dieser Multiplication übergehe, seien noch zwei einfache Relationen hervorgehoben. Erstens folgt aus (II.), (IV.) und (V.), dass auch

$$\text{(VII.)} \quad E_1 E_2 E_3 = E_2 E_3 E_1 = E_3 E_1 E_2 = 1$$

ist, und zweitens ergiebt sich, ***dass wenn***

$$\begin{cases} l = l_1 e_1 + l_2 e_2 + l_3 e_3, \\ m = m_1 e_1 + m_2 e_2 + m_3 e_3 \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} L = L_1 E_1 + L_2 E_2 + L_3 E_3, \\ M = M_1 E_1 + M_2 E_2 + M_3 E_3 \end{cases}$$

gesetzt wird, aus

$$l = m,$$
$$L = M$$

die drei Gleichungen $l_\alpha = m_\alpha$ ***bez.*** $L_\alpha = M_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3$) ***hervorgehen; und umgekehrt, dass diese Gleichungen*** $l = m$ ***bez.*** $L = M$ ***zur Folge haben.*** Diese letztere Behauptung ist an sich einleuchtend, und die erstere ergiebt sich, wenn man $l = m$ bez. $L = M$ der Reihe nach mit E_1, E_2, E_3 bez. e_1, e_2, e_3 multiplicirt und (VI.) beachtet.

Um nun das Product zweier extensiven Grössen, von denen die eine erster, die andere zweiter Stufe ist, zu behandeln, werde wie in (1.):

$$\text{(12.)} \quad \begin{cases} p = p_1 e_1 + p_2 e_2 + p_3 e_3, \\ q = q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3 \\ \text{und ausserdem:} \\ r = r_1 e_1 + r_2 e_2 + r_3 e_3 \end{cases}$$

gesetzt. Dann war nach (2.) und (II.):

$$\text{(13.)} \quad [pq] = (p_2 q_3 - p_3 q_2) E_1 + (p_3 q_1 - p_1 q_3) E_2 + (p_1 q_2 - p_2 q_1) E_3.$$

Multiplicirt man dieses äussere Product mit r, während die Bedingungen

(VI.) gelten, und bezeichnet das Resultat mit $[pqr]$, so ist:

$$(14.)\qquad [pqr] = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}.$$

Nennt man $[pqr]$ das *äussere Product* der drei extensiven Grössen p, q, r, so erkennt man, *dass das äussere Product dreier extensiven Grössen erster Stufe die Determinante ihrer neun Ableitungszahlen ist.* Der nämliche Satz gilt, wie sofort ersichtlich, auch für extensive Grössen zweiter Stufe, so dass wenn:

$$(15.)\qquad \begin{cases} P = P_1E_1+P_2E_2+P_3E_3, \\ Q = Q_1E_1+Q_2E_2+Q_3E_3, \\ R = R_1E_1+R_2E_2+R_3E_3 \end{cases}$$

ist und die Bedingungsgleichungen (III.) und (VII.) bestehen, auch:

$$(16.)\qquad [PQR] = \begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 \\ R_1 & R_2 & R_3 \end{vmatrix}$$

ist. Aus (14.) und (16.) ergiebt sich sofort:

$$(17.)\qquad \begin{cases} [ppr] = 0, \\ [pqr] = -[qpr] = [rpq] \quad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

und ebenso:

$$(18.)\qquad \begin{cases} [PPR] = 0, \\ [PQR] = -[QPR] = [RPQ] \quad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Das äussere Product der Grössen $[pq]$ und r war vorhin mit $[pqr]$ bezeichnet worden, statt mit $[[pq]r]$. Von dieser vereinfachten Bezeichnungsweise, nach welcher nur das Product in eckige Klammern gesetzt wird, nicht aber auch die Factoren, werde ich durchgehends bei allen denjenigen äusseren Producten Gebrauch machen, bei denen einzelne Factoren selber äussere Producte sind. Insbesondere werde ich das äussere Product $[pqr]$, wenn $p = [PP']$, $q = [QQ']$, $r = [RR']$ ist, einfach $[PP'\,QQ'\,RR']$ schreiben.

§ 2.

Die Identität: $[pqR] = [pR]q - [qR]p$. Folgerungen.

Nach diesen Vorbereitungen gehe ich dazu über, eine ausserordentlich einfache, aber für die ganze folgende Untersuchung fundamentale Hilfsformel herzuleiten.

Es sei, wie in (12.), (13.) und (15.):

$$(19.)\quad \begin{cases} p = p_1e_1+p_2e_2+p_3e_3, \\ q = q_1e_1+q_2e_2+q_3e_3, \\ [pq] = (p_2q_3-p_3q_2)E_1+(p_3q_1-p_1q_3)E_2+(p_1q_2-p_2q_1)E_3, \\ R = R_1E_1+R_2E_2+R_3E_3, \end{cases}$$

und es werde das äussere Product aus $[pq]$ und R gebildet, welches nach der am Ende des vorigen Paragraphen gemachten Bemerkung mit $[pqR]$ zu bezeichnen ist. Dann ergiebt sich, wegen (III.) und (IV.):

$$(20.)\quad \begin{cases} [pqR] = ((p_3q_1-p_1q_3)R_3-(p_1q_2-p_2q_1)R_2)e_1 \\ \qquad +((p_1q_2-p_2q_1)R_1-(p_2q_3-p_3q_2)R_3)e_2 \\ \qquad +((p_2q_3-p_3q_2)R_2-(p_3q_1-p_1q_3)R_1)e_3. \end{cases}$$

Da aber die Factoren der Einheiten e_1, e_2, e_3 der Reihe nach sich in:

$$(p_1R_1+p_2R_2+p_3R_3)q_a-(q_1R_1+q_2R_2+q_3R_3)p_a \qquad {\scriptstyle (a=1,2,3)}$$

umformen lassen und nach (VI.):

$$(21.)\quad \begin{cases} p_1R_1+p_2R_2+p_3R_3 = [pR], \\ q_1R_1+q_2R_2+q_3R_3 = [qR] \end{cases}$$

ist, so geht (20.) in:

$$(22.)\quad [pqR] = [pR]q-[qR]p$$

über. Zu dieser Fundamentalformel ist zu bemerken, dass $[pR]$ und $[qR]$, wie aus (21.) ersichtlich, Zahlgrössen sind, also bei weiterer äusserer Multiplication von (22.) mit anderen extensiven Grössen, wie die Zahlgrössen $\varkappa$ und λ in (5.), vor die eckigen Klammern treten.

Von den mannigfachen Folgerungen, welche man aus (22.) ableiten kann, seien hier nur einige erwähnt, welche im Folgenden sehr häufige Verwendung finden.

Setzt man nämlich:

$$p = a,\quad q = b,\quad R = [cd],$$

so folgt aus (22.):

$$[ab\,cd] = [acd]b-[bcd]a.$$

Da aber andererseits:

$$[ab\,cd] = -[cd\,ab] = -[abc]d+[abd]c$$

ist, so ergiebt sich die Identität:

$$[acd]b-[bcd]a = -[abc]d+[abd]c$$

oder

$$(23.)\quad [bcd]a-[acd]b+[abd]c-[abc]d = 0.$$

Multiplicirt man diese Identität äusserlich mit $[ef]$, so folgt wegen (8.):

$$(24.)\quad [bcd][aef]-[acd][bef]+[abd][cef]-[abc][def] = 0,$$

wobei nach (14.):

$$[bcd] = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

u. s. w. ist. Ersetzt man in (24.) die Buchstaben a bis f durch die Ziffern von 1 bis 6 in irgend welcher Anordnung, so erhält man dasjenige Formelsystem, welches Herr *Cayley* Quart. Journ. tom. XV p. 55—57 aufgestellt hat. (Vgl. auch dieses Journal Bd. 83, S. 230.)

Drei andere Formeln, welche ebenfalls später oft gebraucht werden, gehen aus (22.) hervor, wenn man für p, q, R der Reihe nach die Werthe a, b, $[ac]$; a, b, $[bc]$; a, c, $[bc]$ setzt. Man erhält dann:

$$(25.)\quad \begin{cases} [ab\ ac] = [abc]a, \\ [ab\ bc] = [abc]b, \\ [ac\ bc] = [abc]c, \end{cases}$$

weil nach (17.):

$$[aac] = 0, \quad [bac] = -[abc] \quad \text{u. s. w.}$$

ist. Aus (25.) folgt leicht:

$$(26.)\quad [ab\ ac\ bc] = [abc]^2.$$

Analog (22.) erhält man:

$$(27.)\quad [PQr) = [Pr]Q-[Qr]P,$$

wenn:

$$\begin{aligned} P &= P_1E_1+P_2E_2+P_3E_3, \\ Q &= Q_1E_1+Q_2E_2+Q_3E_3, \\ R &= R_1E_1+R_2E_2+R_3E_3 \end{aligned}$$

gesetzt wird. Ausserdem leuchtet ein, dass auch die (25.) und (26.) analogen Formeln für die Grössen A, B, C gelten.

§ 3.

Umformung von $\omega = [ab\,de\;\; bc\,ef\;\; cd\,fa]$.

Stellen die Ableitungszahlen p_1, p_2, p_3; q_1 u. s. w. die homogenen Coordinaten der Punkte p, q, r dar, so zeigt (13.), dass die Ableitungszahlen des äusseren Productes $[pq]$ die Coordinaten der durch die beiden Punkte p und q gelegten Geraden sind. Ferner liefert das äussere Product $[pqr]$ nach (14.) den doppelten Inhalt des Dreiecks, welches die Punkte p, q, r zu Ecken hat; und insbesondere *ist* $[pqr] = 0$ *die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die drei Punkte* p, q, r *in einer Geraden liegen.* Ganz ebenso sind die Ableitungszahlen von $[PQ]$ die Coordinaten des Schnittpunktes der beiden Geraden P und Q, wenn ihre Coordinaten die Ableitungszahlen P_1, P_2, P_3; Q_1 u. s. w. sind; und ebenso stellt $[PQR]$ den doppelten Inhalt des von den drei Geraden P, Q, R umschlossenen Dreiecks dar, *während* $[PQR] = 0$ *die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, dass die drei Geraden* P, Q, R *durch einen Punkt gehen.*

Es seien nun a, b, c, d, e, f sechs Punkte, welche das Sechseck $abcdef$ bilden. Seine drei Paar Gegenseiten sind $ab, de; bc, ef; cd, fa$ und deren drei Schnittpunkte $[ab\,de]$, $[bc\,ef]$, $[cd\,fa]$. Liegen diese drei Punkte in einer Geraden, ist also:

$$[ab\,de\;\; bc\,ef\;\; cd\,fa] = 0,$$

so sind nach dem *Pascal*schen Satze a, b, c, d, e, f sechs Punkte eines Kegelschnittes; und umgekehrt liegen jene sechs Punkte auf einem Kegelschnitt, so ist stets die obige Gleichung erfüllt.

Für die folgenden Umformungen werde die linke Seite obiger Gleichung, bezeichnet durch ω, also:

$$(28.)\qquad \omega = [ab\,de\;\; bc\,ef\;\; cd\,fa]$$

als Ausgangspunkt gewählt. Setzt man in ω den dritten Factor an die erste Stelle und vertauscht in $[ab\,de]$ und $[bc\,ef]$ die Reihenfolge der Factoren, so bleibt nach (17.) ω ungeändert. Man erhält also auch:

$$(29.)\qquad \omega = [cd\,fa\;\; de\,ab\;\; ef\,bc].$$

Setzt man hierin für den Augenblick:

$$[cd] = P,$$
$$[fa] = Q,$$
$$[de\,ab] = r,$$

so folgt wegen (27.):

$$[cd\,fa\ \ de\,ab] = [abd][cde][fa]+[abf][ade][cd],$$

weil nach (25.):

$$[Pr] = [cd\,de\,ab] = [cde][dab] = [abd][cde]$$

und:

$$[Qr] = [fa\,de\,ab] = -[ab\,af\,de] = -[abf][ade]$$

ist. Multiplicirt man die letzte Gleichung noch äusserlich mit $[ef\,bc]$, so erhält man, weil auch:

$$[fa\,ef\,bc] = -[aef][bcf]$$

und:

$$[cd\,ef\,bc] = [bcd][cef]$$

ist:

$$(30.)\quad \omega = -[abd][aef][bcf][cde]+[abf][ade][bcd][cef]\,^{*}).$$

Erwähnt sei noch, dass sich diese Formel auch ergiebt, wenn man in (28.):

$$[ab\,de] = p,$$
$$[bc\,ef] = q,$$
$$[cd] = R$$

setzt, Formel (22.) anwendet und schliesslich mit $[fa]$ äusserlich multiplicirt. Vertauscht man auf der rechten Seite von (30.) a mit c, so gehen die beiden Producte, deren Differenz gleich ω ist, in einander über, jedoch mit veränderten Vorzeichen. Daher folgt, dass, wenn man in (28.) a mit c vertauscht, der entstehende Ausdruck $=-\omega$ wird. Hieraus ergiebt sich:

$$\omega = [ab\,de\ \ bc\,ef\ \ cd\,fa] = -[cb\,de\ \ ba\,ef\ \ ad\,fc]$$

oder auch:

$$(31.)\quad \omega = [ab\,de\ \ bc\,ef\ \ cd\,fa] = -[ad\,fc\ \ de\,cb\ \ ef\,ba].$$

Es werde nun:

$$(32.)\quad \begin{cases} A=[bc], & D=[ef], \\ B=[ca], & E=[fd], \\ C=[ab], & F=[de] \end{cases}$$

gesetzt, und es sei Ω derjenige Ausdruck, welcher aus ω hervorgeht, wenn man $a, b, \dots f$ mit $A, B, \dots F$ vertauscht. Dann ist wegen (28.):

$$(33.)\quad \Omega = [AB\,DE\ \ BC\,EF\ \ CD\,FA],$$

---

*) Vgl. *Hunyady*, dieses Journal Bd. 83, Seite 83, Formel (27.) und auch *Pasch*, dieses Journal Bd. 89, S. 248, Formel (2.).

woraus sofort:

$$\Omega = [abc]^2 [def]^2 [cf\,ad \;\; ab\,ef \;\; de\,bc]$$

oder auch:

$$(34.) \quad \Omega = [abc]^2 [def]^2 [ad\,fc \;\; de\,cb \;\; ef\,ba]$$

hervorgeht, weil wegen (25.) und (32.):

$$[AB] = [abc]c, \quad [DE] = [def]f,$$
$$[BC] = [abc]a, \quad [EF] = [def]d$$

ist. Aus (31.) und (34.) aber folgt:

$$(35.) \quad \begin{cases} \quad [AB\,DE \;\; BC\,EF \;\; CD\,FA] \\ = -[abc]^2 [def]^2 [ab\,de \;\; bc\,ef \;\; cd\,fa], \end{cases}$$

oder auch:

$$(36.) \quad \Omega = -[abc]^2 [def]^2 \omega \text{*)},$$

wenn Ω und $A, B \dots F$ durch (33.) und (32.) definirt sind.

Da die rechte Seite von (28.) bei cyklischer Vertauschung der Buchstaben in ihren negativen Werth übergeht, so ergiebt sich aus (30.):

$$(37.) \quad \omega = -[abc][adf][bef][cde] + [abf][acd][bce][def],$$

woraus bei weiterer cyklischer Vertauschung:

$$(38.) \quad \omega = -[abc][aef][bde][cdf] + [abe][acf][bcd][def]$$

hervorgeht.

Der durch (30.) gegebenen Darstellung von ω lässt sich eine andere an die Seite stellen, welche aus jener hervorgeht, wenn man die Identität (23.):

$$[bcd]a - [acd]b + [abd]c - [abc]d = 0$$

benutzt. Multiplicirt man dieselbe nämlich äusserlich mit $[de]$, so folgt, weil $[dde] = 0$ ist:

$$[ade][bcd] = [acd][bde] - [abd][cde],$$

woraus, wenn man d mit f vertauscht:

$$-[aef][bcf] = -[acf][bef] + [abf][cef]$$

hervorgeht. Multiplicirt man die erste dieser Identitäten mit $[abf][cef]$, die zweite mit $[abd][cde]$ und addirt, so folgt aus (30.):

$$(39.) \quad \omega = -[abd][acf][bef][cde] + [abf][acd][bde][cef],$$

---

*) Vgl. *Mertens,* dieses Journal Bd. 84, Seite 358 und *Pasch,* dieses Journal Bd. 89, Seite 248, Formel 3.

woraus durch cyklische Vertauschung die beiden anderen Formen:

$$(40.)\quad \omega = -[abc][adf][bde][cef]+[abd][acf][bce][def],$$

$$(41.)\quad \omega = -[abd][aef][bce][cdf]+[abe][adf][bcd][cef]$$

hervorgehen.

Die rechten Seiten der Gleichungen (30.) und (39.) bleiben, abgesehen vom Vorzeichen, beide ungeändert, wenn man d und f vertauscht, während eine Vertauschung von a mit c oder von b mit e die erste derselben, und eine Vertauschung von a mit e oder von b mit c die zweite derselben nicht ändert. Aus diesen fünf Vertauschungen gehen aber bei cyklischer Permutation der Buchstaben $a, b, \dots f$ zehn andere hervor, für welche ω wegen (37.) bis (41.) nicht geändert wird. *Daher bleibt ω, abgesehen vom Vorzeichen, ungeändert für sämmtliche* $\frac{6.5}{2} = 15$ *Vertauschungen der sechs Buchstaben $a, b, \dots f$.* Auch das Vorzeichen ist aus der Bemerkung leicht zu bestimmen, *dass ω jedes Mal sein Zeichen ändert, wenn man zwei Buchstaben vertauscht.* Hieraus folgt also, dass es für ω 15 verschiedene Darstellungen giebt. Man erhält dieselben aus jedem der drei Gleichungspaare (30.) und (39.), (37.) und (40.), (38.) und (41.), wenn man von den 15 möglichen Vertauschungen der Buchstaben $a, b, \dots f$ zuerst diejenige aussondert, die beide Gleichungen eines Paares ungeändert lässt, dann diejenige, welche die eine Gleichung eines Paares in die andere überführt, und von den 13 bleibenden Vertauschungen in der einen der beiden Gleichungen diejenigen 11 vornimmt, welche ihre rechten Seiten ändern, während man diejenigen beiden Vertauschungen, die dies nicht verursachen, auf die andere Gleichung anwendet.

Der Kürze halber unterlasse ich es, diese 15 Gleichungen herzuschreiben, zumal dieselben von Herrn *Hunyady* Bd. 83 Seite 83 und flgd. zusammengestellt sind.

Ist $\omega = 0$, so liegen, wie bereits bemerkt, die sechs Punkte $a, b, \dots f$ auf einem Kegelschnitte. Alsdann folgt aus (30.):

$$[abd][aef][bcf][cde] = [abf][ade][bcd][cef],$$

und diese Gleichung liefert in verschiedener geometrischer Deutung die vier Theoreme, welche nach ihren Entdeckern *Pappus, Desargues, Newton* und *Chasles* benannt sind*). Ebenso ergiebt (35.) für $\omega = 0$ den bekannten

*) Vgl. *Hunyady* a. a. O. S. 76 flgd.

Satz, dass die Seiten zweier Dreiecke, deren Ecken auf einem Kegelschnitt liegen, einen anderen Kegelschnitt berühren.

Vertauscht man in (32.) und (35.) b mit e und B mit E und setzt:

$$(42.)\quad \begin{cases} A' = [ce], & D' = [fb], \\ B' = [df], & E' = [ac], \\ C' = [ea], & F' = [bd], \end{cases}$$

so folgt aus (35.):

$$(43.)\quad \begin{cases} [A'B'\ D'E'\ B'C'\ E'F'\ C'D'\ F'A'] \\ = -[ace]^2[bdf]^2[ab\ de\ bc\ ef\ cd\ fa] \end{cases}$$

oder, wenn man die linke Seite mit Ω' bezeichnet,

$$(44.)\quad \Omega' = -[ace]^2[bdf]^2\omega.$$

Diese Identität ergiebt für $\omega = 0$ den bekannten Satz: Wenn man in einem *Pascal*schen Sechseck *abcdef* die sechs Geraden *ce, df, ... bd* zieht, so bilden diese ein *Brianchon*sches Sechsseit.

§ 4.

Ableitung einer Determinanten-Identität. Der *Carnot*sche Satz für Kegelschnitte.

Es seien $G, H, K; G', H', K'$ sechs gerade Linien. Da zwischen je vier von ihnen eine lineare Relation bestehen muss, so kann man setzen:

$$G' = \alpha G + \beta H + \gamma K.$$

Multiplicirt man diese Gleichung äusserlich mit $[HK]$, $[KG]$, $[GH]$, so folgt wegen (18.):

$$[G'HK] = \alpha[GHK],$$
$$[G'KG] = \beta[GHK],$$
$$[G'GH] = \gamma[GHK].$$

Die Einsetzung der hieraus sich ergebenden Werthe von α, β, γ in obige Gleichung liefert die folgende Identität:

$$[GHK]G' = [G'HK]G + [G'KG]H + [G'GH]K,$$

aus der durch äussere Multiplication mit G:

$$[GHK][GG'] = -[G'GK][GH] + [G'GH][GK]$$

hervorgeht. Hieraus folgt durch cyklische Permutation der Buchstaben $G, H, K; G', H', K'$:

$$[GHK][HH'] = -[H'HK][GH] - [H'HG][HK]$$

und

$$[GHK][KK'] = -[K'KH][GK] - [K'KG][HK].$$

Multiplicirt man diese drei Formeln äusserlich und beachtet, dass analog (26.):

$$[GH\,GK\,HK] = [GHK]^2$$

ist, so folgt:

(45.) $-[GHK][GG'\,HH'\,KK'] = [G'GH][H'HK][K'KG]+[G'GK][H'HG][K'KH]$.

Setzt man hierin:

$$(46.)\quad \begin{cases} G = [ab], & G' = [de], \\ H = [cd], & H' = [fa], \\ K = [ef], & K' = [bc], \end{cases}$$

so geht wegen (28.) $[GG'\,HH'\,KK']$ in ω über. Weil aber ausserdem wegen (25.):

$$\begin{aligned} [G'GH] &= [abd][cde], & [G'GK] &= -[abe][def], \\ [H'HK] &= [aef][cdf], & [H'HG] &= -[abf][acd], \\ [K'KG] &= [abc][bef], & [K'KH] &= -[bcd][cef] \end{aligned}$$

ist, so folgt aus (45.):

$$(47.)\quad \begin{cases} [ab\,cd\,ef]\,\omega = -[abc][abd][aef][bef][cde][cdf] \\ \qquad\qquad\qquad + [abe][abf][acd][bcd][cef][def]\text{*)}, \end{cases}$$

wobei zu bemerken ist, dass der Factor von ω, nämlich $[ab\,cd\,ef]$, wegen (22.), (24.) und (27.) noch die folgenden drei Formen:

$$(48.)\quad \begin{cases} [ab\,cd\,ef] = -[abc][def]+[abd][cef] \\ \qquad\qquad\quad = [acd][bef]-[bcd][aef] \\ \qquad\qquad\quad = [abe][cdf]-[abf][cde] \end{cases}$$

annimmt.

Erwähnt sei noch, dass Formel (47.), ebenso wie jede der 14 übrigen aus ihr durch Buchstabenvertauschung hervorgehenden Gleichungen, geometrisch gedeutet, den *Carnot*schen Satz**) für Kegelschnitte ergiebt.

§ 5.

Erklärungen und Identitäten. Umformung von $-\omega$ in $\delta = [a^2b^2c^2d^2e^2f^2]$.

Wenn die sechs Punkte $a, b, \ldots f$ auf einem Kegelschnitte liegen, so verschwindet, wie bekannt, die Determinante

$$\delta = \Sigma \pm a_1^2 b_2^2 c_3^2 (d_2 d_3)(e_3 e_1)(f_1 f_2).$$

*) Vgl. *Hunyady*, Bd. 83, S. 85, Formel (43.).

**) Vgl. *Hunyady*, Bd. 83, S. 80.

Um nun durch directe Umformung von ω den Nachweis zu führen, dass $\omega = -\delta$ ist, sind einige Erweiterungen der bisher auseinandergesetzten Principien nothwendig, welche jetzt gegeben werden sollen. Ich beginne damit, die in § 1 aufgestellten Erklärungen von drei Einheiten auf beliebig viele auszudehnen.

Setzt man:

$$p = p_1 e_1 + p_2 e_2 + \cdots + p_\mathfrak{r} e_\mathfrak{r},$$
$$q = q_1 e_1 + q_2 e_2 + \cdots + q_\mathfrak{r} e_\mathfrak{r},$$

so mögen die Grössen p und q *extensive Grössen* heissen und zwar *abgeleitet* aus den Einheiten $e_1, e_2, \dots e_\mathfrak{r}$ mit Hülfe der *Ableitungszahlen*

$$p_1, \quad p_2, \quad \dots \quad p_\mathfrak{r}; \quad q_1, \quad q_2, \quad \dots \quad q_\mathfrak{r}.$$

Multiplicirt man p mit q unter den Bedingungen:

$$\text{(VIII.)} \quad \begin{cases} e_\mathfrak{a} e_\mathfrak{a} = 0, \\ e_\mathfrak{a} e_\mathfrak{b} = -e_\mathfrak{b} e_\mathfrak{a}, \end{cases} \qquad (\mathfrak{a}, \mathfrak{b} = 1, 2, \dots \mathfrak{r})$$

so heisse das Product ein *äusseres* und werde durch $[pq]$ bezeichnet. Die Gleichungen (VIII.) mögen die *Bedingungsgleichungen der äusseren Multiplication* genannt werden. Zu ihnen trete für ein äusseres Product von $\mathfrak{r}$ Factoren die fernere Bedingung:

$$\text{(IX.)} \quad e_1 e_2 \dots e_\mathfrak{r} = 1.$$

Es seien $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \dots \mathfrak{e}_\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \dots \mathfrak{E}_\mathfrak{p}$ zwei Systeme von je $\mathfrak{p}$ Einheiten. Für jedes dieser Systeme mögen die Bedingungen der äusseren Multiplication gelten, während die Einheiten des einen Systems mit denen des anderen durch die Bedingungen:

$$\text{(X.)} \quad \begin{cases} \mathfrak{e}_\mathfrak{a} \mathfrak{E}_\mathfrak{a} = 1, \\ \mathfrak{e}_\mathfrak{a} \mathfrak{E}_\mathfrak{b} = 0 \end{cases} \qquad (\mathfrak{a} \gtrless \mathfrak{b})$$

verknüpft sind. Einheiten, für welche die Bedingungen (X.) gelten, mögen *sich ergänzende Einheiten* heissen. Dass $\mathfrak{E}_\mathfrak{a}$ die *Ergänzung* von $\mathfrak{e}_\mathfrak{a}$ ist, werde mit *Grassmann* durch

$$\text{(XI.)} \quad \mathfrak{E}_\mathfrak{a} = |\mathfrak{e}_\mathfrak{a}$$

bezeichnet. Ersetzt man in:

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \mathfrak{e}_1 + \mathfrak{h}_2 \mathfrak{e}_2 + \cdots + \mathfrak{h}_\mathfrak{r} \mathfrak{e}_\mathfrak{r}$$

die Einheiten $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \dots \mathfrak{e}_\mathfrak{r}$ durch ihre Ergänzungen, so mag der entstehende Ausdruck durch $|\mathfrak{h}$ bezeichnet werden und die *Ergänzung von* $\mathfrak{h}$ heissen.

Dann ist also:

$$\text{(XII.)} \qquad |\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1|\mathfrak{e}_1+\mathfrak{h}_2|\mathfrak{e}_2+\cdots+\mathfrak{h}_r|\mathfrak{e}_r.$$

Bemerkt sei noch, dass aus $\mathfrak{E}_a = |\mathfrak{e}_a$ auch $\mathfrak{e}_a = |\mathfrak{E}_a$ folgt, und dass beide Gleichungen zusammen:

$$\text{(XIII.)} \qquad |(|\mathfrak{e}_a) = \mathfrak{e}_a$$

ergeben; oder in Worten: ***Die Ergänzung von der Ergänzung einer Einheit ist diese Einheit selbst.*** Dasselbe gilt für extensive Grössen, d. h. es ist auch:

$$\text{(XIII*.)} \qquad |(|\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}.$$

Es sei nun:

$$\text{(49.)} \qquad \begin{cases} p = p_1 e_1 + p_2 e_2 + \cdots + p_r e_r, \\ q = q_1 e_1 + q_2 e_2 + \cdots + q_r e_r \end{cases}$$

und

$$\text{(50.)} \qquad \begin{cases} P = P_1 E_1 + P_2 E_2 + \cdots + P_r E_r, \\ Q = Q_1 E_1 + Q_2 E_2 + \cdots + Q_r E_r. \end{cases}$$

Dann folgt:

$$[pq] = \sum_{a,b} (p_a q_b - p_b q_a) e_a e_b \qquad \binom{a,b=1,2,\dots r}{a \gtrless b}$$

und

$$[PQ] = \sum_{c,b} (P_c Q_b - P_b Q_c) E_c E_b \qquad \binom{c,b=1,2,\dots r}{c \gtrless b}.$$

Bilden nun nicht nur die $2.r$ Einheiten e_a und E_a, sondern auch ihre $2 \cdot \frac{r(r-1)}{2}$ Combinationen zur zweiten Classe ohne Wiederholungen Systeme sich ergänzender Einheiten, ist also:

$$\text{(51.)} \qquad \begin{cases} e_a E_a = 1, \\ e_a E_b = 0, \\ (e_a e_b)(E_a E_b) = 1, \\ (e_a e_b)(E_c E_b) = 0, \end{cases} \qquad \binom{a,b,c,b=1,2,\dots r}{a \gtrless b \gtrless c \gtrless b}.$$

so folgt:

$$\big[[pq]\,[PQ]\big] = \sum_{a,b} (p_a q_b - p_b q_a)(P_a Q_b - P_b Q_a),$$

woraus nach einigen einfachen Umformungen sich ergiebt:

$$\big[[pq]\,[PQ]\big] = \sum_a (p_a P_a) \sum_b (q_b Q_b) - \sum_a (p_a Q_a) \sum_b (q_b P_b)$$

oder

$$\text{(52.)} \qquad \big[[pq]\,[PQ]\big] = [pP]\,[qQ] - [pQ]\,[qP],$$

wobei wegen $e_a E_a = 1$, $e_a E_b = 0$

$$[pP] = p_1 P_1 + p_2 P_2 + \cdots + p_r P_r,$$
$$[qQ] = q_1 Q_1 + q_2 Q_2 + \cdots + q_r Q_r$$

u. s. w. ist.

Hervorheben will ich noch einmal, dass die Gültigkeit von (52.) darauf beruht, dass die Systeme der Einheiten, aus denen p, q und $[pq]$ abgeleitet sind, die Ergänzungen der Einheiten bilden, aus denen bez. P, Q und $[PQ]$ abgeleitet.

Bisher wurden extensive Grössen nur durch äussere Multiplication verknüpft. Es wird aber für das Folgende nothwendig, auch die ***algebraische Multiplication*** extensiver Grössen in Verbindung mit der ***äusseren*** zu betrachten.

Zwei extensive Grössen heissen ***algebraisch*** multiplicirt, wenn für die Einheiten, aus denen sie abgeleitet sind, das ***commutative Gesetz***

$$e_a e_b = e_b e_a$$

besteht. Bezeichnet man mit $p.q$ das algebraische Product zweier extensiven Grössen p und q, wobei

$$p = p_1 e_1 + p_2 e_2 + p_3 e_3$$

und

$$q = q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3$$

gesetzt ist, so folgt:

$$(53.)\quad p.q = p_1 q_1 e_1^2 + p_2 q_2 e_2^2 + p_3 q_3 e_3^2 + (p_2 q_3 + p_3 q_2) e_2 e_3 + (p_3 q_1 + p_1 q_3) e_3 e_1 + (p_1 q_2 + p_2 q_1) e_1 e_2,$$

woraus für $q = p$

$$p^2 = p_1^2 e_1^2 + p_2^2 e_2^2 + p_3^2 e_3^2 + 2p_2 p_3 e_2 e_3 + 2p_3 p_1 e_3 e_1 + 2p_1 p_2 e_1 e_2$$

hervorgeht. Hierbei ist, wie bei Zahlgrössen, $p.p = p^2$ gesetzt.

Ebenso folgt aus:

$$P = P_1 E_1 + P_2 E_2 + P_3 E_3,$$
$$Q = Q_1 E_1 + Q_2 E_2 + Q_3 E_3$$

durch algebraische Multiplication:

$$(54.)\quad \begin{cases} P.Q = P_1 Q_1 E_1^2 + P_2 Q_2 E_2^2 + P_3 Q_3 E_3^2 + (P_2 Q_3 + P_3 Q_2) E_2 E_3 \\ \qquad + (P_3 Q_1 + P_1 Q_3) E_3 E_1 + (P_1 Q_2 + P_2 Q_1) E_1 E_2. \end{cases}$$

Fasst man die sechs Producte der Einheiten E_1, E_2, E_3 nämlich:

$$(55.)\quad E_1^2,\ E_2^2,\ E_3^2,\ E_2 E_3,\ E_3 E_1,\ E_1 E_2$$

als sechs neue linear von einander unabhängige Einheiten auf, so kann man sagen, $P.Q$ sei aus ihnen abgeleitet. Ebenso heisse p^2 aus den sechs Einheiten:

$$(56.)\quad e_1^2,\ e_2^2,\ e_3^2,\ 2e_2 e_3,\ 2e_3 e_1,\ 2e_1 e_2$$

abgeleitet.

Sind nun die Einheiten e_1, e_2, e_3 und E_1, E_2, E_3 und ebenso die Einheiten in (55.) und (56.) einander ergänzende Einheiten, d. h. gelten

ausser den bereits festgestellten Bedingungen:

$$e_a E_a = 1, \quad e_a E_b = 0 \qquad \binom{a, b = 1, 2, 3}{a \gtrless b}$$

die folgenden neuen:

$$\text{(XIII.)} \quad \begin{cases} (e_a e_b)(E_c E_b) = 0, \\ 2(e_a e_b)(E_a E_b) = 1, \\ (e_a e_a)(E_a E_a) = 1, \end{cases} \qquad \binom{a, b, c, b = 1, 2, 3}{a \gtrless b \gtrless c \gtrless b}$$

so folgt:

$$\text{(57.)} \quad [p^2\ P.Q] = [pP][pQ],$$

wobei, wie oben

$$\text{(58.)} \quad \begin{cases} [pP] = p_1 P_1 + p_2 P_2 + p_3 P_3, \\ [pQ] = p_1 Q_1 + p_2 Q_2 + p_3 Q_3 \end{cases}$$

ist.

Die Bedingungen (XIII.) gestatten auch das allgemeinere äussere Product $[p.q\ P.Q]$, dessen Factoren algebraische Producte sind, zu bilden; man findet wegen (XIII.) sehr leicht:

$$\text{(59.)} \quad [p.q\ P.Q] = \frac{[pP][qQ]+[pQ][qP]}{2}\ ^{*)},$$

woraus für $q = p$ (57.) hervorgeht.

Ersetzt man der einfacheren Schreibweise wegen die beiden Systeme von Einheiten in (55.) und (56.) bez. durch:

$$\mathrm{E}_1,\ \mathrm{E}_2,\ \mathrm{E}_3,\ \mathrm{E}_4,\ \mathrm{E}_5,\ \mathrm{E}_6$$

und

$$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \varepsilon_4,\ \varepsilon_5,\ \varepsilon_6,$$

so erkennt man, dass die Bedingungen (XIII.) in die (X.) analogen

$$\text{(XIII*.)} \quad \begin{cases} \varepsilon_a \mathrm{E}_a = 1, \\ \varepsilon_a \mathrm{E}_b = 0 \end{cases} \qquad (a \gtrless b)$$

übergehen. Unterwirft man die Einheiten ε und E selbst der äusseren Multiplication und setzt:

$$\text{(60.)} \quad \begin{cases} a^2 = a_1^2\varepsilon_1 + a_2^2\varepsilon_2 + a_3^2\varepsilon_3 + a_2 a_3 \varepsilon_4 + a_3 a_1 \varepsilon_5 + a_1 a_2 \varepsilon_6 = p_1\varepsilon_1 + p_2\varepsilon_2 + \cdots + p_6\varepsilon_6 = p, \\ c^2 = c_1^2\varepsilon_1 + c_2^2\varepsilon_2 + c_3^2\varepsilon_3 + c_2 c_3 \varepsilon_4 + c_3 c_1 \varepsilon_5 + c_1 c_2 \varepsilon_6 = q_1\varepsilon_1 + q_2\varepsilon_2 + \cdots + q_6\varepsilon_6 = q, \\ F.G = F_1 G_1 \mathrm{E}_1 + F_2 G_2 \mathrm{E}_2 + F_3 G_3 \mathrm{E}_3 + (F_2 G_3 + F_3 G_2)\mathrm{E}_4 + (F_3 G_1 + F_1 G_3)\mathrm{E}_5 \\ \qquad + (F_1 G_2 + F_2 G_1)\mathrm{E}_6 = P_1 \mathrm{E}_1 + P_2 \mathrm{E}_2 + \cdots + P_6 \mathrm{E}_6 = P, \\ H.K = H_1 K_1 \mathrm{E}_1 + H_2 K_2 \mathrm{E}_2 + H_3 K_3 \mathrm{E}_3 + (H_2 K_3 + H_3 K_2)\mathrm{E}_4 + (H_3 K_1 + H_1 K_3)\mathrm{E}_5 \\ \qquad + (H_1 K_2 + H_2 K_1)\mathrm{E}_6 = Q_1 \mathrm{E}_1 + Q_2 \mathrm{E}_2 + \cdots + Q_6 \mathrm{E}_6 = Q, \end{cases}$$

---

*) Vergl. *Grassmann.* Dieses Journal, Bd. 84, S. 277.

so folgt wegen (52.)

$$\big[[a^2\, c^2]\ [F.G\ \ H.K]\big] = [a^2\ F.G]\,[c^2\ H.K] - [a^2\ H.K]\,[c^2\ F.G],$$

woraus wegen (57.) die Hilfsformel:

$$(61.)\qquad \big[[a^2\, c^2]\ [F.G\ \ H.K]\big] = [aF]\,[aG]\,[cH]\,[cK] - [aH]\,[aK]\,[cF]\,[cG]$$

hervorgeht.

Specialisirt man diese allgemeine Formel nun dadurch, dass man:

$$(62.)\qquad \begin{cases} F = [bd], & H = [bf], \\ G = [ef], & K = [de] \end{cases}$$

setzt, und lässt man wie in § 1, (II.):

$$E_1 = e_2\, e_3,$$
$$E_2 = e_3\, e_1,$$
$$E_3 = e_1\, e_2$$

sein, so folgt aus (61.):

$$\big[[a^2 c^2]\big[[bd].[ef]\ \ [bf].[de]\big]\big] = [abd]\,[aef]\,[cbf]\,[cde] - [abf]\,[ade]\,[cbd]\,[cef].$$

Da aber $[cbf] = -[bcf]$ und $[cbd] = -[bcd]$ ist, so ist die rechte Seite dieser Gleichung, wie aus (30.) ersichtlich, gleich ω. Man erhält also:

$$(63.)\qquad \omega = \big[[a^2 c^2]\big[[bd].[ef]\ \ [bf].[de]\big]\big]$$

und erkennt, dass die weitere Umformung von ω von der Entwickelung des äusseren Productes $\big[[bd].[ef]\ \ [bf].[de]\big]$ abhängt.

Um Producte dieser Form zu untersuchen, werde

$$(64.)\qquad \varphi = \big[[pq].[rs]\ \ [ps].[qr]\big]$$

betrachtet, worin:

$$(65.)\qquad \begin{cases} p = p_1 e_1 + p_2 e_2 + p_3 e_3, \\ q = q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3, \\ r = r_1 e_1 + r_2 e_2 + r_3 e_3, \\ s = s_1 e_1 + s_2 e_2 + s_3 e_3 \end{cases}$$

ist. Hieraus folgt:

$$[pq] = (p_2 q_3 - p_3 q_2)\, e_2 e_3 + (p_3 q_1 - p_1 q_3)\, e_3 e_1 + (p_1 q_2 - p_2 q_1)\, e_1 e_2,$$

oder, wenn man, wie bisher:

$$e_2 e_3 = E_1,\quad e_3 e_1 = E_2,\quad e_1 e_2 = E_3$$

und überdies:

$$(p_2 q_3 - p_3 q_2) = F_1,$$
$$(p_3 q_1 - p_1 q_3) = F_2,$$
$$(p_1 q_2 - p_2 q_1) = F_3$$

setzt:

$$[pq] = F_1 E_1 + F_2 E_2 + F_3 E_3 = F.$$

Ebenso kann man setzen:

$$[rs] = G, \quad [ps] = H, \quad [qr] = K,$$

wobei G, H, K ebenso wie F aus E_1, E_2, E_3 abgeleitet sind und zwar mit Hilfe der Ableitungszahlen, G_1, G_2, G_3, $H_1 \ldots$, welche aus F_1, F_2, F_3 durch Vertauschung von p und q mit r und s, p und s, q und r hervorgehen. Dann folgt aus (64.)

$$\varphi = [F.G \quad H.K],$$

wobei die algebraischen Producte $F.G$ und $H.K$ die in (60.) angegebenen Werthe haben. Bildet man nun das äussere Product φ, so erhält man wegen (60.) einen Ausdruck, der aus den 15 Einheiten: $\mathrm{E}_1\mathrm{E}_2$, $\mathrm{E}_1\mathrm{E}_3$, ... $\mathrm{E}_5\mathrm{E}_6$ abgeleitet ist. Nach der zu Gleichung (52.) gemachten Bemerkung sind diese Einheiten aber die bez. Ergänzungen zu $\varepsilon_1\varepsilon_2$, $\varepsilon_1\varepsilon_3$, ... $\varepsilon_5\varepsilon_6$, d. h. es ist:

$$(66.) \qquad (\mathrm{E}_a \mathrm{E}_b) = |(\varepsilon_a \varepsilon_b) \qquad a, b = 1, 2, 3.$$

Was andererseits die Coefficienten der 15 Einheiten $\mathrm{E}_1\mathrm{E}_2$, $\mathrm{E}_1\mathrm{E}_3$, ... $\mathrm{E}_5\mathrm{E}_6$ anbetrifft, so sind sie bez. die Determinanten:

$$\begin{vmatrix} F_1 G_1 & F_2 G_2 \\ H_1 K_1 & H_2 K_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} F_1 G_1 & F_3 G_3 \\ H_1 K_1 & H_3 K_3 \end{vmatrix}, \quad \ldots \quad \begin{vmatrix} F_3 G_1 + F_1 G_3 & F_1 G_2 + F_2 G_1 \\ H_3 K_1 + H_1 K_3 & H_1 K_2 + H_2 K_1 \end{vmatrix}$$

und diese stimmen, wie eine einfache Umformung derselben lehrt, mit den Coefficienten von bez.:

$$(\varepsilon_3\varepsilon_4\varepsilon_5\varepsilon_6), \quad -(\varepsilon_2\varepsilon_4\varepsilon_5\varepsilon_6), \quad \ldots \quad (\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4)$$

in der Entwickelung von $[p^2 q^2 r^2 s^2]$ überein. Hierbei ist nach dem Früheren:

$$(67.) \qquad p^2 = p_1^2\varepsilon_1 + p_2^2\varepsilon_2 + p_3^2\varepsilon_3 + p_2 p_3 \varepsilon_4 + p_3 p_1 \varepsilon_5 + p_1 p_2 \varepsilon_6$$

u. s. w. Da aber die obigen Einheiten wegen $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4\varepsilon_5\varepsilon_6 = 1$ nichts anderes sind, als die bez. Ergänzungen von $(\varepsilon_1\varepsilon_2)$, $(\varepsilon_1\varepsilon_3)$, ... $(\varepsilon_5\varepsilon_6)$, also als:

$$|(\varepsilon_1\varepsilon_2), \quad |(\varepsilon_1\varepsilon_3), \quad \ldots \quad |(\varepsilon_5\varepsilon_6),$$

so erhält man schliesslich, wenn man noch die für die Ergänzung einer extensiven Grösse gegebene Erklärung (XII.) beachtet, die Endformel:

$$(68.) \qquad \big[[pq].[rs] \quad [ps].[qr]\big] = |[p^2 q^2 r^2 s^2].$$

Hierin bedeuten, um es noch einmal zu wiederholen, $[pq]$, $[rs]$ u. s. w. und ebenso $[p^2\, q^2\, r^2\, s^2]$ ***äussere Producte***, während $[pq].[rs]$ und $[ps].[qr]$ ***algebraische Producte*** der Factoren $[pq]$, $[rs]$ und $[ps]$, $[qr]$ bezeichnen, und der senkrechte Strich vor der eckigen Klammer der rechten Seite bestimmt, dass nach vollzogener äusserer Multiplication die Einheiten durch ihre Ergänzungen ersetzt werden sollen.

Für

$$p = b, \quad r = e,$$
$$q = d, \quad s = f$$

geht (68.) in:

$$\big[[bd].[ef]\ \ [bf].[de]\big] = |[b^2\, d^2\, e^2\, f^2]$$

über. Bei Benutzung dieser Formel erhält man aus (63.), weil $(\varepsilon_a \varepsilon_b)\,|\,(\varepsilon_a \varepsilon_b) = 1$ und $(\varepsilon_a \varepsilon_b)\,|\,(\varepsilon_c \varepsilon_b) = 0$ ist:

$$\omega = [a^2\, c^2\, b^2\, d^2\, e^2\, f^2]$$

oder auch:

$$(69.)\qquad \omega = -[a^2\, b^2\, c^2\, d^2\, e^2\, f^2],$$

wobei $a^2, b^2, \dots f^2$ durch (67.) bestimmt sind und $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 \varepsilon_5 \varepsilon_6 = 1$ ist. Da desshalb das äussere Product rechter Hand identisch die Determinante

$$\delta = \Sigma \pm a_1^2\, b_2^2\, c_3^2\, (d_2 d_3)\, (e_3 e_1)\, (f_1 f_2)$$

darstellt, so folgt *):

$$\omega = -\delta$$

w. z. b. w.

§ 6.

Umformung von ω in $\vartheta = [b.c\ \ c.a\ \ a.b\ \ e.f\ \ f.d\ \ d.e]$.

Nachdem im vorigen Paragraphen nachgewiesen worden, dass $\omega = -\delta$ ist, wo

$$(70.)\qquad \delta = [a^2\, b^2\, c^2\, d^2\, e^2\, f^2]$$

war und $a^2, b^2, \dots f^2$ die aus (67.) hervorgehende Bedeutung haben, werde jetzt eine weitere Umformung gegeben.

Setzt man zur Abkürzung:

$$(71.)\qquad \begin{cases} [a^2\, b^2\, c^2] = \mathfrak{P}, \\ [d^2\, e^2\, f^2] = \mathfrak{Q} \end{cases}$$

und multiplicirt das äussere Product $[a^2\, b^2\, c^2]$ aus, so erhält man für $\mathfrak{P}$ einen Ausdruck, welcher aus den zwanzig Einheiten $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$, $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_4$, ... $\varepsilon_4 \varepsilon_5 \varepsilon_6$ abgeleitet ist; das Nämliche gilt für $\mathfrak{Q}$. Bezeichnet man alsdann die Coef-

*) Vgl. ***Mertens***, Bd. 84, S. 357 und ***Pasch***, Bd. 89, S. 248.

ficienten von $\varepsilon_a \varepsilon_b \varepsilon_c$ in $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ bez. durch $\mathfrak{P}_{abc}$ und $\mathfrak{Q}_{abc}$, so erhält man, weil $\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\varepsilon_3\,\varepsilon_4\,\varepsilon_5\,\varepsilon_6 = 1$ ist:

$$(72.)\qquad \delta = \varrho+\sigma-\tau-\upsilon,$$

wobei

$$(73.)\qquad \begin{cases} \varrho = \mathfrak{P}_{123}\mathfrak{Q}_{456}-\mathfrak{P}_{124}\mathfrak{Q}_{356}+\mathfrak{P}_{134}\mathfrak{Q}_{256}, \\ \sigma = \mathfrak{P}_{125}\mathfrak{Q}_{346}-\mathfrak{P}_{126}\mathfrak{Q}_{345}-\mathfrak{P}_{135}\mathfrak{Q}_{246} \\ \quad +\mathfrak{P}_{136}\mathfrak{Q}_{245}+\mathfrak{P}_{145}\mathfrak{Q}_{236}-\mathfrak{P}_{146}\mathfrak{Q}_{235} \\ \quad +\mathfrak{P}_{156}\mathfrak{Q}_{234} \end{cases}$$

ist und τ und υ bez. aus ϱ und σ durch Vertauschung von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ hervorgehen. Hierbei ist zu bemerken, dass das Vorzeichen von $\mathfrak{P}_{abc}\mathfrak{Q}_{def}$ in ϱ und σ positiv oder negativ ist, je nachdem $\varepsilon_a\varepsilon_b\varepsilon_c\varepsilon_d\varepsilon_e\varepsilon_f = +1$ oder $= -1$ wird. Von den zwanzig Coefficienten $\mathfrak{P}_{abc}$ müssen die beiden: $\mathfrak{P}_{123}$ und $\mathfrak{P}_{456}$ direct umgeformt werden; die übrigen achtzehn dagegen lassen sich aus vier von ihnen, etwa aus $\mathfrak{P}_{124}$, $\mathfrak{P}_{126}$, $\mathfrak{P}_{145}$, $\mathfrak{P}_{156}$ durch passende Vertauschung der Indices ableiten. Auf diese Weise findet man:

$$(74.)\qquad \begin{cases} \mathfrak{P}_{123} = 2\mathfrak{P}'_{123}+\mathfrak{P}'_{456}, & \mathfrak{P}_{456} = \mathfrak{P}'_{123}, \\ \mathfrak{P}_{124} = \mathfrak{P}'_{124}+\mathfrak{P}'_{256}, & \mathfrak{P}_{356} = -\mathfrak{P}'_{134}, \\ \mathfrak{P}_{125} = \mathfrak{P}'_{125}-\mathfrak{P}'_{146}, & \mathfrak{P}_{346} = -\mathfrak{P}'_{235}, \\ \mathfrak{P}_{126} = -\mathfrak{P}'_{126}, & \mathfrak{P}_{345} = \mathfrak{P}'_{345}, \\ \mathfrak{P}_{134} = \mathfrak{P}'_{134}-\mathfrak{P}'_{356}, & \mathfrak{P}_{256} = \mathfrak{P}'_{124}, \\ \mathfrak{P}_{135} = -\mathfrak{P}'_{135}, & \mathfrak{P}_{246} = \mathfrak{P}'_{246}, \\ \mathfrak{P}_{136} = \mathfrak{P}'_{136}-\mathfrak{P}'_{145}, & \mathfrak{P}_{245} = \mathfrak{P}'_{236}, \\ \mathfrak{P}_{145} = -\mathfrak{P}'_{136}, & \mathfrak{P}_{236} = \mathfrak{P}'_{236}+\mathfrak{P}'_{245}, \\ \mathfrak{P}_{146} = -\mathfrak{P}'_{125}, & \mathfrak{P}_{235} = \mathfrak{P}'_{235}-\mathfrak{P}'_{346}, \\ \mathfrak{P}_{156} = \mathfrak{P}'_{156}, & \mathfrak{P}_{234} = -\mathfrak{P}'_{234}, \end{cases}$$

wobei

$$(75.)\qquad [b.c\ \ c.a\ \ a.b] = \mathfrak{P}'$$

gesetzt und der Coefficient von $\varepsilon_a\varepsilon_b\varepsilon_c$ in $\mathfrak{P}'$ mit $\mathfrak{P}'_{abc}$ bezeichnet ist. In (75.) sind $b.c$, $c.a$, $a.b$ algebraische Producte und es ist, wie früher:

$$b.c = b_1c_1\varepsilon_1+b_2c_2\varepsilon_2+b_3c_3\varepsilon_3+(b_2c_3+b_3c_2)\varepsilon_4 \\ +(b_3c_1+b_1c_3)\varepsilon_5+(b_1c_2+b_2c_1)\varepsilon_6,$$

woraus die Werthe für $c.a$ und $a.b$ durch Buchstabenvertauschung hervorgehen. Setzt man entsprechend (75.)

$$(76.)\qquad [e.f\ \ f.d\ \ d.e] = \mathfrak{Q}'$$

und bezeichnet den Coefficienten von $\varepsilon_c\varepsilon_b\varepsilon_e$ in $\mathfrak{Q}'$ mit $\mathfrak{Q}'_{cbe}$, so erhält man ein (74.) analoges Formelsystem, in welchem nur $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$, a, b, c bez. mit $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}'$, d, e, f vertauscht sind. Setzt man alsdann die Werthe von $\mathfrak{P}_{abc}$ und $\mathfrak{Q}_{bef}$ in (73.) ein und bezeichnet mit ϱ', σ', τ', v' die Ausdrücke, welche aus ϱ, σ, τ, v hervorgehen, wenn man $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ mit $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{Q}'$ vertauscht, so findet man sofort:

$$(77.)\quad \begin{cases} \varrho = \tau'+\theta', \\ \sigma = -\sigma', \end{cases}$$

wobei

$$\theta' = 2\mathfrak{P}'_{123}\mathfrak{Q}'_{123}+\mathfrak{P}'_{124}\mathfrak{Q}'_{134}+\mathfrak{P}'_{134}\mathfrak{Q}'_{124}$$

ist. Durch Vertauschung von $\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{P}'$ mit $\mathfrak{Q}'$, folgt aus (77.):

$$(78.)\quad \begin{cases} \tau = \varrho'+\theta', \\ v = -v' \end{cases}$$

und daher:

$$\varrho+\sigma-\tau-v = -(\varrho'+\sigma'-\tau'-v')$$

oder:

$$\vartheta = -\vartheta,$$

wobei

$$\vartheta = [b.c \quad c.a \quad a.b \quad e.f \quad f.d \quad d.e]$$

ist *). Dieses äussere Product ist aber wegen $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4\varepsilon_5\varepsilon_6 = 1$ und wegen der den algebraischen Producten $b.c$, $c.a$, ... $d.e$ beigelegten Werthe identisch mit der Determinante sechster Ordnung:

$$\Sigma \pm (b_1c_1)(c_2a_2)(a_3b_3)(e_3f_2+e_2f_3)(f_1d_3+f_3d_1)(d_1e_2+d_2e_1).$$

U. d. w. z. b.

---

*) Vgl. *Mertens*, Bd. 84 S. 359 und *Pasch*, Bd. 89 S. 249.

Berlin, den 1. November 1880.

Sur une application du théorème de M. *Mittag-Leffler*, dans la théorie des fonctions.

(Extrait d'une lettre adressée à M. *Mittag-Leffler* de Stockholm par M. *Ch. Hermite* à Paris.)

A M. *Weierstrass* est due, comme vous le savez bien, la remarque importante que l'expression analytique de la fonction $D_x \log \Gamma(1+x)$, par la formule

$$C+\left[1-\frac{1}{1+x}\right]+\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2+x}\right]+\cdots+\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}\right]+\cdots,$$

a été la première indication qui ait mis sur la voie de votre théorème général. C'est en effet le premier exemple connu, où la série des fractions simples, étant divergente, se change en une série absolument convergente, en ajoutant une constante à chacune des fractions. Les fonctions elliptiques sont venues après; et dans cette formule qu'a donnée le premier M. *Weierstrass:*

$$\frac{H'(x)}{H(x)} = \Sigma\left[\frac{1}{x+2mK+2m'iK'}-\frac{1}{2mK+2m'iK'}-\frac{x}{(2mK+2m'iK')^2}\right],$$

c'est un binôme du premier degré que l'on retranche au lieu d'une constante. Voici un cas enfin où il faut retrancher des fractions simples un polynôme entier de degré limité, mais qui peut être quelconque. Considérez la fonction $F(x) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(a)}{\Gamma(x+a)}$, dont les pôles sont $x = -n$ et les résidus correspondants $R_n = \frac{(-1)^n(a-1)(a-2)\ldots(a-n)}{1.2\ldots n}$. Si nous supposons que la constante a soit positive, la série $\Sigma\frac{R_n}{x+n}$ est convergente, et sans qu'il soit besoin d'ajouter une fonction holomorphe, on a l'expression:

$$F(x) = \Sigma\frac{R_n}{x+n}.$$

C'est ce que l'on prouvera immédiatement au moyen de la formule $F(x) = \int_0^1 (1-t)^{a-1} t^{x-1} dt$; nous pouvons en effet sous le signe d'intégration développer la puissance $(1-t)^{a-1}$, et écrire:

$$F(x) = \int_0^1 \Sigma \frac{(-1)^n (a-1)(a-2)\dots(a-n)}{1.2\dots n} t^{x-1+n} dt,$$

puis:

$$F(x) = \Sigma \frac{(-1)^n (a-1)(a-2)\dots(a-n)}{1.2\dots n} \frac{1}{x+n}.$$

Vous observerez de plus que x devant être supposé nécessairement positif, dans l'intégrale, le résultat déduit du développement en série subsiste pour toute valeur réelle ou imaginaire de la variable. Mais admettons que a soit négatif (réel pour plus de simplicité), et soit $a = -a'$. La série précédente cesse d'être convergente, et nous avons par conséquent à chercher, s'il existe une valeur entière de l'exposant i qui rende convergente la nouvelle suite:

$$\Sigma \frac{R_n}{n^i} = \Sigma \frac{(a'+1)(a'+2)\dots(a'+n)}{1.2\dots n} \cdot \frac{1}{n^i}.$$

Or en désignant par u_n le terme général, on a:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^i(n+1+a')}{(n+1)^{i+1}} = \frac{n^{i+1}+(1+a')n^i}{n^{i+1}+(1+i)n^i+\dots}$$

et la règle de *Gauss* donne immédiatement la condition:

$$1+a'-1-i+1 < 0$$

ou simplement:

$$i > a'+1.$$

La fonction considérée nous conduit donc à l'application de votre théorème dans la circonstance que j'avais en vue et qui s'offre pour la première fois, si je ne me trompe, en analyse. Pour parvenir alors à l'expression de $F(x)$, je poserai $a = -\nu + \alpha$, ν étant un nombre entier et α positif, puis je ferai usage de la relation élémentaire:

$$\Gamma(x-\nu) = \frac{\Gamma(x)}{(x-1)(x-2)\dots(x-\nu)}$$

qui permet d'écrire:

$$F(x) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(a-\nu)}{\Gamma(x+a-\nu)} = G(x)\frac{\Gamma(x)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(x+\alpha)}$$

où j'ai fait:

$$G(x) = \left(1+\frac{x}{a-1}\right)\left(1+\frac{x}{a-2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{a-\nu}\right).$$

Vous voyez qu'étant ramené au cas précédemment considéré, on en conclut immédiatement:

$$F(x) = G(x)\Sigma\frac{(-1)^n(a-1)(a-2)\ldots(a-n)}{1.2\ldots n}\,\frac{1}{x+n};$$

un calcul facile montre ensuite qu'on a:

$$R_n = \frac{(-1)^n(a-1)(a-2)\ldots(a-n)}{1.2\ldots n}\,G(-n),$$

et en désignant le polynôme de degré $\nu-1$ en x, $\frac{G(x)-G(-n)}{x+n}$ par $G_n(x)$, nous parvenons à l'expression analytique de la fonction $F(x)$, sous la forme que donne votre théorème, à savoir:

$$F(x) = \Sigma\left[\frac{R_n}{x+n}+G_n(x)\right].$$

Remarquez cependant cette légère modification qui consiste en ce que $G_n(x)$ n'est point le polynôme:

$$-R_n\left[\frac{1}{n}+\frac{x}{n^2}+\cdots+\frac{x^{\nu-1}}{n^\nu}\right].$$

Cette circonstance a pour effet de supprimer toute partie entière dans $F(x)$, et elle suggère la considération suivante. Soit en général $f(x)$ une fonction uniforme, n'ayant pour fixer les idées que des pôles simples $x=a_n$, et soit R_n le résidu qui correspond à a_n. Désignons par $G(x)$ une fonction holomorphe, telle que l'équation $G(x)=0$ n'ait jamais qu'un nombre fini et limité de racines x_0, x_1, etc.. Cette condition pourra être remplie alors même que $G(x)$ ne serait point un polynôme, mais le produit d'un polynôme par l'exponentielle d'une fonction holomorphe. Cela posé, je considère dans les cas où la série des fractions simples $\frac{R_n}{x-a_n}$ n'est point convergente, la nouvelle fonction $\frac{f(x)}{G(x)}$. Désignons par $\mathfrak{R}_n$ les résidus qui correspondent aux pôles $x=a_n$ et par ρ_0, ρ_1, ... ceux qui correspondent aux racines $x=x_0$, $x=x_1$, ... de $G(x)$. Il est clair qu'on pourra poser:

$$\frac{f(x)}{G(x)} = \frac{\rho_0}{x-x_0}+\frac{\rho_1}{x-x_1}+\cdots+\Sigma\frac{\mathfrak{R}_n}{x-a_n}+g(x)$$

où $g(x)$ est une fonction holomorphe, lorsque la série:

$$\Sigma\,\mathrm{mod}\,\frac{\mathfrak{R}_n}{a_n}$$

sera convergente, et on tirera évidemment de là:

$$f(x) = G(x)\Sigma\frac{\mathfrak{R}_n}{x-a_n}+g_1(x),$$

$g_1(x)$ désignant encore une fonction holomorphe.

C'est en supposant en particulier $G(x)=x^\nu$, ce qui donne $\mathfrak{R}_n=\frac{R_n}{a_n^\nu}$, qu'on obtient la condition si simple de la convergence de la série $\Sigma\text{mod}\frac{R_n}{a_n^{\nu+1}}$, mais il ne semble pas inutile d'avoir remarqué une condition d'une forme plus générale, qui serait susceptible de trouver son application dans certains cas, et peut-être même lorsque les degrés des polynômes qu'il faut joindre aux fonctions simples $\frac{R_n}{x-a_n}$, doivent être supposés indéfiniment croissants.

La fonction $\frac{\Gamma(x)\Gamma(a-x)}{\Gamma(a)}$ peut encore se traiter comme la précédente et vous allez voir qu'elle conduit à des conséquences analogues. On a alors deux séries de pôles, données par les formules:

$$x=-n, \quad x=a+n;$$

quant aux résidus qui leur correspondent, ils sont égaux et de signes contraires: nous les représenterons par R_n et $-R_n$, en faisant:

$$R_n = \frac{(-1)^n a(a+1)\ldots(a+n-1)}{1.2\ldots n}.$$

Cela étant, on reconnaît comme précédemment par la règle de *Gauss* que la série $\Sigma\frac{R_n}{x+n}$ est convergente sous la condition $a<1$, il en est de même par conséquent de celle-ci $\Sigma\frac{R_n}{x-a-n}$, qui en résulte en changeant x en $a-x$. Je recours maintenant, pour établir que la somme des deux suites représente la fonction, à la formule bien connue:

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(a-x)}{\Gamma(a)} = \int_0^1\frac{t^{x-1}+t^{a-x-1}}{(1+t)^a}dt,$$

et j'observe que le second membre, pour être une quantité finie, exige les conditions $x>0$, $a-x>0$, de sorte qu'il faut nécessairement supposer la constante a positive. Ceci admis, l'intégrale nous donne comme vous allez voir l'expression de la fonction par une somme de fractions simples. J'emploierai dans ce but le développement de la puissance du binôme:

$$\frac{1}{(1+t)^a} = \Sigma R_n t^n$$

en m'imposant la condition qu'il soit convergent non seulement pour $t<1$,

mais pour la valeur limite $t = 1$, ce qui aura lieu ainsi qu'*Abel* l'a établi si l'on suppose $a < 1$. On en tire en effet:

$$\int_0^1 \frac{t^{x-1}+t^{a-x-1}}{(1+t)^a}\,dt = \Sigma R_n \int_0^1 t^{x-1+n}\,dt + \Sigma R_n \int_0^1 t^{a-x-1+n}\,dt,$$

d'où ce résultat:

$$\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(a-x)}{\Gamma(a)} = \Sigma \frac{R_n}{x+n} - \Sigma \frac{R_n}{x-a-n},$$

où n'entre point de fonction holomorphe dans le second membre, et qui, je le répète, suppose a positif et moindre que l'unité. Je dis qu'il subsiste sans modification pour les valeurs négatives de cette constante, de sorte que la série des fractions simples représentera la fonction dans tous les cas où elle est convergente. Soit à cet effet $a = -\nu + \alpha$, ν étant un nombre entier, α étant positif et moindre que l'unité, en faisant:

$$G(x) = \left(1+\frac{x}{1-\alpha}\right)\left(1+\frac{x}{2-\alpha}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{\nu-\alpha}\right),$$

nous aurons:

$$\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(a-x)}{\Gamma(a)} = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(\alpha-x)}{\Gamma(\alpha)\,G(x)};$$

cela étant, j'opérerai de la manière suivante. Je me fonderai sur cette remarque que $f(x)$ étant donnée par la formule:

$$f(x) = \Sigma \frac{R}{x-a},$$

on en tire immédiatement sous la forme semblable d'une série de fractions simples, l'expression d'une seconde fonction, liée à la précédente par la relation:

$$f_1(x) = \frac{f(x)}{x-\xi}.$$

Nommons en effet R_1 le résidu de $f_1(x)$, correspondant au pôle $x = a$, on aura:

$$R_1 = \frac{R}{a-\xi},$$

ce qui permet d'écrire:

$$f(x) = \Sigma \frac{R_1(a-\xi)}{x-a},$$

et par conséquent:

$$f_1(x) = \Sigma \frac{R_1(a-\xi)}{(x-a)(x-\xi)}.$$

Or l'identité:

$$\frac{a-\xi}{(x-a)(x-\xi)} = \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-\xi}$$

donne sur-le-champ l'expression:

$$f_1(x) = \Sigma \frac{R_1}{x-a} - \frac{\Sigma R_1}{x-\xi},$$

et l'on peut remarquer qu'on a, d'après la valeur de R_1:

$$\Sigma R_1 = \Sigma \frac{R}{a-\xi} = -f(\xi).$$

La fonction $f_1(x)$ étant ainsi représentée par une série de fractions simples, sans addition d'une partie entière, vous voyez qu'en posant successivement:

$$f_2(x) = \frac{f_1(x)}{x-\xi_1},$$

$$f_3(x) = \frac{f_2(x)}{x-\xi_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$f_\nu(x) = \frac{f_{\nu-1}(x)}{x-\xi_{\nu-1}},$$

il en sera de même de proche en proche de toutes ces quantités dont la dernière a pour expression:

$$f_\nu(x) = \frac{f(x)}{G(x)},$$

où l'on a fait:

$$G(x) = (x-\xi)(x-\xi_1)\ldots(x-\xi_{\nu-1}).$$

Nous sommes donc assuré par ce procédé bien facile, que le résultat obtenu pour $\frac{\Gamma(x)\Gamma(a-x)}{\Gamma(a)}$ entraîne une expression de même forme de la fonction $\frac{\Gamma(x)\Gamma(a-x)}{\Gamma(a)}$. Mais cette forme change, et l'on se trouve amené à l'application de votre théorème, lorsque la constante a devient positive et plus grande que l'unité. Faisons en effet $a = \nu + \alpha$, où ν est entier, α positif et moindre que un, et posons:

$$G(x) = \left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\left(1-\frac{x}{\alpha+1}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{\alpha+\nu-1}\right),$$

on aura:

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(a-x)}{\Gamma(a)} = G(x)\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(x-\alpha)}{\Gamma(\alpha)}.$$

Désignons encore par ϱ_n ce que devient R_n quand on change a en α, la formule obtenue plus haut, à savoir:

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(x-\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = \Sigma\frac{\varrho_n}{x+n} - \Sigma\frac{\varrho_n}{x-\alpha-n},$$

nous donne:

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(a-x)}{\Gamma(a)} = \Sigma\frac{G(x)\varrho_n}{x+n} - \Sigma\frac{G(x)\varrho_n}{x-a-n}.$$

Or les ν premiers termes de la seconde série, dans le second membre, à savoir:

$$G(x)\left[\frac{\varrho_0}{x-a}+\frac{\varrho_1}{x-a-1}+\dots+\frac{\varrho_{\nu-1}}{x-a-\nu+1}\right]$$

conduisent d'après l'expression de $G(x)$ à un polynôme entier de degré $\nu-1$. Il viendra donc, si on le désigne un moment par $P(x)$:

$$\Sigma\frac{G(x)\varrho_n}{x-a-n} = P(x)+\Sigma\frac{G(x)\varrho_{\nu+n}}{x-a-\nu-n}$$

les suites se rapportant aux valeurs $n=0, 1, 2, \dots$.

En se rappelant qu'on a posé $a=\alpha+\nu$, on peut encore écrire:

$$\Sigma\frac{G(x)\varrho_n}{x-a-n} = P(x)+\Sigma\frac{G(x)\varrho_{\nu+n}}{x-a-n}$$

et nous obtenons en conséquence la formule:

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(a-x)}{\Gamma(a)} = \Sigma\frac{G(x)\varrho_n}{x+n} - \Sigma\frac{G(x)\varrho_{\nu+n}}{x-a-n} - P(x).$$

Si l'on désigne par $G_n(x)$ et $G_n^1(x)$ deux polynômes entiers de degré $\nu-1$, les termes généraux des deux séries se mettront d'ailleurs sous la forme:

$$\frac{G(x)\varrho_n}{x+n} = \frac{R_n}{x+n}+G_n(x),$$

$$\frac{G(x)\varrho_{\nu+n}}{x-a-n} = \frac{R_n}{x-a-n}+G_n^1(x),$$

qui est celle que donne votre théorème.

P. S. Je viens de remarquer qu'un point important de la théorie des fonctions Eulériennes conduit à une application de la notion de coupure dans les intégrales définies. Considérez en effet la relation qui donne la

valeur approchée de $\log\Gamma(z)$, à savoir:

$$\log\Gamma(z) = (z-\tfrac{1}{2})\log z - z + \log\sqrt{2\pi} + \Phi(z).$$

On a ces deux expressions découvertes par *Binet* pour le terme complémentaire:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} \frac{e^t(z-t)-z-t}{(1-e^t)t^2} e^{tz}\,dt,$$

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \log\frac{e^{2\pi t}}{e^{2\pi t}-1}\,\frac{z\,dt}{z^2+t^2},$$

dont la première suppose essentiellement positive la partie réelle de la variable, tandis que la seconde existant dans toute l'étendue du plan, semble donner $\log\Gamma(z)$, pour toute valeur de z. Mais l'intégrale $\int_0^{\infty}\log\frac{e^{2\pi t}}{e^{2\pi t}-1}\,\frac{z\,dt}{z^2+t^2}$ admet pour coupure le lieu représenté par l'équation:

$$z^2+t^2 = 0,$$

t variant de zéro à l'infini, c'est-à-dire l'axe des ordonnées. C'est la circonstance de cette ligne de discontinuité qui explique qu'à gauche de la coupure, l'intégrale cesse de correspondre à la fonction $\log\Gamma(z)$, de sorte que les expressions de *Binet* ne donnent l'une et l'autre cette quantité que pour la moitié du plan qui est à droite de l'axe des ordonnées. J'ajoute qu'une des propriétés fondamentales de $\Gamma(z)$ s'offre comme une conséquence à tirer de cette considération de la coupure. Envisageons en effet, afin d'avoir l'intégrale d'une fonction uniforme, la dérivée $\Phi'(z)$ qui a pour expression, comme on le trouve aisément:

$$\Phi'(z) = -\int_0^{\infty}\frac{2t\,dt}{(z^2+t^2)(1-e^{-2\pi t})},$$

et donne la relation suivante:

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \log z - \frac{1}{2z} + \Phi'(z).$$

Pour deux points infiniment voisins d'un point quelconque de la coupure qui correspondent aux valeurs $t=\theta$, $z=i\theta$, et ont pour affixes les quantités $\varepsilon+i\theta$, $-\varepsilon+i\theta$, où ε est infiniment petit positif, on a d'après la formule générale:

$$\Phi'(\varepsilon+i\theta)-\Phi'(-\varepsilon+i\theta) = -\frac{2i\pi}{1-e^{-2\pi\theta}},$$

ou bien si l'on introduit la quantité $z = i\theta$:

$$\Phi'(\varepsilon+z)-\Phi'(-\varepsilon+z) = -\frac{\pi e^{-i\pi z}}{\sin\pi z} = -\pi(\cot g\,\pi z - i).$$

Mais $\Phi'(z)$ ne change pas de signe avec z, de sorte qu'on peut remplacer le terme $\Phi'(-\varepsilon+z)$ se rapportant à un point qui est à gauche de la coupure par $\Phi'(\varepsilon-z)$; il vient ainsi la relation:

$$\Phi'(\varepsilon+z)-\Phi'(\varepsilon-z) = -\pi(\cot g\,\pi z - i),$$

qui s'applique à la fonction Γ.

Ayant en effet:

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}-\frac{\Gamma'(-z)}{\Gamma(-z)} = -\log(-1)-\frac{1}{z}+\Phi'(z)-\Phi'(-z),$$

on en conclut que l'expression:

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}-\frac{\Gamma'(-z)}{\Gamma(-z)}+\log(-1)+\frac{1}{z}$$

coïncide pour ε infiniment petit, lorsqu'on suppose $z = i\theta$, avec la quantité:

$$-\pi(\cot g\,\pi z - i).$$

Elle lui est par conséquent identique dans tout le plan puisqu'il s'agit de fonctions uniformes, et si l'on fait comme il est permis, $\log(-1) = i\pi$, nous sommes amené à la relation:

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}-\frac{\Gamma'(-z)}{\Gamma(-z)} = -\frac{1}{z}-\pi\cot g\,\pi z,$$

d'où se tire facilement:

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z\sin\pi z}$$

ou encore:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin\pi z}.$$

De ce fait des deux expressions sous forme d'intégrales définies de la fonction $\Phi(z)$ l'une n'existant que dans une moitié du plan, tandis que l'autre subsiste pour toute valeur de la variable, mais avec l'axe des abscisses pour coupure, je crois pouvoir rapprocher comme analogue jusqu'à un certain point, le résultat suivant qui est d'une grande importance dans la théorie des fonctions elliptiques. Considérons comme fonctions de q, ou plutôt de ω, en faisant $q = e^{i\pi\omega}$, les quantités $\operatorname{sn}\xi$, $\operatorname{cn}\xi$, $\operatorname{dn}\xi$. Si l'on

pose $\omega = x + iy$, les expressions sous forme de quotients, à savoir:

$$\operatorname{sn}\xi = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H(\xi)}{\Theta(\xi)}, \quad \operatorname{cn}\xi = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{H_1(\xi)}{\Theta(\xi)}, \quad \operatorname{dn}\xi = \sqrt{k'} \frac{\Theta_1(\xi)}{\Theta(\xi)}$$

n'auront d'existence qu'autant que y sera positif et différent de zéro, tandis que les développements en séries simples:

$$\frac{2kK}{\pi} \operatorname{sn} \frac{2K\xi}{\pi} = \frac{4\sqrt{q}\sin\xi}{1-q} + \frac{4\sqrt{q^3}\sin 3\xi}{1-q^3} + \cdots,$$

$$\frac{2kK}{\pi} \operatorname{cn} \frac{2K\xi}{\pi} = \frac{4\sqrt{q}\cos\xi}{1+q} + \frac{4\sqrt{q^3}\cos 3\xi}{1+q^3} + \cdots,$$

$$\frac{2K}{\pi} \operatorname{dn} \frac{2K\xi}{\pi} = 1 + \frac{4q\cos 2\xi}{1+q^2} + \frac{4q^2\cos 4\xi}{1+q^4} + \cdots$$

sont convergents pour toute valeur de q, en exceptant toutefois le cas de ω réel, ou $y = 0$. Or à l'égard de ces expressions analytiques entièrement explicites, l'axe des abscisses, comme la coupure de la seconde des intégrales de *Binet*, joue le rôle d'une ligne de discontinuité. Dans son beau et important travail intitulé: Ueber die Theorie der elliptischen Modul-Functionen (T. 83 du journal de *Borchardt*) M. *Dedekind* a donné d'après une indication de *Riemann*, la proposition suivante qui en montre le caractère. Si l'on suppose y infiniment petit positif, et x incommensurable, le module k est absolument indéterminé, tandis qu'en faisant $x = \frac{m}{n}$ où m et n sont des entiers premiers entre eux, on a:

$$\begin{array}{llll} k = \infty, & \text{pour} & m \equiv 1, & n \equiv 1 \quad (\text{mod.} 2) \\ k = 1, & \quad " & m \equiv 0, & n \equiv 1 \\ k = 0, & \quad " & m \equiv 1, & n \equiv 1. \end{array}$$

En suivant l'axe des abscisses, à une distance infiniment petite au-dessus de cet axe, on voit donc se succéder pour $\operatorname{sn}\xi$ par exemple, les quantités $\sin\xi$ et $\frac{\operatorname{tang} i\xi}{i}$, répondant aux valeurs zéro et l'unité du module, et à des intervalles aussi rapprochés qu'on le veut. Je remarquerai encore que les développements ci-dessus, sous forme de séries simples, qui étendent à tout le plan, relativement à ω, la détermination de $\operatorname{sn}\frac{2K\xi}{\pi}$, $\operatorname{cn}\frac{2K\xi}{\pi}$, $\operatorname{dn}\frac{2K\xi}{\pi}$, ne réalisent point cette extension de la même manière pour les trois fonctions. Faisons en effet $\xi = \frac{\pi}{2}$ dans $\operatorname{sn}\frac{2K\xi}{\pi}$, et $\xi = 0$ dans $\operatorname{cn}\frac{2K\xi}{\pi}$, on trouvera

ces formules

$$\frac{2kK}{\pi} = \frac{4\sqrt{q}}{1-q} - \frac{4\sqrt{q^3}}{1-q^3} + \cdots,$$

$$\frac{2kK}{\pi} = \frac{4\sqrt{q}}{1+q} + \frac{4\sqrt{q^3}}{1+q^3} + \cdots$$

dont la première change de signe, mais non la seconde, lorsqu'on change q en $\frac{1}{q}$, c'est-à-dire ω en $-\omega$. Que de choses difficiles et délicates se trouvent amenées dans l'étude d'une fonction, par la présence d'une ligne de discontinuité!

Paris, septembre 1881.

Ueber die Berührung fester elastischer Körper.

(Von Herrn *Heinrich Hertz.*)

In der Theorie der Elasticität werden als Ursachen der Deformationen theils Kräfte, welche auf das Innere der Körper wirken, theils auf die Oberfläche wirkende Druckkräfte angenommen. Für beide Arten von Kräften kann der Fall eintreten, dass dieselben in einzelnen unendlich kleinen Theilen der Körper unendlich gross werden, so zwar, dass die Integrale der Kräfte über diese Theile genommen einen endlichen Werth behalten. Beschreiben wir alsdann um den Unstetigkeitspunkt eine geschlossene Fläche, deren Dimensionen sehr klein gegen die Dimensionen des ganzen Körpers sind, sehr gross hingegen im Vergleich zu den Dimensionen des Theils, in welchem die Kräfte angreifen, so können die Deformationen ausserhalb und innerhalb dieser Fläche ganz unabhängig von einander betrachtet werden. Ausserhalb hängen die Deformationen ab von der Gestalt des Gesammtkörpers, der Vertheilung der übrigen Kräfte und den endlichen Integralen der Kraftcomponenten im Unstetigkeitspunkte, innerhalb hängen sie nur ab von der Vertheilung der im Innern selbst angreifenden Kräfte. Die Drucke und Deformationen im Innern sind gegen die im Aeussern unendlich gross.

Im Folgenden wollen wir einen hierher gehörigen Fall behandeln, der praktisches Interesse hat*), den Fall nämlich, dass zwei elastische isotrope Körper sich in einem sehr kleinen Theil ihrer Oberfläche berühren, und durch diesen Theil einen endlichen Druck der eine auf den andern ausüben. Die sich berührenden Oberflächen stellen wir uns als vollkommen glatt vor, d. h. wir nehmen nur einen senkrechten Druck zwischen den sich berührenden Theilen an. Das beiden Körpern nach der Deformation gemeinsame Stück der Oberfläche wollen wir die Druckfläche, die Begrenzung

---

*) Vgl. *Winkler,* Die Lehre von der Elasticität und Festigkeit, Prag 1867; I, p. 43. *Grashof,* Theorie der Elasticität und Festigkeit, Berlin 1878; p. 49—54.

dieses Stücks die Druckfigur nennen. Die Fragen, deren Beantwortung uns naturgemäss zunächst obliegt, sind die nach der Fläche, von welcher die Druckfläche ein unendlich kleiner Theil ist*), die Frage nach der Form und absoluten Grösse der Druckfigur, die Frage nach der Vertheilung des senkrechten Drucks in der Druckfläche. Von Wichtigkeit ist die Bestimmung der Maximaldrucke, welche in den an einander gepressten Körpern vorkommen, insofern von diesen es abhängt, ob der Druck ohne bleibende Deformation ertragen wird; von Interesse ist endlich die Annäherung der beiden Körper, welche durch einen bestimmten Gesammtdruck hervorgerufen wird.

Als gegeben haben wir zu betrachten die beiden Elasticitätsconstanten eines jeden der sich berührenden Körper, die Form und gegenseitige Lage der Oberflächen in der Nähe des Berührungspunktes, endlich den Gesammtdruck. Unsere Maasse wollen wir so wählen, dass die Druckfläche endlich erscheint, dann gelten unsere Betrachtungen für das ganze endliche Gebiet, die Gesammtdimensionen der sich berührenden Körper aber haben wir uns als unendlich vorzustellen.

Wir denken uns zunächst die beiden Oberflächen in mathematische Berührung gebracht, und zwar so, dass die gemeinsame Normale parallel ist der Richtung des Druckes, welchen der eine Körper auf den andern ausüben soll. In der gemeinsamen Tangentialebene richten wir das orthogonale geradlinige System der x, y ein, dessen Nullpunkt der Berührungspunkt sein soll, die dritte senkrechte Coordinate heisse z. Der Abstand jedes Punktes der beiden Oberflächen von der Tangentialebene in der Nähe des Berührungspunktes, d. h. im ganzen endlichen Gebiet, wird durch eine homogene Function zweiten Grades in x und y dargestellt sein. Es wird daher auch der Abstand zweier correspondirenden Punkte der beiden Oberflächen durch eine solche Function dargestellt sein, und zwar wollen wir das System der x und y so drehen, dass aus der letztgenannten Function das Glied in xy wegfällt.

Wir können dann die Gleichungen der beiden Oberflächen schreiben:

*) Im Allgemeinen ändern sich die Krümmungsradien der Oberfläche eines deformirten Körpers nur unendlich wenig, in unserem speciellen Fall hingegen ändern sie sich um endliche Grössen, und hierin liegt die Berechtigung obiger Frage. Berühren sich z. B. zwei gleiche Kugeln von gleichem Material, so gehört die Druckfläche einer Ebene an, also einer Fläche, die von jeder der sich berührenden Oberflächen ihrer Natur nach verschieden ist.

$$z_1 = A_1 x^2 + Cxy + B_1 y^2, \quad z_2 = A_2 x^2 + Cxy + B_2 y^2,$$

und wir haben für den Abstand correspondirender Punkte beider Oberflächen $z_1 - z_2 = Ax^2 + By^2$, wo $A = A_1 - A_2$, $B = B_1 - B_2$ und alle A, B, C als verschwindend klein zu betrachten sind*). A und B haben nach der Bedeutung der Grösse $z_1 - z_2$ das gleiche Vorzeichen; wir wollen dasselbe als positiv annehmen. Dies fällt zusammen mit der Bestimmung, dass die positive z-Axe in das Innere desjenigen Körpers gehe, auf welchen sich der Index 1 bezieht.

Wir denken uns weiter in jedem der beiden Körper ein besonderes mit dem betreffenden Körper im Unendlichen starr verbundenes rechtwinklig-geradliniges Coordinatensystem, welches während der mathematischen Berührung der Oberfläche mit dem entsprechenden Theile des bisherigen Systems der xyz zusammenfällt. Bei einem auf die Körper ausgeübten Drucke werden sich diese Coordinatensysteme parallel der z-Axe gegen einander verschieben und zwar wird ihre Verschiebung gleich sein der Annäherung der von der Druckstelle unendlich entfernten Theile beider Körper. Es wird nicht nöthig sein, für diese Coordinatensysteme besondere Bezeichnungen einzuführen. Die Ebene $z = 0$ in jedem dieser Systeme ist der Oberfläche des betreffenden Körpers im Endlichen unendlich nahe und kann daher als die Oberfläche selbst angesehen werden, ebenso die Richtung der z-Axe als die Richtung der Normale zu dieser Oberfläche.

Es seien ξ, η, ζ die Verschiebungen nach x, y, z; mit Y_x werde die Druckcomponente in Richtung der y bezeichnet, welche in einem Flächenelemente, dessen Normale die x-Richtung hat, von dem Körpertheile, in dem x kleinere Werthe besitzt, auf denjenigen, in dem x grösser ist, ausgeübt wird, und die analoge Bezeichnung gelte für die übrigen Druckcomponenten; es seien endlich $K_1 \theta_1$ und $K_2 \theta_2$ die Elasticitätscoefficienten des einen und

---

*) Es seien ϱ_{11} und ϱ_{21} die beiden reciproken Hauptkrümmungsradien der Oberfläche des einen Körpers, positiv gerechnet, wenn die zugehörigen Krümmungsmittelpunkte im Innern dieses Körpers liegen, ebenso seien ϱ_{21} und ϱ_{22} die beiden Hauptkrümmungen der Oberfläche des andern Körpers, endlich sei ω der Winkel, welchen die Ebenen der Krümmungen ϱ_{21} und ϱ_{22} mit einander bilden. Dann ist

$$2(A+B) = \varrho_{11} + \varrho_{12} + \varrho_{21} + \varrho_{22},$$
$$2(A-B) = \sqrt{(\varrho_{11} - \varrho_{12})^2 + 2(\varrho_{11} - \varrho_{12})(\varrho_{21} - \varrho_{22})\cos 2\omega + (\varrho_{21} - \varrho_{22})^2}.$$

Führen wir einen Hülfswinkel τ ein durch die Gleichung $\cos\tau = \frac{A-B}{A+B}$, so ist

$$2A = (\varrho_{11} + \varrho_{12} + \varrho_{21} + \varrho_{22})\cos^2\frac{\tau}{2}, \quad 2B = (\varrho_{11} + \varrho_{12} + \varrho_{21} + \varrho_{22})\sin^2\frac{\tau}{2}.$$

des andern Körpers. Allgemein mögen die Grössen, welche sich auf den einen oder den andern der beiden Körper beziehen, durch die Indices 1 und 2 unterschieden werden; wo die Rechnungen sich gleichmässig auf beide beziehen, lassen wir die Indices fort. Wir haben nun folgende Bedingungen für das Gleichgewicht.

1) Im Innern jedes Körpers muss sein

$$0 = \Delta\xi + (1+2\theta)\frac{\partial\sigma}{\partial x}, \quad 0 = \Delta\eta + (1+2\theta)\frac{\partial\sigma}{\partial y}, \quad 0 = \Delta\zeta + (1+2\theta)\frac{\partial\sigma}{\partial z},$$

$$\sigma = \frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z},$$

und zwar ist in 1 für θ θ_1, in 2 für θ θ_2 zu setzen.

2) An den Grenzen müssen die folgenden Bedingungen erfüllt sein:

a) Im Unendlichen verschwinden ξ, η, ζ, da hier unsere Coordinatensysteme mit den Körpern starr verbunden sind;

b) für $z = 0$, das heisst für die Oberflächen der Körper, müssen die Tangentialkräfte, die senkrecht zur z-Axe sind, verschwinden, also:

$$Y_z = -K\left(\frac{\partial\eta}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right) = 0, \quad X_z = -K\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial z}\right) = 0;$$

c) für $z = 0$ muss ferner ausserhalb eines gewissen Theils dieser Ebene, nämlich ausserhalb der Druckfläche, auch die Normalkraft verschwinden, also sein

$$Z_z = 2K\left(\frac{\partial\zeta}{\partial z} + \theta\sigma\right) = 0.$$

Innerhalb jenes Theils muss sein

$$Z_{z1} = Z_{z2}.$$

Die Vertheilung des Druckes in jenem Theil kennen wir nicht, dafür haben wir hier eine Bedingung für die Verschiebung ζ:

d) Bezeichnet nämlich α die Verschiebung gegen einander der beiden Coordinatensysteme, auf welche wir die Verrückungen beziehen, so ist der Abstand correspondirender Punkte beider Oberflächen nach der Deformation gleich $Ax^2 + By^2 + \zeta_1 - \zeta_2 - \alpha$, und da innerhalb der Druckfläche dieser Abstand verschwinden soll, muss obiger Ausdruck gleich Null sein, also sein:

$$\zeta_1 - \zeta_2 = \alpha - Ax^2 - By^2 = \alpha - z_1 + z_2.$$

e) Zu den aufgezählten Bedingungen treten dann noch die, dass im Innern der Druckfläche Z_z überall das positive Vorzeichen habe, so wie die, dass ausserhalb der Druckfläche $\zeta_1 - \zeta_2 > \alpha - Ax^2 - By^2$ sei, da sonst der eine Körper in den andern überquellen müsste.

f) Endlich muss das Integral $\int Z_z ds$, genommen über den von der Druckfigur begrenzten Theil der Oberfläche gleich dem gegebenen Gesammtdruck, den wir p nennen wollen, sein.

Die besondere Form der Oberfläche der beiden Körper kommt nur in der Grenzbestimmung 2) *d*) vor, abgesehen von dieser verhält sich jeder derselben wie ein unendlich grosser Körper, der den ganzen Raum auf einer Seite der Ebene $z = 0$ ausfüllt, während auf diese Ebene nur senkrechte Drucke wirken. Das Gleichgewicht eines solchen Körpers betrachten wir daher näher. Sei P eine Function, welche innerhalb des Körpers der Gleichung $\Delta P = 0$ genügt, im Besonderen wollen wir uns P vorstellen als Potential einer auf der Ebene $z = 0$ im Endlichen vertheilten Elektricitätsmenge. Sei ferner

$$\Pi = -\frac{zP}{K} + \frac{1}{K(1+2\theta)}\left\{\int_z^i P dz - J\right\},$$

wo i eine unendliche Grösse sein soll und J eine Constante, die so gewählt ist, dass Π endlich wird. Zu diesem Behufe wird J gleich sein müssen dem natürlichen Logarithmus von i, multiplicirt mit der Gesammtmenge freier Elektricität, die dem Potentiale P entspricht. Aus der Festsetzung für Π folgt:

$$\Delta\Pi = -\frac{2}{K}\frac{\partial P}{\partial z}.$$

Wir setzen nun, nach Einführung der Abkürzung

$$\frac{2(1+\theta)}{K(1+2\theta)} = \vartheta:$$

$$\xi = \frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad \eta = \frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad \zeta = \frac{\partial \Pi}{\partial z} + 2\vartheta P,$$

$$\sigma = \Delta\Pi + 2\vartheta\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{2}{K(1+2\theta)}\frac{\partial P}{\partial z}.$$

Man überzeugt sich leicht, dass das vorgelegte System von Verschiebungen den für ξ, η, ζ aufgestellten Differentialgleichungen genügt, und dass in der Unendlichkeit diese Verschiebungen verschwinden. Für die Componenten der Drucke erhalten wir:

$$X_x = -2K\left\{\frac{\partial^2\Pi}{\partial x^2} + \frac{2\theta}{K(1+2\theta)}\frac{\partial P}{\partial z}\right\}, \quad X_y = -2K\frac{\partial^2\Pi}{\partial x\partial y},$$

$$Y_y = -2K\left\{\frac{\partial^2\Pi}{\partial y^2} + \frac{2\theta}{K(1+2\theta)}\frac{\partial P}{\partial z}\right\}, \quad X_z = -2K\left\{\frac{\partial^2\Pi}{\partial x\partial z} + \vartheta\frac{\partial P}{\partial x}\right\} = 2z\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial z},$$

$$Z_z = -2K\left\{\frac{\partial^2\Pi}{\partial z^2} + \frac{2(2+3\theta)}{K(1+2\theta)}\frac{\partial P}{\partial z}\right\}, \quad Y_z = -2K\left\{\frac{\partial^2\Pi}{\partial y\partial z} + \vartheta\frac{\partial P}{\partial y}\right\} = 2z\frac{\partial^2 P}{\partial y\partial z}.$$

Aus den beiden letzten Formeln folgt, dass für das vorgelegte System in der Ebene $z = 0$ die zur z-Axe senkrechten Tangentialkräfte verschwinden. Wir bestimmen noch die Verschiebung ζ und den Normaldruck Z_z für die Ebene $z = 0$; wir finden

$$\zeta = \vartheta P, \quad Z_z = -2\frac{\partial P}{\partial z}.$$

Die Dichtigkeit der Elektricität, welche zum Potentiale P gehört, ist gleich $-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial P}{\partial z}$, wir erhalten daher den Satz: Die Verschiebung ζ in der Oberfläche, welche dem Normaldruck Z_z entspricht, ist gleich dem $\frac{\vartheta}{4\pi}$ fachen des Potentials, welches zu einer dem Druck Z_z numerisch gleichen elektrischen Dichtigkeit gehört.

Indem wir nun die Betrachtung der *beiden* Körper wieder aufnehmen, denken wir uns die Elektricität, deren Potential P ist, nur in einem begrenzten Theil der Ebene $z = 0$ verbreitet, setzen Π_1 und Π_2 den Ausdrücken gleich, die aus dem für Π gegebenen Ausdruck entstehen, wenn den Zeichen K und θ der Index 1 oder 2 gegeben wird, und machen:

$$\xi_1 = \frac{\partial \Pi_1}{\partial x}, \quad \eta_1 = \frac{\partial \Pi_1}{\partial y}, \quad \zeta_1 = \frac{\partial \Pi_1}{\partial z} + 2\vartheta_1 P,$$

$$\xi_2 = -\frac{\partial \Pi_2}{\partial x}, \quad \eta_2 = -\frac{\partial \Pi_2}{\partial y}, \quad \zeta_2 = -\frac{\partial \Pi_2}{\partial z} - 2\vartheta_2 P,$$

woraus für $z = 0$ folgt:

$$\zeta_1 = \vartheta_1 P, \quad \zeta_2 = \vartheta_2 P, \quad Z_{z1} = -2\frac{\partial P}{\partial z}, \quad Z_{z2} = 2\frac{\partial P}{\partial z}.$$

Bei dieser Annahme wird den gemachten Auseinandersetzungen zufolge den Bedingungen 1), 2) *a*) und 2) *b*) genügt. Da $\frac{\partial P}{\partial z}$ auf beiden Seiten der Ebene $z = 0$ entgegengesetzte Werthe hat und verschwindet ausserhalb der elektrischen Fläche, deren Potential P ist, so sind durch den gemachten Ansatz auch die Bedingungen 2) *c*) erfüllt, falls die Druckfläche die mit Elektricität belegte Fläche ist. Daraus, dass P an der Fläche $z = 0$ stetig ist, folgt ferner für diesen Werth von z: $\vartheta_2\zeta_1 + \vartheta_1\zeta_2 = 0$. Nach der Bedingung 2) *d*) aber haben wir für die Druckfläche: $\zeta_1 - \zeta_2 = \alpha - z_1 + z_2$, also wird hier:

$$\zeta_1 = \frac{\vartheta_1}{\vartheta_1 + \vartheta_2}(\alpha - z_1 + z_2), \quad \zeta_2 = -\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2}(\alpha - z_1 + z_2).$$

Die Gleichung der Druckfläche ist, wenn wir von einer Constanten, die von der Wahl des Coordinatensystems abhängt und daher bedeutungslos ist, ab-

sehen, $z = z_1+\zeta_1 = z_2+\zeta_2$, also entwickelt $(\vartheta_1+\vartheta_2)z = \vartheta_2 z_1+\vartheta_1 z_2$. Hiernach ist die Druckfläche Theil einer Fläche zweiten Grades, die zwischen den sich berührenden Flächen in deren undeformirtem Zustande liegt, sie ist ähnlicher der Begrenzung desjenigen Körpers, dessen Elasticitätscoefficient grösser ist; sind beide Körper von demselben Material, so ist sie geradezu die Mittelfläche zwischen deren Oberflächen, da dann $2z = z_1+z_2$ wird.

Wir machen jetzt eine bestimmte Annahme über die Anordnung der Elektricität, deren Potential P ist. Sie sei verbreitet auf einer Ellipse, deren Halbaxen a und b in die Richtung der Axen der x und y fallen, mit einer Dichtigkeit, die gleich

$$\frac{3p}{8\pi^2 ab}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$$

ist, das heisst so, dass sie aufgefasst werden kann als eine Masse, die mit gleicher räumlicher Dichtigkeit ein unendlich abgeplattetes Ellipsoid erfüllt. Es ist dann

$$P = \frac{3p}{16\pi}\int_u^\infty \frac{1-\frac{x^2}{a^2+\lambda}-\frac{y^2}{b^2+\lambda}-\frac{z^2}{\lambda}}{\sqrt{a^2+\lambda.b^2+\lambda.\lambda}}\,d\lambda,$$

wo die untere Integralgrenze u die positive Wurzel der kubischen Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2+u}+\frac{y^2}{b^2+u}+\frac{z^2}{u} = 1$$

bezeichnet. Für das Innere der Druckfläche, welche durch die genannte Ellipse begrenzt wird, ist $u=0$, also $P=L-Mx^2-Ny^2$, wo L, M, N gewisse bestimmte positive Integrale bedeuten. Die Bedingung 2) *d*) ist demnach erfüllt, wenn wir a und b so bestimmen, dass

$$(\vartheta_1+\vartheta_2)M=A,\quad (\vartheta_1+\vartheta_2)N=B$$

wird, was immer möglich ist. Die in der Bedingung vorkommende Unbekannte α bestimmt sich dann durch die Gleichung

$$(\vartheta_1+\vartheta_2)L = \alpha.$$

Dass die erste der Bedingungen 2) *e*) erfüllt ist, folgt unmittelbar aus der Gleichung

$$Z_z = \frac{3p}{2\pi ab}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}.$$

Um zu zeigen, dass es auch die zweite ist, ist zu beweisen, dass für $z=0$ und $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}>1$, $(\vartheta_1+\vartheta_2)P>\alpha-Ax^2-By^2$ ist. Zu diesem Zwecke be-

achte man, dass hier:

$$P = L - Mx^2 - Ny^2 - \frac{3p}{16\pi}\int_0^u \frac{1 - \frac{x^2}{a^2+\lambda} - \frac{y^2}{b^2+\lambda}}{\sqrt{a^2+\lambda \,.\, b^2+\lambda \,.\, \lambda}}\, d\lambda$$

und daher, da der Zähler des unter dem Integralzeichen stehenden Ausdrucks im betrachteten Gebiete negativ ist, $P > L - Mx^2 - Ny^2$. Durch Multiplication dieser Gleichung mit $\vartheta_1 + \vartheta_2$ folgt die, welche wir zu beweisen suchten. Dass endlich auch die letzte Bedingung 2) f) erfüllt ist, ergiebt eine einfache Integration, und wir besitzen daher in der angenommenen Form von P und dem zugehörigen System der $\xi\eta\zeta$ eine allen Bedingungen genügende Lösung.

Die Gleichungen für die Axen der Druckellipse werden, explicite geschrieben:

$$\int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{(a^2+u)^3(b^2+u)u}} = \frac{A}{\vartheta_1+\vartheta_2}\frac{16\pi}{3p}, \quad \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)^3 u}} = \frac{B}{\vartheta_1+\vartheta_2}\frac{16\pi}{3p},$$

oder, nach Einführung des Verhältnisses $a:b = k$ und einer einfachen Umformung:

$$\frac{1}{a^3}\int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{(1+k^2z^2)^3(1+z^2)}} = \frac{8\pi}{3p}\frac{A}{\vartheta_1+\vartheta_2}, \quad \frac{1}{a^3}\int_0^\infty \frac{dz}{k^2\sqrt{(1+k^2z^2)(1+z^2)^3}} = \frac{8\pi}{3p}\frac{B}{\vartheta_1+\vartheta_2}.$$

Durch Division wird eine transcendente Gleichung für das Verhältniss k erhalten *). Dasselbe hängt nur ab von dem Verhältniss $A:B$, und man

*) Die Auflösung dieser Gleichung und die Auswerthung der zur Bestimmung von a und b nothwendigen Integrale kann mit Hülfe der *Legendre*schen Tafeln ausgeführt werden, ohne dass neue Quadraturen nöthig würden. Die immerhin weitläufige Rechnung wird für die meisten Fälle überflüssig gemacht durch die folgende kleine Tabelle, deren Einrichtung diese ist. Drückt man die Grössen A und B in den Gleichungen für a und b durch die Hauptkrümmungen und den in einer früheren Anmerkung eingeführten Hülfswinkel τ aus, so lassen sich die Auflösungen dieser Gleichungen in der Form darstellen:

$$a = \mu\sqrt[3]{\frac{3p(\vartheta_1+\vartheta_2)}{8(\varrho_{11}+\varrho_{12}+\varrho_{21}+\varrho_{22})}}, \quad b = \nu\sqrt[3]{\frac{3p(\vartheta_1+\vartheta_2)}{8(\varrho_{11}+\varrho_{12}+\varrho_{21}+\varrho_{22})}},$$

wo μ und ν transcendente Functionen des Winkels τ sind. Die Tabelle giebt nun die Werthe dieser Functionen für zehn Werthe des in Winkelgraden angegebenen Argumentes τ.

τ	90	80	70	60	50	40	30	20	10	0
μ	1,0000	1,1278	1,2835	1,4858	1,7542	2,1357	2,7307	3,7779	6,6120	infinitum
ν	1,0000	0,8927	0,8017	0,7171	0,6407	0,5673	0,4930	0,4079	0,3186	0,0000

erkennt leicht aus der Bedeutung, welche wir den Kräften und Verschiebungen untergelegt haben, dass die Druckellipse immer länglicher ist, als die Ellipsen, in welchen der Abstand der beiden Körper constant ist. Für die absolute Grösse der Druckfläche folgt, dass dieselbe bei gegebener Form der Oberflächen proportional ist der dritten Wurzel aus dem Druck, sowie der dritten Wurzel aus der Grösse $\vartheta_1+\vartheta_2$. Für die Annäherung der Körper durch den Druck haben wir nach dem Vorigen:

$$\alpha = \frac{3p}{8\pi}\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{a}\int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{(1+k^2z^2)(1+z^2)}}.$$

Führen wir die Multiplication mit der Summe $\vartheta_1+\vartheta_2$ aus, so zerfällt α in zwei Summanden, die eine besondere Bedeutung haben; es sind die Annäherungen des Nullpunktes an die unendlich entfernten Theile des einen und des anderen Körpers; wir können sie bezeichnen als die Einsenkungen, die der eine und der andere Körper erlitten hat. Bei gleicher Gestalt der sich berührenden Oberflächen ist die Annäherung proportional der $\frac{2}{3}$ten Potenz des Drucks und der gleichen Potenz der Grösse $\vartheta_1+\vartheta_2$. Aendern A und B unter Beibehaltung ihres Verhältnisses ihren absoluten Werth, so ändern sich die Dimensionen der Druckfläche umgekehrt wie die dritten Wurzeln aus diesem Werth, die Annäherung direct wie diese Wurzeln. Werden A und B unendlich, so wird auch die Annäherung unendlich; Körper, welche sich mit scharfen Spitzen berühren, dringen in einander ein.

Hieran anknüpfend wollen wir die Beanspruchung desjenigen Elementes bestimmen, welches sich im Anfangspunkte unseres Coordinatensystems befindet, indem wir die drei Ausdehnungen $\frac{\partial\xi}{\partial x}$, $\frac{\partial\eta}{\partial y}$, $\frac{\partial\zeta}{\partial z}$ suchen. Wir haben zunächst für den Nullpunkt:

$$\sigma = \frac{2}{K(1+2\theta)}\frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{3p}{2K(1+2\theta)\pi}\frac{1}{ab},$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial z} = \frac{1}{K(1+2\theta)}\frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{3p}{4K(1+2\theta)\pi}\frac{1}{ab}.$$

Weiter haben wir für die Ebene $z=0$:

$$\xi = \frac{\partial\Pi}{\partial x},\quad \eta = \frac{\partial\Pi}{\partial y},\quad \Pi = \frac{1}{K(1+2\theta)}\int_0^\infty P\,dz = \frac{1}{2K(1+2\theta)}\int_{-\infty}^\infty P\,dz.$$

Man erkennt, dass in der gedachten Ebene ξ und η proportional sind den Kräften, welche ein unendlicher elliptischer Cylinder ausübt, der auf der Druckfläche steht und dessen Dichtigkeit nach innen zunimmt nach dem-

selben Gesetz, nach welchem der Druck in der Druckfläche zunimmt. Im Allgemeinen sind also ξ und η durch verwickelte Functionen gegeben; für die Punkte, welche der Axe nahe liegen, lassen sie sich indessen leicht berechnen. Wir schneiden um die Axe einen sehr dünnen Cylinder heraus, dessen Mantelfläche der Mantelfläche des ganzen ähnlich ist; diesen Cylinder können wir als homogen betrachten, und da der äussere Theil auf die Punkte im Innern keine Anziehung ausübt, so müssen die Componenten der in Rede stehenden Kräfte, und also auch ξ und η für die verschiedenen Punkte gleich sein einer Constanten, multiplicirt mit respective $\frac{x}{a}$ und $\frac{y}{b}$. Daraus folgt $a\frac{\partial\xi}{\partial x} - b\frac{\partial\eta}{\partial y} = 0$. Andererseits haben wir

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} = \sigma - \frac{\partial\zeta}{\partial z} = -\frac{3p}{4K(1+2\theta)\pi}\frac{1}{ab}.$$

Hieraus finden wir nun für die drei Grössen, die wir suchten,

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = -\frac{3p}{4K(1+2\theta)\pi}\frac{1}{a(a+b)},$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial y} = -\frac{3p}{4K(1+2\theta)\pi}\frac{1}{b(a+b)},$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial z} = -\frac{3p}{4K(1+2\theta)\pi}\frac{1}{ab}.$$

Das negative Vorzeichen dieser drei Grössen zeigt an, dass das in Frage stehende Element in allen drei Richtungen comprimirt wird. Die Compressionen sind der dritten Wurzel aus dem Gesammtdruck proportional. Aus ihnen sind leicht die Drucke im Anfangspunkte zu bestimmen. Diese Drucke sind die grössten, welche überhaupt in den gepressten Körpern vorkommen; man kann daher behaupten, dass ein Ueberschreiten der Elasticitätsgrenze nicht eher statthaben wird, als bis diese Drucke von der Ordnung derjenigen werden, welche ein solches Ueberschreiten veranlassen können. In plastischen Körpern, z. B. in den weichen Metallen, wird dies Ueberschreiten zunächst in einer seitlichen Ausweichung, verbunden mit dauernder Compression bestehen, dasselbe wird daher auch nicht eine ins Unendliche wachsende Störung des Gleichgewichts zur Folge haben, sondern die Druckfläche wird sich so lange über das berechnete Maass hinaus vergrössern, bis der Druck auf die Flächeneinheit hinreichend klein geworden ist, um ertragen zu werden. Schwieriger ist es, die Erscheinung in spröden Körpern, wie hartem Stahl, Glas, Krystallen zu bestimmen, in welchen eine

Ueberschreitung der Elasticitätsgrenze nur als Entstehung eines Risses oder Sprunges, also nur unter dem Einfluss von Zugkräften auftritt. Von dem oben betrachteten Element, als von einem allseitig comprimirten kann ein solcher Sprung nicht ausgehen, und es ist bei unserer heutigen Kenntniss von der Festigkeit spröder Körper überhaupt nicht möglich, genau dasjenige Element zu bestimmen, in welchem die Bedingungen für das Zustandekommen eines Sprunges bei wachsendem Druck zuerst auftreten. Indessen zeigt eine eingehendere Discussion so viel, dass in Körpern, welche in ihrem elastischen Verhalten dem Glase oder harten Stahle ähnlich sind, bei weitem die stärksten Zugkräfte in der Oberfläche und zwar am Rande der Druckfigur auftreten. Es wird durch eine solche Discussion wahrscheinlich, dass der erste Sprung an den Enden der kleinen Axe der Druckellipse entsteht und senkrecht zu dieser Axe am Rande der Druckellipse entlang läuft.

Die gefundenen Formeln werden besonders einfach für den Fall, dass beide sich berührenden Körper Kugeln sind. In diesem Fall gehört auch die Druckfläche einer Kugel an. Ist ϱ der reciproke Radius der letzteren und sind ϱ_1 und ϱ_2 die reciproken Radien der sich berührenden Kugeln, so besteht die Beziehung $(\vartheta_1+\vartheta_2)\varrho = \vartheta_2\varrho_1+\vartheta_1\varrho_2$, welche für Kugeln aus gleichem Material in die einfachere $2\varrho = \varrho_1+\varrho_2$ übergeht. Die Druckfigur ist ein Kreis, dessen Radius wir a nennen wollen. Setzen wir

$$x^2+y^2 = r^2, \quad \frac{r^2}{a^2+u}+\frac{z^2}{u} = 1,$$

so wird

$$P = \frac{3p}{16\pi}\int_u^\infty \frac{1-\frac{r^2}{a^2+u}-\frac{z^2}{u}}{(a^2+u)\sqrt{u}}\,du,$$

welches Integral sich auch in geschlossener Form darstellen lässt.

Man findet nun leicht für den Radius des Druckkreises a und für die Annäherung α der Kugeln sowie für die Verschiebung ζ in der Fläche $z = 0$, innerhalb des Druckkreises:

$$a = \sqrt[3]{\frac{3p(\vartheta_1+\vartheta_2)}{16(\varrho_1+\varrho_2)}}, \quad \alpha = \frac{3p(\vartheta_1+\vartheta_2)}{16a}, \quad \zeta = \frac{3p}{32}\,\vartheta\,\frac{2a^2-r^2}{a^3}.$$

Ausserhalb des Druckkreises wird ζ durch eine etwas verwickeltere, einen arctg enthaltende Function dargestellt. Sehr einfache Ausdrücke ergeben sich für ξ und η in der Fläche $z = 0$. Für die Verdichtung in der Fläche $z = 0$ findet man $\sigma = -\frac{3p}{2K(1+2\theta)\pi}\frac{\sqrt{a^2-r^2}}{a^3}$ innerhalb des Druckkreises,

ausserhalb desselben ist $\sigma = 0$. Für den Druck Z_z innerhalb des Druckkreises wird erhalten

$$Z_z = \frac{3p}{2\pi} \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{a^3}.$$

Im Mittelpunkte hat man

$$Z_z = \frac{3p}{2\pi a^2}, \quad X_x = Y_y = \frac{1 + 4\theta}{4(1 + 2\theta)} \frac{3p}{\pi a^2}.$$

Die erlangten Formeln lassen sich ohne Weiteres auf besondere Fälle anwenden. Für θ kann man in den meisten Körpern mit hinreichender Annäherung 1 setzen. K wird dann gleich $\frac{3}{8}$ des Elasticitätsmoduls, ϑ wird gleich $\frac{32}{9}$ des reciproken Werthes des Elasticitätsmoduls; in allen Körpern liegt ϑ zwischen dem Dreifachen und dem Vierfachen dieses reciproken Werthes. Presst man beispielshalber eine Glaslinse von 100 Meter Radius durch das Gewicht eines Kilogrammes gegen eine ebene Glasplatte (unter welchen Umständen der Radius des ersten *Newton*schen Ringes gleich ca. 5,2 Millimetern wird), so erhält man eine Druckfläche, die einer Kugel von 200 Meter Radius angehört, der Radius des Druckkreises ist $2{,}67^{mm}$, die Annäherung der beiden Glaskörper beträgt nur 71 Milliontel Millimeter, der Druck Z_z in der Mitte der Druckfläche ist gleich 0,0669 Kilogramm pro Quadratmillimeter, die dazu senkrechten Drucke X_x und Y_y betragen ca. $\frac{5}{8}$ obigen Werths. Denken wir uns als zweites Beispiel eine Reihe von Stahlkugeln vom Radius R durch ihre eigene Schwere gegen eine horizontale starre Platte gepresst, so findet man sehr nahezu, in Millimetern gerechnet, den Radius des Druckkreises $a = \frac{1}{1000}\sqrt[3]{R^4}$; also für eine Kugel vom Radius

$$1^{mm}, \quad 1^{m}, \quad 1^{km}, \quad 1000^{km},$$

wird

$$a = \text{ca. } \tfrac{1}{1000}{}^{mm}, \quad 10^{mm}, \quad 100^{m}, \quad 1000^{km},$$

oder

$$a = \quad \tfrac{1}{1000} \quad \tfrac{1}{100} \quad \tfrac{1}{10} \quad \tfrac{1}{1}$$

des Radius. Bei Kugeln, deren Radius grösser als 1^{km} ist, beträgt der Radius des Druckkreises schon mehr als $\frac{1}{10}$ des Radius der Kugel. Auf solche Verhältnisse finden unsere Rechnungen keine Anwendung, da wir eben dies Verhältniss als einen kleinen Bruch voraussetzten. Aber eben dass in Kugeln von dieser Grösse bei kleinen Deformationen ein Gleichgewicht nicht mehr möglich ist, zeigt, dass ein solches überhaupt nicht zu Stande kommen kann. Denken wir uns als ein anderes Beispiel zwei Stahlkugeln von gleichem

Radius R an einander gelegt und nur durch die gegenseitige Gravitation an einander gepresst. Es ergiebt sich hier der Radius des Druckkreises $\varrho = 0{,}000000378 \sqrt[3]{R^5}$, wenn in Millimetern gerechnet wird*). Ist der Radius der beiden Kugeln gleich 4,3 Kilometern, so wird $\varrho = \frac{1}{100} R$, ist er gleich 136 Kilometern, so wird $\varrho = \frac{1}{10} R$. Zwischen beiden Werthen und näher dem letzteren wird derjenige Werth von R liegen, für welchen die Elasticitätskräfte aufhören, der Gravitation das Gleichgewicht zu halten. Werden Stahlkugeln von grösserem Radius an einander gelegt, so werden sie zerbrechen, und zwar in Theile, deren Dimensionen von der Ordnung der eben für R angegebenen Werthe sind.

Zum Schluss wollen wir von den erlangten Formeln eine Anwendung machen auf den *Stoss* elastischer Körper. Sowohl aus schon vorhandenen Beobachtungen, als auch aus den Resultaten der gleich anzustellenden Betrachtungen folgt, dass die Stosszeit, d. h. die Zeit, während welcher die stossenden Körper in Berührung sind, wenn auch absolut sehr klein, doch sehr gross ist im Verhältniss zu derjenigen Zeit, welche elastische Wellen nöthig haben, um in den in Rede stehenden Körpern Längen von der Ordnung desjenigen Theils der Oberflächen zu durchlaufen, welcher beiden Körpern in ihrer grössten Annäherung gemeinsam ist, und welchen wir die Stossfläche nennen wollen. Daraus folgt, dass der elastische Zustand beider Körper in der Nähe des Stosspunktes während des ganzen Verlaufs des Stosses sehr nahezu gleich ist dem Gleichgewichtszustand, den der zwischen beiden Körpern in jedem Augenblick vorhandene Gesammtdruck bei längerer Dauer hervorbringen würde. Bestimmen wir daher den zwischen beiden Körpern herrschenden Druck aus der Beziehung, welche wir zwischen diesem Druck und der Annäherung in Richtung der gemeinsamen Normale früher für ruhende Körper aufgestellt haben, und wenden im Uebrigen auf das Innere jedes der beiden Körper die Differentialgleichungen für bewegte elastische Körper an, so werden wir den Verlauf des Vorgangs mit grosser Annäherung erhalten. Zu allgemeinen Sätzen können wir auf diese Weise naturgemäss nicht kommen, wir erhalten aber eine Reihe solcher, wenn wir jetzt die weitere Voraussetzung machen, dass die Stosszeit gross sei auch gegen diejenige Zeit, welche die elastischen Wellen nöthig haben, um die

*) In diesen Rechnungen ist der Elasticitätsmodul des Stahles zu $20000 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$, die Dichtigkeit des Stahls zu 7,7, die mittlere der Erde zu 6 angenommen.

ganzen Dimensionen der stossenden Körper zu durchlaufen. Ist diese Bedingung erfüllt, so bewegen sich alle Theile der stossenden Körper, mit Ausnahme derjenigen, welche dem Stosspunkt unendlich nahe liegen, wie die Theile starrer Körper; dass die fragliche Bedingung in wirklichen Körpern erfüllt sein kann, werden wir aus unseren Resultaten nachweisen.

Wir behalten unsere Coordinatensysteme der xyz bei. Sei α die Componente in Richtung der z der Entfernung zweier Punkte des einen und des andern Körpers, zweier Punkte, die so gewählt sind, dass ihre Entfernung von der Stossfläche klein ist gegen die Dimensionen der ganzen Körper, gross gegen die Dimensionen der Stossfläche; sei ferner α' die Ableitung von α nach der Zeit. Ist nun dJ diejenige Bewegungsgrösse, welche während des Zeitelements dt der eine Körper verliert, der andere gewinnt, so ist, wie die Theorie des Stosses starrer Körper zeigt: $d\alpha' = -k_1 dJ$, wo k_1 eine Grösse ist, die nur von den Massen der stossenden Körper, ihren Hauptträgheitsmomenten und der Lage der Hauptträgheitsaxen zur Stossnormale abhängt*). Andererseits ist dJ gleich dem Zeitelement dt, multiplicirt mit dem während desselben zwischen den Körpern thätigen Druck. Dieser ist aber gleich $k_2 \alpha^{\frac{3}{2}}$, wo k_2 eine aus dem Vorigen zu bestimmende Constante ist, die nur von der Form der Oberflächen und den Elasticitätsverhältnissen in unmittelbarer Nähe des Stosspunktes abhängt. Sonach ist $dJ = k_2 \alpha^{\frac{3}{2}} dt$ und $d\alpha' = -k_1 k_2 \alpha^{\frac{3}{2}} dt$, oder wenn wir integriren, und mit α_0' den Werth von α' unmittelbar vor dem Stosse bezeichnen:

$$\alpha'^2 - \alpha_0'^2 + \tfrac{4}{5} k_1 k_2 \alpha^{\frac{5}{2}} = 0,$$

welche Gleichung nichts anderes ist, als die der Erhaltung der Energie. Für die grösste Annäherung der Körper ist $\alpha' = 0$; setzen wir den entsprechenden Werth von α gleich α_m, so ist $\alpha_m = \left(\frac{5\alpha_0'^2}{4k_1 k_2}\right)^{\frac{2}{5}}$, der zwischen den Körpern gleichzeitig auftretende Maximaldruck ist $p_m = k_2 \alpha_m^{\frac{3}{2}}$; daraus ergeben sich ohne Weiteres die Dimensionen der Stossfläche.

---

*) Siehe *Poisson*, Traité de mécanique, II, Chap. 7. In der dort benutzten Bezeichnungsweise ist die Constante k_1

$$k_1 = \frac{1}{M} + \frac{(b\cos\gamma - c\cos\beta)^2}{A} + \frac{(c\cos\alpha - a\cos\gamma)^2}{B} + \frac{(a\cos\beta - b\cos\alpha)^2}{C}$$
$$+ \frac{1}{M'} + \frac{(b'\cos\gamma' - c'\cos\beta')^2}{A'} + \frac{(c'\cos\alpha' - a'\cos\gamma')^2}{B'} + \frac{(a'\cos\beta' - b'\cos\alpha')^2}{C'}.$$

Um die Abhängigkeit des Vorgangs von der Zeit zu gewinnen, integriren wir nochmals und erhalten

$$t = \int_{\alpha}^{\alpha_m} \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha_0'^2 - \frac{4}{5} k_1 k_2 \alpha^{\frac{5}{2}}}}.$$

Die obere Grenze ist so gewählt, dass $t = 0$ wird für den Augenblick der grössten Annäherung. Für jeden Werth der unteren Grenze α erhält man durch das doppelte Vorzeichen der Wurzel zwei gleiche positive und negative Werthe von t. Es ist sonach α eine gerade, α' eine ungerade Function von t; unmittelbar nach dem Stosse entfernen sich die Stosspunkte in Richtung der Normalen mit derselben relativen Geschwindigkeit, mit welcher sie sich vor dem Stosse einander näherten. Nach derselben transcendenten Function, nach welcher α' von seinem Anfangs- auf seinen Endwerth übergeht, gehen alle übrigen Geschwindigkeitscomponenten von ihren Anfangswerthen auf ihre Endwerthe über.

Die beiden Körper berühren sich zunächst für $\alpha = 0$, sie verlassen sich, wenn α wieder gleich 0 ist; sonach ist die Dauer der Berührung oder die Stosszeit

$$T = 2\int_{0}^{\alpha_m} \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha_0'^2 - \frac{4}{5} k_1 k_2 \alpha^{\frac{5}{2}}}} = 2\eta \sqrt[5]{\frac{25}{16\alpha_0' k_1^2 k_2^2}} = 2\eta \frac{\alpha_m}{\alpha_0'},$$

wenn

$$\eta = \int_{0}^{1} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^{\frac{5}{2}}}} = 1,4716$$

ist. Die Stosszeit kann demnach auf verschiedene Weise unendlich werden, ohne dass diejenige Zeit, mit welcher verglichen sie gross sein soll, gleichfalls unendlich würde. Insbesondere wird die Stosszeit unendlich, wenn die anfängliche relative Geschwindigkeit der stossenden Körper unendlich klein ist; welches also auch im Uebrigen die Verhältnisse eines gegebenen Stosses sind, für hinreichend klein gewählte Geschwindigkeiten werden die gegebenen Entwickelungen jede gewünschte Genauigkeit besitzen. Allemal wird diese Genauigkeit gleich sein derjenigen, welche den sogenannten Gesetzen des Stosses vollkommen elastischer Körper für den gegebenen Fall innewohnt. Für den centralen Stoss zweier Kugeln von gleichem Radius R und gleichem Material von der Dichte q werden die Constanten k_1 und k_2:

$$k_1 = \frac{3}{2R^3\pi q}, \quad k_2 = \frac{8}{3\vartheta}\sqrt{\frac{R}{2}},$$

speciell für den Stoss zweier gleichen Stahlkugeln vom Radius R wird daher, wenn als Einheit der Länge das Millimeter und als Einheit der Kraft das Gewicht eines Kilogramms benutzt wird:

$$\log k_1 = 8{,}78 - 3 \log R,$$
$$\log k_2 = 4{,}03 + \tfrac{1}{2} \log R.$$

Daraus ergiebt sich dann für zwei solcher Kugeln, die mit einer relativen Geschwindigkeit v zusammenstossen:

der Radius der Stossfläche . . . . $a_m = 0{,}0020 R v^{\frac{2}{5}\,\text{mm}}$,

die Stosszeit . . . . $T = 0{,}000024 R v^{-\frac{1}{5}\,\text{sec}}$,

der Gesammtdruck im Augenblick der grössten Annäherung . . . . $p_m = 0{,}00025 R^2 v^{\frac{6}{5}\,\text{kg}}$,

der gleichzeitig im Stossmittelpunkt herrschende Maximaldruck pro Flächeneinheit . . . . $p'_m = 29{,}1 v^{\frac{2}{5}\,\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}}$.

Beträgt beispielsweise der Radius der Kugeln 25^{mm}, die Geschwindigkeit $10^{\frac{\text{mm}}{\text{sec}}}$ so wird $a_m = 0{,}13^{\text{mm}}$, $T = 0{,}00038^{\text{sec}}$, $p_m = 2{,}47^{\text{kg}}$, $p'_m = 73{,}0^{\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}}$. Für zwei Stahlkugeln von der Grösse der Erde, die mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $10^{\frac{\text{mm}}{\text{sec}}}$ zusammenträfen, würde die Dauer der Berührung nahe an 27 Stunden betragen.

Berlin, Januar 1881.

Ueber das Strahlensystem zweiter Ordnung und zweiter Classe.

(Von Herrn *Wilhelm Stahl* in Aachen.)

Die Construction des Strahlensystems zweiter Ordnung zweiter Classe der fünf anderen Systeme, welche mit ihm dieselbe Brennfläche besitzen, lässt sich auf eine einfache elementare Weise ausführen, die aus der Construction des Strahlensystems dritter Ordnung zweiter Classe, welche ich früher angegeben habe *), durch Specialisirung hervorgeht. Die Beziehungen, welche die sechs Strahlensysteme unter einander haben, lassen sich ebenso wie früher erkennen und die meisten Sätze, welche über diese Strahlensysteme durch die Arbeiten der Herren *Kummer*, *Klein*, *Reye*, *Schur*, *Caporali* und anderer bekannt sind **), ohne Mühe ableiten. Es wird hier genügen, die Construction anzudeuten und auf einige dieser Beziehungen hinzuweisen.

§ 1.

Die Construction des Strahlensystems.

In einer Ebene (12) seien zwei reciproke Systeme (1) und (2) von besonderer Beschaffenheit gegeben. Der Strahlenbüschel zweiter Ordnung, der diejenigen Linien enthält, welche durch die ihnen entsprechenden Punkte gehen, möge aus zwei Strahlenbüscheln erster Ordnung bestehen. Ihre Mittelpunkte U_1 und U_2 liegen auf einem nicht zerfallenden Kegelschnitte ϱ, welcher der Ort der Punkte ist, durch welche die ihnen entsprechenden Geraden gehen. Eine solche Beziehung erhält man z. B. in einer Ebene, welche durch die Mittelpunkte zweier reciproken Strahlenbündel gelegt wird.

---

*) Dieses Journal Bd. 91, S. 1.

**) *Kummer*, Fläche vierter Ordnung etc., Monatsberichte d. Berl. Akad. 1864. *Klein*, Math. Annalen II. S. 199—226. *Reye*, dieses Journal Bd. 86, S. 97. *Schur*, Math. Annalen XV S. 440. *Caporali*, Sui Complessi e sulle Congruenze di 2° grado, Atti della R. Accad. dei Lincei 1877—78 S. 749.

Man erkennt dann leicht Folgendes: Zu jeder Geraden l_1, welche nicht durch U_1 geht, gehört der Punkt U_2; zu jedem Punkte L_1 gehört eine Gerade l_2 durch U_2, welche $\overline{L_1 U_1}$ auf dem Kegelschnitte ϱ trifft; zu einer Linie l_1, welche durch U_1 geht, gehören unendlich viele Punkte auf einer durch U_2 gehenden Geraden, welche l_1 auf ϱ schneidet.

Sind nun ausserhalb der Ebene (12) zwei Strahlenbüschel erster Ordnung $(A\alpha)$ und $(B\beta)$ mit einem gemeinsamen Strahle beliebig angenommen, so kann man zu jeder Geraden l_1 einen zugehörenden Strahl $l^{(1)}$ durch L_2 der Art legen, dass $l^{(1)}$ dieselben Strahlen der Büschel $(A\alpha)$ und $(B\beta)$ schneidet wie l_1. Die Gesammtheit der Strahlen $l^{(1)}$ bildet erstens einen Strahlenbündel mit dem Mittelpunkte U_2, und zwar ist derselbe reciprok auf das ebene System (1) bezogen. Zwei Linien l_1 und $l^{(1)}$ sind entsprechende Geraden in einem Nullsysteme, in welchem zu der Ebene (12) der Punkt U_2 gehört und die Büschel $(A\alpha)$ und $(B\beta)$ einander entsprechen.

Zweitens erhält man ein ***Strahlensystem zweiter Ordnung zweiter Classe*** Σ_1 in den Strahlen $l^{(1)}$, welche den durch U_1 gehenden Linien von (12) zugehören. Der Büschel U_1 bestimmt eine projectivische Beziehung zwischen den Büscheln $(A\alpha)$ und $(B\beta)$ der Art, dass sie ihren gemeinsamen Strahl entsprechend gemein haben. Ein Strahl von Σ_1 schneidet stets entsprechende Strahlen dieser Büschel, wesshalb Σ_1 einem Nullsysteme S_1 angehört, in welchem der Ebene (12) der Punkt U_1 zugeordnet ist. Zu einem Strahle durch U_1 in (12) gehören unendlich viele Strahlen von Σ_1, welche eine Regelfläche zweiter Ordnung bilden, die von (12) in einem Punkte der Curve ϱ berührt wird.

Alle in einer beliebigen Geraden von (12) eintreffenden Strahlen von Σ_1 bilden eine Regelfläche dritter Ordnung, deren einfache Leitlinie diese Gerade ist, deren Doppellinie aber der im Nullsysteme S_1 zu der Geraden gehörende Strahl durch U_1 ist.

§ 2.

Die singulären Punkte und Ebenen von Σ_1.

Die Ebene α möge den Kegelschnitt ϱ in den Punkten O und P treffen, β in M und N. Es lässt sich nun wie früher beweisen, dass die Strahlen von Σ_1, welche die Verbindungsgeraden dieser vier Punkte schneiden, sechs Strahlenbüschel erster Ordnung bilden. Die vier Punkte M,

N, O, P sind Mittelpunkte solcher Strahlenbüschel von Σ_1, deren Ebenen durch U_1 gehen und die Punkte *A* resp. *B* enthalten. Die Strahlen von Σ_1, welche in $\overline{MU_2}$ eintreffen, bilden einen Büschel erster Ordnung, dessen Mittelpunkt man, wie folgt, erhält. Der Geraden $\overline{MU_2}$ entspricht im Nullsysteme S_1 eine durch U_1 gehende Linie, welche wir zum Schnitt mit der Ebene (MU_2B) bringen, und so erhalten wir den Mittelpunkt des betreffenden Büschels. Analoge Büschel liefern die Geraden $\overline{U_2N}$, $\overline{U_2O}$, $\overline{U_2P}$. U_2 ist Mittelpunkt eines Büschels von Σ_1 in derjenigen Ebene, welcher U_2 im Nullsystem S_1 entspricht, und endlich ist U_1 Mittelpunkt eines Büschels in der Ebene (12).

Wir finden somit sechszehn singuläre Punkte und sechszehn singuläre Ebenen mit Strahlenbüscheln erster Ordnung von Σ_1. Jeder Ebene ist hierdurch der Punkt zugewiesen, der ihr in S_1 entspricht. Jede Ebene enthält sechs Punkte, die auf einem Kegelschnitte liegen; durch jeden Punkt gehen sechs Ebenen, die eine Kegelfläche zweiter Ordnung berühren, wie sich dies leicht aus der hier bestimmten Anordnung ergiebt.

Die Uebersicht über die singulären Punkte und Ebenen wird am besten durch die Bezeichnungen des Herrn *Weber* *) gegeben, auf welche auch Herr *Reye* **) gekommen ist, und die man durch Analogie aus den im Strahlensystem dritter Ordnung und zweiter Classe gefundenen erhalten würde. Den Punkt U_1 bezeichnen wir mit (2); U_2 mit (1); die Ebene, welche zu U_2 gehört, mit (0) und die übrigen singulären Ebenen durch Combinationen der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6 zu je zweien. Die sechs Punkte von (0) bezeichnen wir mit (1), (2), (3), (4), (5), (6) und die übrigen singulären Punkte mit Combinationen der Ziffern 1 bis 6 zu je dreien und zwar so, dass zwei Combinationen, die kein gemeinsames Element besitzen, denselben Punkt bestimmen.

Die Punkte *M, N, O, P* seien bezeichnet mit

(123), (124), (125), (126)

oder

(456), (356), (346), (345).

Die Bezeichnungen der ausserhalb (12) liegenden Punkte und der dazu gehörenden Ebenen lassen sich dann so festsetzen, dass man die von Herrn *Reye* mitgetheilte Tabelle erhält. Die nähere Ausführung der Anordnung der Singularitäten findet sich ebenfalls in der *Reye*schen Arbeit.

---

*) Dieses Journal, Bd. 84, S. 343.

**) a. a. O. S. 103.

§ 3.

Die Strahlensysteme: Σ_2, Σ_3, Σ_4, Σ_5, Σ_6.

Die Strahlen von Σ_1, welche in einer durch U_2 und in (12) gelegten Geraden eintreffen, bilden eine Regelschaar $G_{(12)}$ zweiter Ordnung. Die Leitstrahlen dieser Regelflächen ergeben ein Strahlensystem Σ_2 zweiter Ordnung und Classe, welches dieselbe Brennfläche wie Σ_1 besitzt. Die Strahlen von Σ_1, welche durch die Punkte einer durch M, N, O, P gelegten Curve zweiter Ordnung gehen, bilden eine Regelschaar $G'_{(12)}$ zweiten Grades, deren Leitgeraden zu Σ_2 gehören. Die Leitgeraden einer $G'_{(12)}$ können bei der in § 1 angegebenen Construction die Büschel $(A\alpha)$ und $(B\beta)$ ersetzen*). Das Strahlensystem hat dieselben singulären Punkte und Ebenen wie Σ_1, nur sind dieselben in anderer Weise (wie aus der oben angeführten Tabelle ersichtlich ist) einander zugeordnet.

Die Strahlen von Σ_1, welche in einer durch M, N, O oder P gehenden Geraden in (12) eintreffen, bilden Regelschaaren $G'_{(1\mu)}$ $(\mu = 3, 4, 5, 6)$, deren Leitschaaren vier weitere Strahlensysteme Σ_3, Σ_4, Σ_5, Σ_6 zweiter Ordnung und Classe bestimmen. Die Strahlensysteme Σ_1 und Σ_3 lassen sich auf eine zweite Art in Regelflächen $G_{(13)}$ zusammenfassen, welche die Ebene (12) in Kegelschnitten treffen, welche durch die Punkte (1), (124), (125), (126) gehen. Die Construction von Σ_1 lässt sich nach § 1 auch ausführen, wenn an Stelle von $(A\alpha)$ und $(B\beta)$ die zu Σ_3 gehörende Schaar einer Fläche $G_{(13)}$ gesetzt und gleichzeitig der Punkt (1) mit (123) vertauscht wird.

Irgend zwei der sechs Strahlensysteme Σ_μ und Σ_ν lassen sich auf zwei verschiedene Arten zu Systemen von Regelflächen $G_{(\mu\nu)}$ und $G'_{(\mu\nu)}$ zusammenfassen**). Acht der singulären Ebenen und acht der singulären Punkte gehören $G_{(\mu\nu)}$ an, die übrigen singulären Elemente der Fläche $G'_{(\mu\nu)}$. Jedes System von Regelflächen enthält vier Ebenenpaare und vier Punktepaare z. B.:

Die Ebenen (0)(12), (34)(56), (35)(46), (36)(45) berühren die Flächen $G_{(12)}$ und sind die Ebenenpaare des Systems $G'_{(12)}$.

Die Punkte (1)(2), (134)(234), (135)(235), (145)(245) liegen auf den Flächen $G_{(12)}$ und sind die Punktepaare des Systems $G'_{(12)}$.

Die Ebenen (13)(23), (14)(24), (15)(25), (16)(26) berühren die Flächen $G'_{(12)}$ und sind die Ebenenpaare von $G_{(12)}$.

---

*) Vergl. dieses Journal Bd. 91, S. 11.

**) Vergl. *Schur* a. a. O. S. 441 und *Caporali* a. a. O.

Die Punkte (3)(123), (4)(124), (5)(125), (6)(126) liegen auf $G'_{(12)}$ und sind die Punktepaare von $G_{(12)}$.

Jedes der sechs Strahlensysteme lässt sich auf zehn verschiedene Arten durch Regelschaaren beschreiben.

Σ_μ kann auf dieselbe Weise construirt werden, wie das Strahlensystem Σ_1 nach § 1, und zwar kann an Stelle der Ebene (12) jede andere singuläre Ebene treten, an Stelle der Büschel $(A\alpha)$ und $(B\beta)$ die zu Σ_ν gehörende Regelschaar einer $G_{(\mu\nu)}$ oder $G'_{(\mu\nu)}$, welche die singuläre Ebene nicht berührt. Die Punkte U_1 und U_2 müssen dann durch die Mittelpunkte der Strahlenbüschel ersetzt werden, welche Σ_μ und Σ_ν in der gewählten singulären Ebene angehören.

Jedes Strahlensystem Σ_μ gehört einem besonderen Nullsysteme S_μ an.

Herr *Caporali* hat gezeigt, dass durch jedes Strahlensystem zweiten Grades 40 *Reye*sche *Complexe* gehen *). Diese lassen sich mit Hülfe unserer Construction leicht nachweisen.

Die Strahlen von Σ_1 treffen die Ebenen (12) und (56) in Punkten, welche von (1) resp. (134) durch projectivische Strahlenbüschel, die zu Σ_2 gehören, projicirt werden, und liegen desshalb in einem *Reye*schen Complex, dessen Tetraeder die Ecken: (1), (134), (123), (124) hat.

Andere solcher Complexe finden wir mit den Tetraedern:

(1), (156), (125), (126),
(1), (135), (123), (125),
(1), (136), (123), (126),
(1), (145), (124), (125),
(1), (156), (125), (126).

Die vier anderen Strahlensysteme geben desgleichen Veranlassung zu *Reye*schen Complexen, in denen Σ_1 liegt. Die Zahl derselben, deren Tetraeder die Ebene (12) enthält, ist gleich 10. Die Zahl aller Complexe, die durch Σ_1 gehen, ist desshalb 40.

§ 4.

Die Brennfläche der Strahlensysteme.

Da je zwei der Systeme Σ_μ zu Regelflächen zusammengefasst werden können, so umhüllen alle Systeme *eine* Brennfläche, deren Doppeltangenten

*) *Caporali* a. a. O.

die Strahlen der Systeme sind. Die singulären Punkte der Strahlensysteme sind Knotenpunkte der Fläche und die singulären Ebenen berühren dieselbe längs Kegelschnitten.

Eine Fläche $G_{(\mu\nu)}$ und eine $G'_{(\mu\nu)}$ schneiden sich in einem windschiefen Vierecke, in welchem die gegenüberstehenden Seiten demselben Strahlensysteme angehören.

Die Strahlen von Σ_μ auf $G_{(\mu\nu)}$ werden durch die Schnitte mit allen $G'_{(\mu\nu)}$ involutorisch gepaart. Durch die Flächen $G'_{(\mu\nu)}$ sind für die Leitschaar und Regelschaar einer $G_{(\mu\nu)}$ Involutionen bestimmt, durch deren projectivische Beziehung vermittelst der $G'_{(\mu\nu)}$ eine Raumcurve vierter Ordnung sich ergiebt, längs welcher die Brennfläche von $G_{(\mu\nu)}$ berührt wird.

Betrachtet man zwei Strahlen von Σ_μ, die auf einer $G_{(\mu\nu)}$ und $G'_{(\mu\nu)}$ liegen, so sind dieselben einander zugeordnet in Bezug auf das Nullsystem S_ν. Bei der Abbildung durch ein Nullsystem S_ν geht jedes Strahlensystem und die Brennfläche in sich selbst über.

Sucht man die Ordnungselemente der auf $G_{(\mu\nu)}$ von Strahlen des Systemes Σ_μ gebildeten Involution auf, so gehören diese den beiden Nullsystemen S_μ und S_ν an und bilden desshalb in ihrer Gesammtheit eine geradlinige Fläche vierter Ordnung mit zwei Doppelgeraden. Ein solches Ordnungselement auf $G_{(\mu\nu)}$ trifft die beiden mit ihm ein windschiefes Viereck bildenden Strahlen von Σ_ν in Punkten, in welchen letztere eine vierpunktige Berührung mit der Brennfläche eingehen. Der Ort der Punkte, in welchen Strahlen von Σ_ν die Brennfläche vierpunktig berühren, ist daher eine Raumcurve achter Ordnung, welche durch die 16 Knotenpunkte der Fläche geht und in ihnen diejenigen singulären Ebenen zu Schmiegungsebenen besitzt, welche den Punkten in dem Nullsysteme S_ν entsprechen*).

Die Curve achter Ordnung ist eine Ordnungscurve für das Nullsystem S_ν; die Tangenten derselben gehören zu Σ_ν und bilden eine abwickelbare Fläche achter Ordnung. Durch die Curve, welche eine ausgezeichnete Haupttangentencurve der Brennfläche ist, gehen fünf Regelflächen vierter Ordnung, welche von Strahlen der anderen Systeme gebildet werden.

---

*) Vergl. *Salmon-Fiedler,* Geometrie des Raumes II, 3. Aufl. S. 493.

§ 5.

Ebene Schnittcurve der Brennfläche.

Alle Strahlen eines Systems Σ_μ, welche in einer Geraden einer singulären Ebene eintreffen, bilden eine Regelfläche dritter Ordnung, deren Doppelgerade durch den der Ebene in S_μ entsprechenden singulären Punkt geht. Wir betrachten zwei solche Regelflächen; die eine F_1 sei gebildet aus Strahlen von Σ_1 mit einer in (12) beliebig gelegenen Leitgeraden, die andere F_2 sei gebildet aus Strahlen von Σ_2 mit einer in (0) beliebig gelegenen Leitlinie. Die Doppelgeraden der beiden Regelflächen gehen durch den Punkt (2). Wir werden zeigen, dass die beiden Flächen einen Kegelschnitt gemein haben.

Die Flächen F_1 und F_2 bringen wir zum Schnitt mit dem System der $G_{(12)}$, welche sämmtlich durch (2) gehen und deren Tangentialebenen in diesem Punkte, zu denen auch (12) und (0) gehören, eine Kegelfläche zweiter Ordnung berühren. Jede Tangentialebene des Kegels bestimmt eine $G_{(12)}$, welche die Schnittgeraden dieser Ebene mit (12) und (0) enthält. Eine Fläche $G_{(12)}$ trifft daher F_1 und F_2 in Erzeugenden, welche verschiedenen Schaaren von $G_{(12)}$ angehören, und deren gemeinsamer Punkt auf F_1 und F_2 liegt. Die Erzeugenden von F_1 und F_2 werden durch das System der $G_{(12)}$ projectivisch auf einander bezogen. Wir projiciren die Geraden von F_1 und F_2 aus den diesen angehörenden Doppelgeraden und erhalten so zwei projectivische Ebenenbüschel, welche eine Kegelfläche zweiter Ordnung mit der Spitze (2) erzeugen. Diese Kegelfläche trifft F_1 und F_2 in einem diesen Flächen gemeinsamen Kegelschnitt.

Die doppelt unendlich vielen Kegelschnitte der Fläche F_1 werden durch die doppelt unendlich vielen Flächen F_2 ausgeschnitten. Durch einen solchen Kegelschnitt gehen sechs Flächen dritter Ordnung, die von den sechs Strahlensystemen gebildet werden, deren Doppelgeraden sämmtlich durch* (2) *gehen und deren einfache Leitgeraden in den sechs durch* (2) *gehenden singulären Ebenen sich befinden.

Dieser Satz folgt auch unmittelbar aus der ***Reye***schen Herleitung.

Eine beliebige Ebene π schneidet die Brennfläche in einer Curve vierter Ordnung C_4. Die 28 Doppeltangenten derselben sind die 16 Geraden in den singulären Ebenen und die 12 Strahlen der sechs Systeme Σ_μ. Es lassen sich nun leicht 62 Gruppen von einfach unendlich vielen C_4 viermal berührenden Kegelschnitten angeben. — Die 63ste Gruppe wird durch die

Complexcurven derjenigen Complexe zweiten Grades gebildet, welche die Brennfläche zu ihrer Singularitätenfläche haben. Dreissig Gruppen, die einander paarweise zugeordnet sind, erhält man in den Schnitten der Ebene π mit den Flächen $G_{(\mu\nu)}$ und $G'_{(\mu\nu)}$.

Jeder Strahl von Σ_1 in π liegt in einer einfach unendlichen Schaar von Flächen F_1, deren Leitlinien in *einer* der singulären Ebenen sich befinden. Jede solche F_1 wird von π in einem solchen Kegelschnitte getroffen. Es entstehen so 32 einander paarweise zugeordneter Gruppen von Kegelschnitten. Die anderen Strahlensysteme liefern nach dem oben bewiesenen Satze keine neuen Gruppen. Jede der 30 ersten Gruppen von Kegelschnitten enthält sechs Linienpaare, von welchen zwei Paare aus Geraden zweier Strahlensysteme bestehen der Art, dass Strahlen verschiedener Systeme ein Paar bilden; die übrigen Geraden der Paare liegen in den singulären Ebenen. Die Flächen F_1, deren Leitgeraden in (12) einen Strahlenbüschel bilden, zerfallen fünfmal in eine Regelfläche zweiter Ordnung und eine durch (2) gehende singuläre Ebene; *eine* Fläche F_1 wird von π geschnitten in ihrer Leitgeraden und dem zweiten in π liegenden Strahle von Σ_1. Hieraus ergiebt sich der von Herrn *Geiser* bewiesene Satz*):

Greift man eine von den 63 Gruppen vierfach berührender Kegelschnitte einer C_4 heraus, so zerfallen die 62 übrigen in zwei wesentlich verschiedene Systeme; das eine besteht aus 32 Gruppen, von denen jede mit der fixirten Gruppe sechs Doppeltangenten gemein hat; das andere besteht aus 30 Gruppen, von denen jede mit der fixirten Gruppe vier Doppeltangenten gemein hat.

Die Eigenschaften der Flächensysteme F_μ und $G_{(\mu\nu)}$ geben Veranlassung zum Beweise vieler Sätze, welche sich auf die Berührungscurven einer C_4 beziehen, worauf wir aber hier nicht näher eingehen wollen.

§ 6.

Schlussbemerkung.

Der Zusammenhang, welchen die in § 1 gegebene Construction von Σ_μ mit der *Reye*schen Herleitung hat, lässt sich nicht so unmittelbar übersehen, wie bei der Construction des Strahlensystems dritter Ordnung und zweiter Classe.

Den Flächen $G_{(12)}$ werden in dem Flächengebüsch des Herrn *Reye*

*) Dieses Journal, Bd. 72, S. 370 etc.

die durch die Punkte 1 und 2 gehenden Ebenen entsprechen: den Flächen $G_{(12)}$ aber je zwei Kegelflächen mit den Mittelpunkten 1 und 2 und den Strahlen $\overline{13}$. $\overline{14}$. $\overline{15}$. $\overline{16}$ resp. $\overline{23}$. $\overline{24}$. $\overline{25}$. $\overline{26}$. was sich mit Hülfe der dort erörterten Abbildung leicht zeigen lässt. Die zusammengehörenden Kegel 1 und 2 bilden entsprechende Elemente zweier projectivischen Kegelbüschel, in welchen die Ebenenpaare einander entsprechen, und deren Schnitt die Kernfläche des Gebüsches ist. Es lässt sich desshalb die Curve sechster Ordnung, welche die Kerncurve eines durch sieben Punkte bestimmten Flächennetzes ist, durch die Schnitte dreier projectivischen Kegelbüschel construiren.

Aachen, im April 1881.

Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen.

(Von den Herren *R. Dedekind* in Braunschweig und *H. Weber* in Königsberg.)

Einleitung.

Die im Nachstehenden mitgetheilten Untersuchungen verfolgen den Zweck, die Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen, welche eines der Hauptergebnisse der *Riemann*schen Schöpfung ist, von einem einfachen und zugleich strengen und völlig allgemeinen Gesichtspunkt aus zu begründen. Bei den bisherigen Untersuchungen über diesen Gegenstand werden in der Regel gewisse beschränkende Voraussetzungen über die Singularitäten der betrachteten Functionen gemacht, und die sogenannten Ausnahmefälle entweder als Grenzfälle beiläufig erwähnt oder auch ganz bei Seite gesetzt. Ebenso werden gewisse Grundsätze über die Stetigkeit und Entwickelbarkeit zugelassen, deren Evidenz sich auf geometrische Anschauung verschiedener Art stützt. Eine sichere Basis für die Grundvorstellungen sowie für eine allgemeine und ausnahmslose Behandlung der Theorie lässt sich gewinnen, wenn man von einer Verallgemeinerung der Theorie der rationalen Functionen einer Veränderlichen, ins Besondere des Satzes, dass jede ganze rationale Function einer Veränderlichen sich in lineare Factoren zerlegen lässt, ausgeht. Diese Verallgemeinerung ist einfach und bekannt in dem ersten Falle, in welchem die von *Riemann* mit p bezeichnete Zahl (das Geschlecht nach *Clebsch*) den Werth Null hat. Für den allgemeinen Fall, welcher sich zu dem eben genannten ähnlich verhält, wie der Fall der allgemeinsten algebraischen Zahlen zu demjenigen der rationalen Zahlen, wiesen die mit bestem Erfolge in der Zahlentheorie angewandten Methoden, die sich an *Kummers* Schöpfung der idealen Zahlen anschliessen, und der

Uebertragung auf die Theorie der Functionen fähig sind, auf den richtigen Weg*).

Versteht man, analog der Zahlentheorie, unter einem ***Körper algebraischer Functionen*** ein System solcher Functionen von der Beschaffenheit, dass die Anwendung der vier Species auf Functionen des Systems immer zu Functionen desselben Systems führt, so deckt sich dieser Begriff vollständig mit dem der *Riemann*schen Classe algebraischer Functionen. Unter den Functionen eines solchen Körpers kann eine beliebige als unabhängige Veränderliche und die übrigen als von ihr abhängig betrachtet werden. Für jede dieser „Darstellungsweisen" ergiebt sich ein System von Functionen des Körpers, die als ***ganze Functionen*** zu bezeichnen sind, deren Quotienten den ganzen Körper erschöpfen. Unter diesen ganzen Functionen lassen sich nun wieder Gruppen von Functionen aussondern, welchen die charakteristischen Merkmale solcher ganzen rationalen Functionen zukommen, die einen gemeinschaftlichen Theiler haben. Ein solcher Theiler existirt zwar im allgemeinen Falle nicht, wenn man aber die bezüglichen Sätze über rationale Functionen nicht an den Theiler selbst, sondern an das System der durch denselben theilbaren Functionen knüpft, so gestatten sie eine vollkommene Uebertragung auf die allgemeinen algebraischen Functionen. Auf diese Weise gelangt man zu dem Begriff des ***Ideals***, ein Name, der aus *Kummers* zahlentheoretischen Arbeiten stammt, wo die nicht existirenden Theiler als „ideale Theiler" in die Rechnung eingeführt werden.

Obwohl es sich in der vorliegenden Arbeit keineswegs um „ideale" Functionen handelt, sondern alle Operationen nur an Systemen wirklich existirender Functionen ausgeführt werden, schien es doch zweckmässig, den Namen „Ideal", der in der Zahlentheorie bereits gebräuchlich ist, beizubehalten.

Mit diesen Idealen lässt sich nach gehöriger Erklärung der Multiplication ganz nach denselben Regeln rechnen, wie mit rationalen Functionen.

---

*) Die idealen Zahlen sind von *Kummer* zuerst eingeführt durch die Abhandlung: *Zur Theorie der complexen Zahlen* (*Crelles* Journal, Bd. 35); eine weitere Fortführung und eine allgemeine Darstellung der Theorie der algebraischen Zahlen findet man in der zweiten und dritten Auflage von *Dirichlets* Vorlesungen über Zahlentheorie, sowie in der Abhandlung von *Dedekind: Sur la théorie des nombres entiers algébriques* (Paris 1877. Abdruck aus dem Bulletin des Sciences math. et astron. von *Darboux* und *Hoüel*). Die Kenntniss dieser Schriften wird aber in unserer Arbeit nirgends vorausgesetzt.

Aus mündlichen Mittheilungen ist uns jetzt bekannt geworden, dass bereits vor Jahren *Kronecker* mit Beziehung auf die Arbeiten von *Weierstrass* Untersuchungen angestellt hat, die auf derselben Grundlage, wie die unsrigen, beruhen.

Ins Besondere ergiebt sich der Satz, dass jedes Ideal auf eine einzige Weise in Factoren zerlegbar ist, welche selbst nicht weiter zerlegt werden können und daher ***Primideale*** genannt werden. Diese Primideale entsprechen den linearen Factoren in der Theorie der ganzen rationalen Functionen. Auf Grund derselben gelangt man zu einer völlig präcisen und allgemeinen Definition des „Punktes der *Riemann*schen Fläche", d. h. eines vollkommen bestimmten Systems von Zahlwerthen, welche man den Functionen des Körpers widerspruchslos beilegen kann.

Eine darauf gegründete formale Definition des Differentialquotienten führt sodann zu der Geschlechtszahl und zu einer ganz allgemeinen, eleganten Darstellung der Differentiale erster Gattung. Hieran schliesst sich der Beweis des *Riemann-Roch*schen Satzes über die Anzahl der willkürlichen Constanten in einer durch ihre Unendlichkeitspunkte bestimmten Function, und die Theorie der Differentiale zweiter und dritter Gattung. Bis zu diesem Punkte kommt die Stetigkeit und Entwickelbarkeit der untersuchten Functionen in keiner Weise in Betracht. Es würde z. B. nirgends eine Lücke bleiben, wenn man das Gebiet der benutzten Zahlen auf das System der algebraischen Zahlen beschränken wollte. Dadurch wird ein wohl abgegrenzter und ziemlich umfassender Theil der Theorie der algebraischen Functionen lediglich durch die seiner eigenen Sphäre angehörigen Mittel behandelt.

Freilich ergeben sich alle diese Resultate durch einen weit geringeren Aufwand von Mitteln und als Specialfälle einer vielumfassenden Allgemeinheit aus *Riemanns* Theorie; allein es ist bekannt, dass diese Theorie bezüglich einer strengen Begründung noch gewisse Schwierigkeiten bietet, und bis es gelungen ist, diese Schwierigkeiten vollständig zu überwinden, dürfte der von uns betretene Weg oder wenigstens ein verwandter, wohl der einzige sein, der für die Theorie der algebraischen Functionen mit befriedigender Strenge und Allgemeinheit zum Ziele führt. So würde sich die Theorie der Ideale selbst ausserordentlich vereinfachen, wenn man den Begriff der *Riemann*schen Fläche und ins Besondere den eines Punktes derselben sammt den auf die Stetigkeit der algebraischen Functionen gegründeten Anschauungen voraussetzen wollte. In unserer Arbeit ist umgekehrt auf einem langen Umwege die Theorie der Ideale algebraisch begründet und aus dieser eine vollkommen präcise und strenge Definition des „Punktes der *Riemann*schen Fläche" gewonnen, welche auch als Basis für die Untersuchung der Stetigkeit und der damit zusammenhängenden Fragen dienen kann. Diese Fragen,

wozu auch die auf die *Abel*schen Integrale und die Periodicitätsmoduln bezüglichen gehören, bleiben von unserer Untersuchung einstweilen ausgeschlossen. Wir hoffen bei einer anderen Gelegenheit darauf zurückzukommen.

Königsberg, den 22. October 1880.

I. Abtheilung.

§ 1.

Körper algebraischer Functionen.

Eine Variable θ heisst eine ***algebraische Function*** einer unabhängigen Veränderlichen z, wenn dieselbe einer irreductibeln algebraischen Gleichung

$$(1.) \qquad F(\theta, z) = 0$$

genügt. F bedeutet hierin einen Ausdruck von der Form

$$F(\theta, z) = a_0\theta^n + a_1\theta^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\theta + a_n,$$

worin die Coefficienten $a_0, a_1, \ldots a_n$ ganze rationale Functionen von z ohne gemeinschaftlichen Theiler sind. Die vorausgesetzte Irreductibilität der Gleichung (1.) involvirt, dass θ nicht einer Gleichung niedrigeren Grades in Bezug auf θ genügt, und, wie sich aus dem Algorithmus des grössten gemeinschaftlichen Theilers ergiebt, wenn

$$G(\theta, z) = b_0\theta^m + b_1\theta^{m-1} + \cdots + b_{m-1}\theta + b_m = 0$$

eine zweite Gleichung ist, welcher θ genügt, dass $G(\theta, z)$ durch $F(\theta, z)$ algebraisch theilbar sein muss. Es lässt sich nun nachweisen, dass $G(\theta, z)$ auch in Bezug auf z nicht von niedrigerem Grade sein kann als $F(\theta, z)$ und nur dann vom selben Grade, wenn sich aus $G(\theta, z)$ ein von z unabhängiger Factor absondern lässt. Nehmen wir an, die Coefficienten $b_0, b_1, \ldots b_m$ seien von gemeinschaftlichen Factoren befreit, und bezeichnen wir mit

$$H(\theta, z) = c_0\theta^{m-n} + c_1\theta^{m-n-1} + \cdots + c_{m-n}$$

den vom Nenner befreiten Quotienten von G durch F, so ist

$$kG(\theta, z) = F(\theta, z).H(\theta, z),$$

worin k eine ganze rationale Function von z ist, und die Vergleichung der Coefficienten ergiebt

$$\begin{aligned} kb_0 &= a_0c_0, \\ kb_1 &= a_0c_1 + a_1c_0, \\ kb_2 &= a_0c_2 + a_1c_1 + a_2c_0, \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

worin die $c_0, c_1, \ldots c_{m-n}$ gleichfalls ohne gemeinschaftlichen Theiler vorausgesetzt werden können.

Hieraus folgt zunächst, dass k constant sein muss, und $=1$ gesetzt werden kann; denn ist durch irgend einen Linearfactor von $k\, a_0, a_1, \ldots a_{r-1}, c_0, c_1, \ldots c_{s-1}$ theilbar, a_r, c_s nicht theilbar, so folgt aus

$$k b_{r+s} = \cdots a_{r-1} c_{s+1} + a_r c_s + a_{r+1} c_{s-1} + \cdots$$

der Widerspruch, dass $a_r c_s$ durch denselben Linearfactor theilbar sein müsste. Hieraus aber folgt weiter, dass der Grad von $G(\theta, z)$ in Bezug auf z gleich ist der Summe der Grade von F und H in Bezug auf z; denn sind a_r, c_s die ersten unter den Coefficienten a, c, deren Grad den Maximalwerth erreicht, so folgt wieder aus

$$b_{r+s} = \cdots a_{r-1} c_{s+1} + a_r c_s + a_{r+1} c_{s-1} + \cdots,$$

dass der Grad von b_{r+s} gleich der Summe der Grade von a_r und c_s ist.

Dividirt man die Gleichung (1.) durch a_0, so kann dieselbe auch in die Form gesetzt werden

$$(2.) \qquad f(\theta, z) = \theta^n + b_1 \theta^{n-1} + \cdots + b_{n-1}\theta + b_n = 0,$$

worin die Coefficienten $b_1, b_2, \ldots b_n$ auch gebrochene rationale Functionen von z sein können.

Das System aller rationalen Functionen von θ und z, $\Phi(\theta, z)$, hat die Eigenschaft, dass seine Individuen sich durch die elementaren Rechenoperationen, Addition, Subtraction, Multiplication und Division reproduciren, und dies System wird daher als ein *Körper algebraischer Functionen Ω vom Grade n* bezeichnet. Ist zunächst $\varphi(\theta)$ eine *ganze* rationale Function von θ, deren Coefficienten rational von z abhängen, so kann man durch algebraische Division zwei eben solche Functionen $q(\theta)$, $r(\theta)$ bestimmen, von denen die zweite den Grad $n-1$ nicht übersteigt, so dass

$$\varphi(\theta) = q(\theta) f(\theta) + r(\theta)$$

oder wegen (2.)

$$\varphi(\theta) = r(\theta).$$

Ist $\varphi(\theta)$ durch $f(\theta)$ nicht theilbar, so haben diese beiden Functionen (wegen der vorausgesetzten Irreductibilität von $f(\theta)$) keinen Theiler gemein, und daher lassen sich durch die Methode des grössten gemeinschaftlichen Theilers zwei Functionen $f_1(\theta)$, $\varphi_1(\theta)$ so bestimmen, dass

$$f(\theta) f_1(\theta) + \varphi(\theta) \varphi_1(\theta) = 1,$$

also wegen (2.)

$$\varphi_1(\theta) = \frac{1}{\varphi(\theta)}.$$

Aus diesen beiden Bemerkungen, zusammengenommen mit der Voraussetzung der Irreductibilität von $f(\theta)$ ergiebt sich der folgende

Lehrsatz. *Jede Function ζ des Körpers Ω lässt sich auf eine einzige Weise in die Form setzen:*

$$\zeta = x_0 + x_1\theta + \cdots + x_{n-1}\theta^{n-1},$$

worin die Coefficienten $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$ rationale Functionen von z sind. Umgekehrt gehört jede Function dieser Form selbstverständlich dem Körper Ω an.

Wählt man unter den Functionen des Körpers Ω n beliebige aus:

$$\eta_1 = x_0^{(1)} + x_1^{(1)}\theta + \cdots + x_{n-1}^{(1)}\theta^{n-1},$$
$$\eta_2 = x_0^{(2)} + x_1^{(2)}\theta + \cdots + x_{n-1}^{(2)}\theta^{n-1},$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\eta_n = x_0^{(n)} + x_1^{(n)}\theta + \cdots + x_{n-1}^{(n)}\theta^{n-1},$$

jedoch so, dass die Determinante

$$\Sigma \pm x_0^{(1)} x_1^{(2)} \ldots x_{n-1}^{(n)}$$

nicht identisch Null ist, so ergiebt sich, dass jede Function des Körpers Ω auch in der Form dargestellt werden kann

$$\zeta = y_1\eta_1 + y_2\eta_2 + \cdots + y_n\eta_n,$$

deren Coefficienten $y_1, y_2, \ldots y_n$ rationale Functionen von z sind. Ein solches System von Functionen $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ soll eine *Basis des Körpers Ω* heissen.

Damit ein Functionensystem $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ des Körpers Ω eine Basis desselben bilde, ist erforderlich und hinreichend, dass zwischen ihnen keine Gleichung (Identität) von der Form

$$y_1\eta_1 + y_2\eta_2 + \cdots + y_n\eta_n = 0$$

bestehe, in welcher die Coefficienten $y_1, y_2, \ldots y_n$ nicht sämmtlich verschwinden. Beispielsweise bilden die Functionen $1, \theta, \theta^2, \ldots \theta^{n-1}$ eine Basis von Ω.

§ 2.

Normen, Spuren und Discriminanten.

Wählt man zur Darstellung der Functionen von Ω eine beliebige Basis $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$, so kann man, wenn ζ irgend eine Function in Ω be-

deutet, setzen:

$$(1.)\quad \begin{cases} \zeta\eta_1 = y_{1,1}\eta_1+y_{1,2}\eta_2+\cdots+y_{1,n}\eta_n, \\ \zeta\eta_2 = y_{2,1}\eta_1+y_{2,2}\eta_2+\cdots+y_{2,n}\eta_n, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \zeta\eta_n = y_{n,1}\eta_1+y_{n,2}\eta_2+\cdots+y_{n,n}\eta_n, \end{cases}$$

worin die Coefficienten $y_{\iota,\iota'}$ rationale Functionen von z sind. Hieraus ergiebt sich die Gleichung

$$(2.)\quad \begin{vmatrix} y_{1,1}-\zeta, & y_{1,2}, & \dots & y_{1,n} \\ y_{2,1}, & y_{2,2}-\zeta, & \dots & y_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n,1}, & y_{n,2}, & \dots & y_{n,n}-\zeta \end{vmatrix} = 0,$$

welche, nach Potenzen von ζ geordnet, die Gestalt hat

$$(3.)\quad \varphi(\zeta) = \zeta^n+b_1\zeta^{n-1}+\cdots+b_{n-1}\zeta+b_n = 0$$

und, wie sich aus dem Multiplicationssatz der Determinanten ohne Schwierigkeit ergiebt, von der Wahl der zu Grunde gelegten Basis $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n$ ganz unabhängig ist. Von den Coefficienten $b_1, b_2, \dots b_n$ der Function φ, welche sämmtlich rationale Functionen von z und durch die Function ζ vollkommen bestimmt sind, sollen zwei, die in der Folge von Wichtigkeit sind, durch besondere Namen ausgezeichnet werden. Die Function

$$(4.)\quad (-1)^n b_n = \begin{vmatrix} y_{1,1}, & y_{1,2}, & \dots & y_{1,n} \\ y_{2,1}, & y_{2,2}, & \dots & y_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n,1}, & y_{n,2}, & \dots & y_{n,n} \end{vmatrix}$$

heisst die *Norm* der Function ζ, und wird mit $N(\zeta)$ bezeichnet. Von dieser Function gelten folgende Sätze.

1. Die einzige Function, deren Norm identisch verschwindet, ist die Function „Null"; denn macht man in dem System (1.) die Annahme, dass $N(\zeta) = 0$ sei, so folgt, dass sich ein System rationaler Functionen von z, die nicht sämmtlich verschwinden, $y_1, y_2, \dots y_n$ so bestimmen lässt, dass

$$\zeta(y_1\eta_1+y_2\eta_2+\cdots+y_n\eta_n) = 0,$$

also, da $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n$ eine Basis von Ω bilden, $\zeta = 0$.

2. Die Norm einer rationalen Function von z ist die n^{te} Potenz dieser Function. Denn ist ζ rational, so reduciren sich die Gleichungen (1.) auf die Identitäten $\zeta\eta_h = \zeta\eta_h$, woraus $N(\zeta) = \zeta^n$ folgt.

3. Ist ζ' irgend eine zweite Function des Körpers Ω und das dem System (1.) entsprechende Gleichungssystem für diese Function

$$\zeta'\eta_h = \sum^{\iota} y'_{h,\iota}\eta_\iota,$$

so folgt:

$$\zeta\zeta'\eta_h = \sum^{\iota,\iota'} y_{h,\iota}y'_{\iota,\iota'}\eta_{\iota'}$$

und daraus nach dem Multiplicationssatz der Determinanten

$$N(\zeta\zeta') = N(\zeta)N(\zeta').$$

4. Aus 2. und 3. folgt:

$$N(\zeta)N\left(\frac{1}{\zeta}\right) = 1,$$

also:

$$N\left(\frac{\zeta}{\zeta'}\right) = \frac{N(\zeta)}{N(\zeta')}.$$

5. Endlich ergiebt sich aus der Definition der Function φ, (2.), (3.) der wichtige Satz: Ist t eine beliebige Constante (oder auch eine rationale Function von z), so ist

$$\varphi(t) = N(t-\zeta).$$

Es soll sodann die Function

$$(5.) \qquad -b_1 = y_{1,1}+y_{2,2}+\cdots+y_{n,n}$$

die ***Spur*** von ζ genannt und mit $S(\zeta)$ bezeichnet werden. Für diese ergeben sich unmittelbar aus der Definition die Sätze:

$$(6.) \qquad S(0) = 0,$$

$$(7.) \qquad S(1) = n.$$

Und wenn x eine rationale Function von z, ferner ζ, ζ' zwei Functionen in Ω bedeuten:

$$(8.) \qquad S(x\zeta) = xS(\zeta),$$

$$(9.) \qquad S(\zeta+\zeta') = S(\zeta)+S(\zeta').$$

Es hat sich aus dieser Betrachtung ergeben, ***dass jede Function ζ in Ω einer Gleichung n^{ten} Grades, $\varphi(\zeta)=0$, genügt, deren Coefficienten rational von z abhängen.*** Wenn diese Gleichung irreductibel ist, so bilden die Functionen $1, \zeta, \zeta^2, \ldots \zeta^{n-1}$ eine Basis von Ω. Im andern Falle sei

$$(10.) \qquad \varphi_1(\zeta) = \zeta^e + b'_0\zeta^{e-1}+\cdots+b'_{e-1}\zeta+b'_e = 0$$

die Gleichung niedrigsten Grades, deren Coefficienten in z rational sind, welcher die Function ζ genügt, und mithin $\varphi_1(\zeta)=0$ irreductibel, $e<n$.

Da gleichwohl $\varphi(\zeta)$ verschwindet, so muss $\varphi(\zeta)$ durch $\varphi_1(\zeta)$ algebraisch theilbar sein, und wie in § 1 ergiebt sich, dass jede rationale Function η von z und ζ in der Form darstellbar ist

$$\eta = x_0 + x_1\zeta + \cdots + x_{e-1}\zeta^{e-1},$$

deren Coefficienten $x_0, x_1, \ldots x_{e-1}$ rational von z abhängen*). Ist nun

$$\theta^f + \eta_1\theta^{f-1} + \cdots + \eta_{f-1}\theta + \eta_f = 0$$

die Gleichung niedrigsten Grades, welcher θ genügt, deren Coefficienten rational von z *und* ζ abhängen, so besteht zwischen den $e.f$ Functionen

$$(11.)\qquad \zeta^h\theta^k \qquad {\scriptstyle (h=0,\,1,\,\ldots\, e-1;\; k=0,\,1,\,\ldots\, f-1)}$$

keine lineare Gleichung mit rational von z abhängigen Coefficienten, während *jede* Function in Ω *linear* mit rational von z abhängigen Coefficienten durch diese Functionen darstellbar ist. Es ergiebt sich daraus, dass dieselben eine Basis von Ω bilden, und dass sonach

$$e.f = n,$$

also e ein Theiler von n ist.

Wendet man die Basis (11.) zur Aufstellung der Norm von ζ an, so erkennt man leicht mittels der Gleichung (10.), dass

$$N(\zeta) = ((-1)^e b'_e)^f = (-1)^n b'^f_e$$

wird. Da ferner für ein beliebiges constantes t die Function $\zeta - t$ einer Gleichung von demselben Grade genügt wie ζ, so ergiebt sich der Satz:

10. ***Die Function $\varphi(t)$ (3.) ist entweder irreductibel oder eine ganze Potenz einer irreductibeln Function.***

Ist $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ ein beliebiges System von n Functionen in Ω, gleichviel ob dasselbe eine Basis bildet oder nicht, so führen wir eine zu diesem System gehörige rationale Function von z ein, die wir als dessen ***Discriminante***, $\Delta(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n)$ bezeichnen und folgendermassen definiren

$$(12.)\qquad \Delta(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n) = \begin{vmatrix} S(\eta_1\eta_1), & S(\eta_1\eta_2), & \ldots & S(\eta_1\eta_n) \\ S(\eta_2\eta_1), & S(\eta_2\eta_2), & \ldots & S(\eta_2\eta_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S(\eta_n\eta_1), & S(\eta_n\eta_2), & \ldots & S(\eta_n\eta_n) \end{vmatrix}.$$

Die Discriminante ist dann und nur dann nicht identisch Null, wenn die Functionen $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ eine Basis von Ω bilden.

---

*) Aus der Gleichung $\varphi_1(\zeta) = 0$ entspringt ein Körper algebraischer Functionen Ω_1 vom Grade e, dessen Functionen sämmtlich zugleich im Körper Ω enthalten sind, und der daher als ein Theiler des Körpers Ω bezeichnet werden kann.

Um den ersten Theil dieser Behauptung zu beweisen, nehmen wir an, es sei $\Delta(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n) = 0$. Es lässt sich unter dieser Voraussetzung ein System rationaler Functionen $y_1, y_2, \ldots y_n$ von z, die nicht alle identisch verschwinden, so bestimmen, dass

$$y_1 S(\eta_1 \eta_k) + y_2 S(\eta_2 \eta_k) + \cdots + y_n S(\eta_n \eta_k) = S(\eta_k (y_1 \eta_1 + y_2 \eta_2 + \cdots + y_n \eta_n)) = 0. \quad (k = 1, 2, \ldots n)$$

Wählt man daher ein System rationaler Functionen $x_1, x_2, \ldots x_n$ von z, ganz beliebig und setzt:

$$y_1 \eta_1 + y_2 \eta_2 + \cdots + y_n \eta_n = \eta,$$
$$x_1 \eta_1 + x_2 \eta_2 + \cdots + x_n \eta_n = \xi,$$

so folgt:

$$S(\xi \eta) = 0.$$

Wenn aber die Functionen $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ eine Basis von Ω bilden, so kann ξ jede beliebige Function in Ω, also, da η nicht verschwindet, beispielsweise auch $\frac{1}{\eta}$ sein. Dann ist aber die letzte Gleichung sicher nicht erfüllt, und es kann also unter dieser Voraussetzung die Discriminante von $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ ***nicht*** identisch verschwinden.

Halten wir die Annahme fest, dass $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ eine Basis von Ω sei, und setzen:

$$\eta'_k = x_{1,k} \eta_1 + x_{2,k} \eta_2 + \cdots + x_{n,k} \eta_n, \quad (k = 1, 2, \ldots n)$$

so bilden die Functionen $\eta'_1, \eta'_2, \ldots \eta'_n$ eine Basis von Ω oder nicht, je nachdem die Determinante der rationalen Functionen $x_{h,k}$ von z

$$X = \Sigma \pm x_{1,1} x_{2,2} \ldots x_{n,n}$$

von Null verschieden ist oder nicht. Nun ist aber

$$S(\eta'_h \eta'_k) = \sum_{1,n}^{\iota,\iota'} x_{\iota,h} x_{\iota',k} S(\eta_\iota \eta_{\iota'}),$$

und daraus ergiebt sich nach dem Multiplicationssatz der Determinanten der ***Hauptsatz über die Discriminanten***

$$(13.) \quad \Delta(\eta'_1, \eta'_2, \ldots \eta'_n) = X^2 \Delta(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n),$$

woraus auch die Richtigkeit des zweiten Theils der obigen Behauptung erhellt, dass die Discriminante eines Functionensystems stets dann identisch verschwindet, wenn dasselbe keine Basis von Ω bildet.

§ 3.

Das System der ganzen Functionen von z im Körper Ω.

Definition. Eine Function ω des Körpers Ω soll eine ***ganze*** Function von z heissen, wenn in der Gleichung niedrigsten Grades, welcher dieselbe nach § 2 genügt:

$$(1.)\qquad \varphi(\omega)=\omega^e+b_1\omega^{e-1}+\cdots+b_{e-1}\omega+b_e=0,$$

die Coefficienten $b_1, b_2, \ldots b_e$ ***ganze rationale*** Functionen von z sind; im entgegengesetzten Fall heisse sie eine ***gebrochene*** Function. Der Inbegriff aller ganzen Functionen von z in Ω soll mit $\mathfrak{o}$ bezeichnet werden. Da nach § 2 $N(t-\omega)$ eine ganze Potenz von $\varphi(t)$ ist, so folgt, dass für eine ganze Function ω auch die sämmtlichen Coefficienten von $N(t-\omega)$ ganze rationale Functionen von z sind, also ins Besondere:

1. Die Norm und die Spur einer ganzen Function sind ganze rationale Functionen von z.

Aus der Definition der ganzen Functionen ergiebt sich ferner:

2. Eine rationale Function von z gehört dann und nur dann zu dem System $\mathfrak{o}$, wenn sie eine ganze rationale Function von z ist.

3. Jede Function η in Ω kann durch Multiplication mit einer von Null verschiedenen ganzen rationalen Function von z in eine Function des Systems $\mathfrak{o}$ verwandelt werden. Denn es genügt η nach § 2 einer Gleichung niedrigsten Grades von der Form

$$b_0\eta^e+b_1\eta^{e-1}+\cdots+b_{e-1}\eta+b_e = 0,$$

deren Coefficienten ganze rationale Functionen von z sind, und diese geht durch die Substitution $b_0\eta=\omega$ in eine Gleichung von der Form (1.) für ω über.

4. Eine Function ω des Körpers Ω, welche irgend einer Gleichung von der Form genügt

$$\psi(\omega)=\omega^m+c_1\omega^{m-1}+\cdots+c_{m-1}\omega+c_m=0,$$

in welcher die Coefficienten $c_1, \ldots c_m$ ganze rationale Functionen von z sind, ist eine ***ganze Function.*** Denn ist

$$\varphi(\omega)=\omega^e+b_1\omega^{e-1}+\cdots+b_{e-1}\omega+b_e=0$$

die Gleichung niedrigsten Grades, welcher ω genügt, so muss $\psi(\omega)$ durch $\varphi(\omega)$ algebraisch theilbar sein:

$$\psi(\omega) = \varphi(\omega)\chi(\omega),$$

was, wie leicht zu zeigen ist, zur Folge hat, dass auch die Coefficienten von $\varphi(\omega)$ und $\chi(\omega)$ ganze rationale Functionen von z sind (*Gauss*, Disq. Ar. art. 42). Hieraus ergiebt sich der Hauptsatz über die ganzen Functionen:

5. ***Summe, Differenz, Product zweier ganzen Functionen sind wieder ganze Functionen.***

Sind nämlich ω', ω'' zwei ganze Functionen in Ω, welche resp. den Gleichungen genügen

$$\omega'^{n'} + b'_1\omega'^{n'-1} + \cdots + b'_{n'-1}\omega' + b'_{n'} = 0,$$
$$\omega''^{n''} + b''_1\omega''^{n''-1} + \cdots + b''_{n''-1}\omega'' + b''_{n''} = 0,$$

so kann man, wenn man unter $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_m$ die $m = n'n''$ Producte

$$\omega'^{h'}\omega''^{h''} \qquad (h'=0, 1, \ldots n'-1;\ h''=0, 1, \ldots n''-1)$$

und unter ω eine der drei Functionen $\omega' \pm \omega''$, $\omega'\omega''$ versteht, setzen:

$$\begin{aligned} \omega\omega_1 &= x_{1,1}\omega_1 + \cdots + x_{1,m}\omega_m, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \omega\omega_m &= x_{m,1}\omega_1 + \cdots + x_{m,m}\omega_m, \end{aligned}$$

worin die $x_{h,h'}$ ganze rationale Functionen von z sind, und daraus erhält man

$$\begin{vmatrix} x_{1,1}-\omega, & x_{1,2}, & \ldots & x_{1,m} \\ x_{2,1}, & x_{2,2}-\omega, & \ldots & x_{2,m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{m,1}, & x_{m,2}, & \ldots & x_{m,m}-\omega \end{vmatrix} = 0,$$

also eine Gleichung für ω, deren Coefficienten ganze rationale Functionen von z sind.

Als Corollar ergiebt sich hieraus, dass jede ganze rationale Function von Functionen in $\mathfrak{o}$ selbst eine Function des Systems $\mathfrak{o}$ ist.

6. Eine ganze Function ω heisst durch eine andere ganze Function ω' ***theilbar***, wenn eine dritte ganze Function ω'' existirt, welche der Bedingung genügt

$$\omega = \omega'\omega''.$$

Aus dieser Definition ergiebt sich sofort:

Ist ω theilbar durch ω', ω' durch ω'', so ist auch ω durch ω'' theilbar.

Ist ω' und ω'' durch ω theilbar, so ist auch $\omega' \pm \omega''$ durch ω theilbar, und allgemein: sind $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$ durch ω theilbar, $\omega'_1, \omega'_2, \omega'_3, \ldots$ beliebige Functionen in $\mathfrak{o}$, so ist auch $\omega'_1\omega_1 + \omega'_2\omega_2 + \omega'_3\omega_3 + \cdots$ durch ω theilbar.

7. Bilden die Functionen $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ eine Basis von Ω, so kann man (nach 3.) n von Null verschiedene ganze rationale Functionen von z, $a_1, a_2, \ldots a_n$ der Art bestimmen, dass

$$\omega_1 = a_1\eta_1, \quad \omega_2 = a_2\eta_2, \quad \ldots \quad \omega_n = a_n\eta_n$$

ganze Functionen sind, und diese bilden ebenfalls eine Basis von Ω, da

$$\Delta(\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n) = a_1^2 a_2^2 \ldots a_n^2 \Delta(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n)$$

von Null verschieden ist. Es giebt also Basen von Ω, $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$, welche aus lauter ganzen Functionen bestehen, und die Discriminante einer solchen Basis ist, da $S(\omega_r \omega_s)$ ganze rationale Functionen von z sind, selbst eine von Null verschiedene ganze rationale Function von z. Jede Function von der Form

$$(2.) \qquad \omega = x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + \cdots + x_n\omega_n,$$

in welcher die $x_1, x_2, \ldots x_n$ ganze rationale Functionen von z sind, gehört dann zu dem System $\mathfrak{o}$; aber es ist durchaus nicht nothwendig, dass umgekehrt jede Function in $\mathfrak{o}$ in dieser Form darstellbar sei.

Nehmen wir also an, es existiren in $\mathfrak{o}$ noch andere Functionen als die in der Form (2.) enthaltenen, so müssen sich eine lineare Function $z-c$ und gewisse ganze rationale Functionen $x_1, x_2, \ldots x_n$, die nicht alle durch $z-c$ theilbar sind, so wählen lassen, dass

$$\frac{x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + \cdots + x_n\omega_n}{z-c}$$

eine ganze Function ist. Die Functionen $x_1, x_2, \ldots x_n$ lassen sich nun auf ihre nicht sämmtlich verschwindenden constanten Reste $c_1, c_2, \ldots c_n$ in Bezug auf $z-c$ reduciren, und daraus erhellt, dass auch

$$\omega = \frac{c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + \cdots + c_n\omega_n}{z-c}$$

eine ganze Function ist. Ist c_1 von Null verschieden, so bilden auch die n ganzen Functionen

$$\omega \text{ und } \omega_2, \omega_3, \ldots \omega_n$$

eine Basis von Ω und zugleich ist nach § 2 (13.)

$$\Delta(\omega, \omega_2, \ldots \omega_n) = \frac{c_1^2}{(z-c)^2}\Delta(\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n),$$

also von niedrigerem Grade als $\Delta(\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n)$. Da nun diese beiden Discriminanten ganze rationale Functionen von z sind, so gelangt man durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens schliesslich zu einer aus ganzen

Functionen bestehenden Basis von Ω, ω_1', ω_2', ... ω_n', deren Discriminante im Grade nicht weiter erniedrigt werden kann, und welche folglich die Eigenschaft hat, ***dass jede Function ω in $\mathfrak{o}$ in der Form enthalten ist***

$$\omega = x_1\omega_1' + x_2\omega_2' + \cdots + x_n\omega_n'$$

mit ganzen rationalen Functionen von z als Coefficienten. Ein solches System soll eine Basis von $\mathfrak{o}$ genannt werden.

Ist ω_1, ω_2, ... ω_n eine Basis von $\mathfrak{o}$ und

$$\omega_\iota' = x_{\iota,1}\omega_1 + x_{\iota,2}\omega_2 + \cdots + x_{\iota,n}\omega_n, \qquad (\iota = 1, 2, \ldots n)$$

so wird das System ω_1', ω_2', ... ω_n' dann und nur dann ebenfalls eine Basis von $\mathfrak{o}$ bilden, wenn die Determinante der ganzen rationalen Functionen $x_{\iota,\iota'}$

$$X = \Sigma \pm x_{1,1}x_{2,2}\ldots x_{n,n}$$

eine von Null verschiedene *Constante* ist. Denn nehmen wir an, es habe diese Determinante irgend einen Linearfactor $z-c$, so lassen sich Constanten c_1, c_2, ... c_n, nicht sämmtlich verschwindend, so bestimmen, dass die n ganzen rationalen Functionen von z

$$c_1x_{1,\iota} + c_2x_{2,\iota} + \cdots + c_nx_{n,\iota}$$

durch $z-c$ theilbar werden (d. h. für $z = c$ verschwinden); dann aber ist

$$\frac{c_1\omega_1' + c_2\omega_2' + \cdots + c_n\omega_n'}{z-c}$$

eine ganze Function und mithin ω_1', ω_2', ... ω_n' keine Basis von $\mathfrak{o}$.

Da nun andererseits

$$\Delta(\omega_1', \omega_2', \ldots \omega_n') = X^2\Delta(\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n)$$

ist, so folgt, dass die Discriminante einer Basis von $\mathfrak{o}$ von einem constanten Factor abgesehen von der Wahl dieser Basis unabhängig ist. Man erhält also eine vollkommen bestimmte ganze rationale Function von z, wenn man in der Discriminante einer beliebigen Basis von $\mathfrak{o}$ den Coefficienten der höchsten Potenz von z durch Division $= 1$ macht. ***Diese Function soll die Discriminante des Körpers Ω oder des Systems $\mathfrak{o}$ genannt und mit $\Delta(\Omega)$ oder $\Delta(\mathfrak{o})$ bezeichnet werden.***

§ 4.

Die Functionenmoduln.

Wir betrachten im Folgenden Systeme von Functionen, welche wir *Functionenmoduln* oder auch schlechtweg *Moduln* nennen und folgendermassen

definiren. ***Ein Functionensystem (in Ω) heisst ein Modul, wenn sich die Functionen desselben durch Addition, Subtraction und durch Multiplication mit ganzen rationalen Functionen von z reproduciren.***

Bezeichnet man mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ irgend m gegebene Functionen, mit $x_1, x_2, \ldots x_m$ willkürliche ganze rationale Functionen von z, so bildet der Inbegriff aller Functionen von der Form

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m$$

einen Modul. Ein solcher soll ein ***endlicher Modul*** genannt und mit

$$\mathfrak{a} = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m]$$

bezeichnet werden. Das Functionensystem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ heisst die Basis dieses Moduls.

Wir wollen ein Functionensystem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ ***rational irreductibel*** oder die Functionen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ ***rational unabhängig*** nennen, wenn eine Gleichung von der Form

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = 0$$

für rationale x nur dann bestehen kann, wenn $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots x_m = 0$ ist. Ein Functionensystem, welches eine Basis des Körpers Ω bildet, ist daher stets rational irreductibel, und es giebt kein System von mehr als n rational unabhängigen Functionen in Ω.

Wir beweisen nun zunächst den Satz:

1. ***Jeder endliche Modul besitzt eine rational irreductible Basis.***

Der Beweis desselben ergiebt sich unmittelbar aus dem folgenden Hülfssatz:

Sind die ganzen rationalen Functionen $y_{1,1}, y_{2,1}, \ldots y_{m,1}$ ohne gemeinschaftlichen Theiler, so lassen sich andere ganze rationale Functionen $y_{1,2}, y_{2,2}, \ldots y_{m,m}$ so bestimmen, dass

$$\Sigma \pm y_{1,1} y_{2,2} \ldots y_{m,m} = 1\text{*}).$$

---

*) Der Satz ist richtig und bekannt für $m = 2$. Nehmen wir also an, er sei bewiesen für $m-1$, so können wir, wenn ∂ den grössten gemeinschaftlichen Theiler von $y_{1,1}, y_{2,1}, \ldots y_{m-1,1}$ bedeutet, der Gleichung genügen

$$\begin{vmatrix} y_{1,1}, & y_{2,1}, & \ldots & y_{m-1,1} \\ y_{1,3}, & y_{2,3}, & \ldots & y_{m-1,3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{1,m}, & y_{2,m}, & \ldots & y_{m-1,m} \end{vmatrix} = \partial$$

und wenn wir also die ganzen rationalen Functionen x, y so bestimmen, dass

$$xy_{m,1} - y\partial = (-1)^{m-1}$$

Genügen nun die Functionen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ einer Gleichung

$$\sum_{1,m}^{\iota} y_{\iota,1}\alpha_\iota = 0,$$

in welcher die ganzen rationalen Functionen $y_{1,1}, \ldots y_{m,1}$ ohne gemeinschaftlichen Theiler angenommen werden können, so setze man

$$\begin{aligned} \sum_{1,m}^{\iota} y_{\iota,2}\alpha_\iota &= \beta_2, \\ \cdots & \cdots \\ \sum_{1,m}^{\iota} y_{\iota,m}\alpha_\iota &= \beta_m; \end{aligned}$$

dann ist der Modul $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m]$ völlig identisch mit dem Modul $[\beta_2, \beta_3, \ldots \beta_m]$, dessen Basis eine Function weniger enthält. Sind die Functionen β_ι noch nicht rational unabhängig, so kann man sie in derselben Weise weiter reduciren, und gelangt schliesslich, falls die Functionen α_ι nicht sämmtlich verschwinden (ein Fall, welchen wir von dem Modulbegriff ganz ausschliessen wollen) zu einer irreductibeln Basis. Wir werden in der Folge unter einer Basis schlechtweg stets eine irreductible Basis verstehen.

2. Obwohl man nach dem Vorhergehenden für einen und denselben Modul sehr verschiedene irreductible Basen auffinden kann, so ist doch die Zahl der Functionen, die in einer solchen enthalten sind, stets dieselbe, da im entgegengesetzten Fall dasjenige Functionensystem, welches mehr Functionen enthält, nicht rational irreductibel sein könnte. Sind also $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$; $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m$ zwei irreductible Basen desselben Moduls $\mathfrak{a}$, so ist, da sowohl die α_k als die β_k in $\mathfrak{a}$ enthalten sind:

$$\alpha_k = \sum_{1,m}^{\iota} p_k^{(\iota)}\beta_\iota; \quad \beta_k = \sum_{1,m}^{\iota} q_\iota^{(k)}\alpha_\iota,$$

worin die Coefficienten p, q ganze rationale Functionen von z sind. Hieraus aber folgt:

$$\sum_{1,m}^{\iota} q_\iota^{(k)} p_\iota^{(h)} = 0 \quad \text{oder} \quad 1,$$

---

ist, so folgt:

$$\begin{vmatrix} y_{1,1}, & y_{2,1}, & \cdots & y_{m-1,1}, & y_{m,1} \\ \frac{x y_{1,1}}{\partial}, & \frac{x y_{2,1}}{\partial}, & \cdots & \frac{x y_{m-1,1}}{\partial}, & y \\ y_{1,3}, & y_{2,3}, & \cdots & y_{m-1,3}, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{1,m}, & y_{2,m}, & \cdots & y_{m-1,m}, & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

je nachdem h von k verschieden ist oder nicht, und daraus:

$$\Sigma \pm p_1^{(1)} p_2^{(2)} \dots p_m^{(m)} . \Sigma \pm q_1^{(1)} q_2^{(2)} \dots q_m^{(m)} = 1,$$

und da beide Determinanten ganze rationale Functionen von z sind, so müssen sie beide *constant* sein.

3. *Definition.* Ein Modul $\mathfrak{a}$ heisst durch einen Modul $\mathfrak{b}$ *theilbar*, oder $\mathfrak{b}$ ein *Theiler (Divisor)* von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}$ ein *Vielfaches (Multiplum)* von $\mathfrak{b}$ ($\mathfrak{b}$ geht in $\mathfrak{a}$ auf), wenn jede Function in $\mathfrak{a}$ zugleich in $\mathfrak{b}$ enthalten ist. $\mathfrak{b}$ soll ein *echter Theiler* von $\mathfrak{a}$ heissen, wenn $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{b}$ theilbar, aber nicht mit $\mathfrak{b}$ identisch ist *).

Aus dieser Definition ergiebt sich sofort:

Ist $\mathfrak{a}$ theilbar durch $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}$ theilbar durch $\mathfrak{c}$, so ist auch $\mathfrak{a}$ theilbar durch $\mathfrak{c}$.

4. *Definition.* Der Inbegriff $\mathfrak{m}$ aller derjenigen Functionen, welche zugleich in zwei Moduln $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ enthalten sind, bildet, falls er nicht aus der einzigen Function „Null" besteht, einen Modul (nach der allgemeinen Definition), welcher das *kleinste gemeinschaftliche Vielfache von* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ heisst, weil jeder Modul, welcher ein Vielfaches zugleich von $\mathfrak{a}$ und von $\mathfrak{b}$ ist, auch ein Vielfaches von $\mathfrak{m}$ ist. Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von einer beliebigen Zahl von Moduln $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ... ist dem entsprechend der Inbegriff aller der Functionen, die zugleich in $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ... enthalten sind. Man kann dasselbe bilden, indem man nach Belieben je zwei der Moduln $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ... durch ihr kleinstes gemeinschaftliches Vielfache ersetzt.

5. *Definition.* Ist α eine beliebige Function in $\mathfrak{a}$, β eine beliebige Function in $\mathfrak{b}$, so bildet der Inbegriff aller Functionen von der Form $\alpha+\beta$ einen Modul $\mathfrak{d}$, welcher der *grösste gemeinschaftliche Theiler der beiden Moduln* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *heisst.* Derselbe ist, wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ endliche Moduln sind, selbst ein solcher. Ist nämlich

$$\mathfrak{a} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_r], \quad \mathfrak{b} = [\beta_1, \beta_2, \dots \beta_s],$$

so ist

$$\mathfrak{d} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_r, \quad \beta_1, \beta_2, \dots \beta_s].$$

Nach der Definition der Theilbarkeit ist $\mathfrak{d}$ ein Theiler sowohl von $\mathfrak{a}$ als von $\mathfrak{b}$. Ist umgekehrt $\mathfrak{d}'$ ein Theiler von $\mathfrak{a}$ und von $\mathfrak{b}$, so sind die Func-

*) Der Begriff der Theilbarkeit der Moduln ist der von den Zahlen her gewohnten Anschauung zuwider gebildet, insofern der Theiler einen grösseren Inhalt an Functionen enthält als das Vielfache.

tionen α sowohl als die Functionen β, mithin auch die Functionen $\alpha+\beta$ in $\mathfrak{d}'$ enthalten; daher ist $\mathfrak{d}$ durch $\mathfrak{d}'$ theilbar.

Die Definition des grössten gemeinschaftlichen Theilers einer beliebigen Anzahl von Moduln ergiebt sich hiernach von selbst.

6. ***Definition.*** Ist $\mathfrak{a}$ ein Modul, α jede Function in $\mathfrak{a}$ und μ eine beliebige Function in Ω, so verstehen wir unter dem Product $\mu\mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{a}\mu$ den Inbegriff aller Functionen $\mu\alpha$, welcher wieder ein Modul ist. Ist

$$\mathfrak{a} = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r]$$

ein endlicher Modul, so ist

$$\mu\mathfrak{a} = [\mu\alpha_1, \mu\alpha_2, \ldots \mu\alpha_r],$$

also ebenfalls ein endlicher Modul, und aus $\mu\mathfrak{a} = \mu\mathfrak{b}$ folgt $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, wenn μ von Null verschieden ist.

7. ***Definition.*** Sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ zwei Moduln, α, β sämmtliche Functionen in $\mathfrak{a}$, resp. in $\mathfrak{b}$, so verstehen wir unter dem ***Product***

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$$

den Inbegriff aller Producte einer Function α und einer Function β und aller Summen solcher Producte, also sämmtlicher Functionen, welche durch das Zeichen

$$\gamma = \Sigma\alpha\beta$$

bezeichnet werden können.

Dieses Functionensystem bildet jederzeit einen Modul, und zwar einen endlichen, wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ solche sind. Sind nämlich $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ so definirt, wie in 5., so bilden die $r.s$ Functionen $\alpha_\iota\beta_\varkappa$ eine, wenn auch reductible, Basis von $\mathfrak{c}$. Ein Product aus beliebig vielen Moduln $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ... erklärt sich hiernach von selbst, und es gilt für dasselbe der Fundamentalsatz der Multiplication von der Vertauschbarkeit der Factoren. Sind die einzelnen Functionen eines solchen Products, deren Anzahl m sei, einander gleich und $= \mathfrak{a}$, so wird dasselbe mit $\mathfrak{a}^m$ bezeichnet, und es ist

$$\mathfrak{a}^{m+m'} = \mathfrak{a}^m\mathfrak{a}^{m'}.$$

Im Allgemeinen ist ein Product $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ ***nicht*** durch $\mathfrak{a}$ theilbar. Dagegen gilt der Satz, dessen Beweis sich unmittelbar aus der Definition ergiebt:

Ist $\mathfrak{a}$ ***theilbar durch*** $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}$ ***durch*** $\mathfrak{b}_1$, ***so ist*** $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ ***theilbar durch*** $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$.

8. ***Definition.*** Unter dem Quotienten $\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}$ zweier Moduln $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ soll der Inbegriff aller derjenigen Functionen γ verstanden werden, welche die Eigen-

schaft haben, dass $\gamma\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{b}$ theilbar ist. Dieser Quotient ist, falls er nicht aus der einzigen Function „Null" besteht, ein Modul $\mathfrak{c}$, was sofort aus der Definition erhellt. Das Product $\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\cdot\mathfrak{a}$ ist jederzeit durch $\mathfrak{b}$ theilbar, wenn auch nicht immer gleich $\mathfrak{b}$.

§ 5.

Congruenzen.

Zwei Functionen α, β heissen ***congruent*** nach dem Modul $\mathfrak{a}$

$$\alpha \equiv \beta \pmod{\mathfrak{a}},$$

wenn die Differenz der beiden Functionen, $\alpha-\beta$, in dem Modul $\mathfrak{a}$ enthalten ist.

Aus dieser Definition ergeben sich unmittelbar die folgenden Sätze:

1. Ist $\alpha \equiv \beta$, $\beta \equiv \gamma \pmod{\mathfrak{a}}$, so ist $\alpha \equiv \gamma \pmod{\mathfrak{a}}$.

2. Ist $\mathfrak{d}$ irgend ein Theiler von $\mathfrak{a}$, so folgt aus $\alpha \equiv \beta \pmod{\mathfrak{a}}$, dass auch $\alpha \equiv \beta \pmod{\mathfrak{d}}$ ist.

3. Ist $\alpha \equiv \beta \pmod{\mathfrak{a}}$, μ eine beliebige Function in Ω, so folgt $\mu\alpha \equiv \mu\beta \pmod{\mu\mathfrak{a}}$, und umgekehrt folgt aus der letzteren Congruenz die erstere, wenn μ von Null verschieden.

4. Ist $\alpha \equiv \beta$, $\alpha_1 \equiv \beta_1 \pmod{\mathfrak{a}}$, so ist auch $\alpha \pm \alpha_1 \equiv \beta \pm \beta_1 \pmod{\mathfrak{a}}$.

Sind $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ beliebig gegebene Functionen in Ω, $c_1, c_2, \ldots c_m$ ***willkürliche Constanten***, so heisst der Inbegriff aller Functionen von der Form

$$c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + \cdots + c_m\lambda_m$$

eine ***Schaar*** und wird mit $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m)$ bezeichnet. Das Functionensystem $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ heisst ***die Basis der Schaar.*** Die Functionen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ heissen ***linear unabhängig*** oder ihr System ***linear irreductibel***, wenn eine Gleichung (Identität) von der Form

$$c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + \cdots + c_m\lambda_m = 0$$

nicht anders bestehen kann, als wenn die constanten Coefficienten c_1, $c_2, \ldots c_m$ alle verschwinden.

Hiernach gilt der Satz, ***dass jede Schaar eine linear irreductible Basis besitzt.*** Denn ist $c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + \cdots + c_m\lambda_m = 0$ und c_1 von Null verschieden, so ist die Schaar $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m)$ identisch mit der Schaar $(\lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_m)$, deren Basis eine Function weniger enthält. Ist diese noch nicht linear irreductibel, so kann man auf die gleiche Weise weiterschliessen. Auch hier soll in

der Folge unter einer Basis schlechtweg eine irreductible Basis verstanden sein. Die Anzahl der Functionen, welche in einer irreductiblen Basis einer Schaar enthalten sind, ist stets dieselbe und heisst die ***Dimension*** der Schaar. Ist m die Dimension, so heisst die Schaar auch eine ***m-fache.*** Irgend m Functionen einer solchen Schaar bilden eine irreductible Basis derselben dann und nur dann, wenn sie linear unabhängig sind.

Die Functionen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ heissen ***linear unabhängig in Bezug auf den Modul*** $\mathfrak{a}$, wenn eine Congruenz von der Form

$$c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + \cdots + c_m\lambda_m \equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}}$$

für keine anderen als verschwindende constante Coefficienten $c_1, c_2, \ldots c_m$ besteht. Zwei Summen von der Form $\Sigma c_\iota \lambda_\iota$ mit verschiedenen Werthen der constanten Coefficienten c_ι sind dann auch stets incongruent nach dem Modul $\mathfrak{a}$.

Es seien nun $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei Moduln, und es werde ***zunächst*** angenommen, es existiren in $\mathfrak{b}$ nur eine endliche Anzahl von Functionen λ_1, $\lambda_2, \ldots \lambda_m$, welche nach dem Modul $\mathfrak{a}$ linear unabhängig sind. Jede Function β in $\mathfrak{b}$ genügt dann einer und nur einer Congruenz von der Form

$$\beta \equiv c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + \cdots + c_m\lambda_m \pmod{\mathfrak{a}}$$

mit constanten Coefficienten $c_1, c_2, \ldots c_m$. Die Schaar $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m)$ kann daher ein ***vollständiges Restsystem des Moduls*** $\mathfrak{b}$ ***nach dem Modul*** $\mathfrak{a}$ und λ_1, $\lambda_2, \ldots \lambda_m$ eine ***Basis*** desselben genannt werden, und man kann in symbolischer Bezeichnung setzen:

$$\mathfrak{b} \equiv (\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m) \pmod{\mathfrak{a}}.$$

Wählt man in $\mathfrak{b}$ irgend ein System von m Functionen $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots \lambda'_m$ aus, so gelten m Congruenzen

$$\lambda'_h \equiv \sum^{\iota} k_{h,\iota}\lambda_\iota \pmod{\mathfrak{a}}$$

mit constanten $k_{h,\iota}$, und dies System bildet dann und nur dann eine Basis eines vollständigen Restsystems von $\mathfrak{b}$ nach $\mathfrak{a}$, wenn die Determinante

$$\Sigma \pm k_{1,1} k_{2,2} \ldots k_{m,m}$$

von Null verschieden ist.

§ 6.

Norm eines Moduls in Bezug auf einen andern.

Ist $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m)$ ein beliebiges vollständiges Restsystem eines Moduls $\mathfrak{b}$ in Bezug auf einen andern $\mathfrak{a}$, so ergiebt sich, weil $z\mathfrak{b}$ durch $\mathfrak{b}$

theilbar ist, ein ganz bestimmtes System von m^2 Constanten $c_{h,k}$, durch welches die Congruenzen erfüllt werden:

$$\left.\begin{array}{l} z\lambda_1 \equiv c_{1,1}\lambda_1 + c_{2,1}\lambda_2 + \cdots + c_{m,1}\lambda_m \\ z\lambda_2 \equiv c_{1,2}\lambda_1 + c_{2,2}\lambda_2 + \cdots + c_{m,2}\lambda_m \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ z\lambda_m \equiv c_{1,m}\lambda_1 + c_{2,m}\lambda_2 + \cdots + c_{m,m}\lambda_m \end{array}\right\} \pmod{\mathfrak{a}}$$

und durch Auflösung dieses Systems erkennt man, dass jede Function λ_ι, und mithin jede Function β des Moduls $\mathfrak{b}$ durch Multiplication mit der ganzen rationalen Function m^{ten} Grades von z

$$(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) = (-1)^m \begin{vmatrix} c_{1,1} - z, & c_{2,1}, & \ldots & c_{m,1} \\ c_{1,2}, & c_{2,2} - z, & \ldots & c_{m,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{1,m}, & c_{2,m}, & \ldots & c_{m,m} - z \end{vmatrix}$$

in eine Function des Moduls $\mathfrak{a}$ verwandelt wird. Diese Function $(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})$ ist, wie sich aus dem Multiplicationssatz der Determinanten leicht ergiebt, von der Wahl der Basis $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ unabhängig, also nur von den beiden Moduln $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ abhängig und soll die *Norm von* $\mathfrak{a}$ *in Bezug auf* $\mathfrak{b}$ genannt werden.

Ist jede Function in $\mathfrak{b}$ zugleich in $\mathfrak{a}$ enthalten, also $\mathfrak{b}$ durch $\mathfrak{a}$ theilbar, so ist $m = 0$ und $(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) = 1$ zu setzen. Wenn dagegen $\mathfrak{b}$ *nicht*, wie oben angenommen, eine endliche Anzahl in Bezug auf $\mathfrak{a}$ linear unabhängiger Functionen enthält, dann soll festgesetzt werden, dass $(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) = 0$ sei.

1. Ist $\mathfrak{m}$ das kleinste gemeinschaftliche Vielfache, $\mathfrak{d}$ der grösste gemeinschaftliche Theiler von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, so ist jede Congruenz zwischen Functionen des Moduls $\mathfrak{b}$ in Bezug auf den Modul $\mathfrak{a}$ vollkommen gleichbedeutend mit der Congruenz derselben Functionen nach dem Modul $\mathfrak{m}$; andererseits ist jede Function in $\mathfrak{b}$ einer Function in $\mathfrak{d}$ und umgekehrt jede Function in $\mathfrak{d}$ einer Function in $\mathfrak{b}$ congruent nach dem Modul $\mathfrak{a}$. Aus diesen Bemerkungen ergiebt sich sofort der wichtige Satz:

$$(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) = (\mathfrak{b}, \mathfrak{m}) = (\mathfrak{d}, \mathfrak{a}),$$

welcher auch richtig bleibt, wenn $(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) = 0$ ist.

2. *Ist der Modul* $\mathfrak{a}$ *theilbar durch den Modul* $\mathfrak{b}$, *dieser durch den dritten Modul* $\mathfrak{c}$, *so ist*

$$(\mathfrak{c}, \mathfrak{a}) = (\mathfrak{c}, \mathfrak{b})(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}).$$

Der Satz ist offenbar richtig, wenn von den beiden Normen $(\mathfrak{c}, \mathfrak{b})$, $(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})$

eine verschwindet. Ist dies nicht der Fall und ist

$$\mathfrak{c} \equiv (\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_r) \ (\text{mod.}\, \mathfrak{b}),$$
$$\mathfrak{b} \equiv (\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_s) \ (\text{mod.}\, \mathfrak{a}),$$

so sind die Functionen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_r, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_s$ zusammengenommen linear unabhängig nach dem Modul $\mathfrak{a}$; denn ist

$$\overset{\iota}{\Sigma} c_\iota \varrho_\iota + \overset{\iota}{\Sigma} c'_\iota \lambda_\iota \equiv 0 \quad (\text{mod.}\, \mathfrak{a}),$$

so folgt, da $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{b}$ theilbar ist und die Functionen λ_ι in $\mathfrak{b}$ enthalten sind,

$$\overset{\iota}{\Sigma} c_\iota \varrho_\iota \equiv 0 \ (\text{mod.}\, \mathfrak{b}), \quad \text{mithin} \quad c_\iota = 0,$$
$$\overset{\iota}{\Sigma} c'_\iota \lambda_\iota \equiv 0 \ (\text{mod.}\, \mathfrak{a}), \quad \text{mithin} \quad c'_\iota = 0.$$

Da ferner jede Function γ in $\mathfrak{c}$ einer Congruenz von der Form genügt:

$$\gamma \equiv \Sigma c_\iota \varrho_\iota + \Sigma c'_\iota \lambda_\iota \ (\text{mod.}\, \mathfrak{a}),$$

so ist die $(r+s)$-fache Schaar $(\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_r, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_s)$ ein vollständiges Restsystem von $\mathfrak{c}$ nach $\mathfrak{a}$, oder

$$\mathfrak{c} \equiv (\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_r, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_s) \ (\text{mod.}\, \mathfrak{a}).$$

Ist daher

$$\begin{array}{rcl} z\varrho_1 &=& e_{1,1}\varrho_1 + \cdots + e_{r,1}\varrho_r + \beta_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ z\varrho_r &=& e_{1,r}\varrho_1 + \cdots + e_{r,r}\varrho_r + \beta_r, \end{array}$$

worin die $e_{\iota,\varkappa}$ Constanten, die β_ι Functionen in $\mathfrak{b}$ sind, also:

$$(\mathfrak{c}, \mathfrak{b}) = (-1)^r \begin{vmatrix} e_{1,1} - z, & \ldots & e_{r,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ e_{1,r}, & \ldots & e_{r,r} - z \end{vmatrix},$$

ferner:

$$\left.\begin{array}{rcl} \beta_1 &\equiv& h_{1,1}\lambda_1 + \cdots + h_{s,1}\lambda_s \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \beta_r &\equiv& h_{1,r}\lambda_1 + \cdots + h_{s,r}\lambda_s \\ z\lambda_1 &\equiv& c_{1,1}\lambda_1 + \cdots + c_{s,1}\lambda_s \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ z\lambda_s &\equiv& c_{1,s}\lambda_1 + \cdots + c_{s,s}\lambda_s \end{array}\right\} (\text{mod.}\, \mathfrak{a})$$

mit constanten Coefficienten $h_{\iota,\varkappa}$, $c_{\iota,\varkappa}$, also

$$(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) = (-1)^s \begin{vmatrix} c_{1,1} - z, & \ldots & c_{s,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{1,s}, & \ldots & c_{s,s} - z \end{vmatrix},$$

so folgt:

$$\left.\begin{array}{lll} z\varrho_1 & \equiv & e_{1,1}\varrho_1+\cdots+e_{r,1}\varrho_r+h_{1,1}\lambda_1+\cdots+h_{s,1}\lambda_s \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ z\varrho_r & \equiv & e_{1,r}\varrho_1+\cdots+e_{r,r}\varrho_r+h_{1,r}\lambda_1+\cdots+h_{s,r}\lambda_s \\ z\lambda_1 & \equiv & \qquad\qquad\qquad c_{1,1}\lambda_1+\cdots+c_{s,1}\lambda_s \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ z\lambda_s & \equiv & \qquad\qquad\qquad c_{1,s}\lambda_1+\cdots+c_{s,s}\lambda_s \end{array}\right\} (\text{mod.}\,\mathfrak{a})$$

und hieraus

$$(\mathfrak{c},\mathfrak{a}) = (-1)^{r+s}\begin{vmatrix} e_{1,1}-z, & \ldots & e_{r,1}, & h_{1,1}, & \ldots & h_{s,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_{1,r}, & \ldots & e_{r,r}-z, & h_{1,r}, & \ldots & h_{s,r} \\ 0 & \ldots & 0 & c_{1,1}-z, & \ldots & c_{s,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 & c_{1,s}, & \ldots & c_{s,s}-z \end{vmatrix} = (\mathfrak{c},\mathfrak{b})(\mathfrak{b},\mathfrak{a}).$$

3. Wenn die Basis-Functionen $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_s$ eines endlichen Moduls $\mathfrak{b} = [\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_s]$ durch Multiplication mit von Null verschiedenen ganzen rationalen Functionen von z in Functionen eines Moduls $\mathfrak{a}$ verwandelt werden können, so ist die Norm von $\mathfrak{a}$ in Bezug auf $\mathfrak{b}$, $(\mathfrak{b},\mathfrak{a})$ von Null verschieden. Zugleich ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ein endlicher Modul $\mathfrak{m}$, von dem eine irreductible Basis in der Form angenommen werden kann:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= a_{1,1}\beta_1, \\ \mu_2 &= a_{1,2}\beta_1+a_{2,2}\beta_2, \\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \mu_s &= a_{1,s}\beta_1+a_{2,s}\beta_2+\cdots+a_{s,s}\beta_s, \end{aligned}$$

worin die Coefficienten $a_{\iota,\varkappa}$ ganze rationale Functionen von z sind, und zwar so, dass

$$(\mathfrak{b},\mathfrak{a}) = a_{1,1}a_{2,2}\ldots a_{s,s}.$$

Zum Beweise dieses wichtigen Theorems nehmen wir an, es sei $\mathfrak{a}_1$ der grösste gemeinschaftliche Theiler von $\mathfrak{a}$ und $[\beta_1]$, $\mathfrak{a}_2$ der von $\mathfrak{a}_1$ und $[\beta_2]$ u. s. f., so dass $\mathfrak{a}_r$ der Inbegriff aller Functionen von der Form

$$\alpha_r = \alpha+y_1\beta_1+\cdots+y_r\beta_r$$

ist, wo α eine Function in $\mathfrak{a}$, $y_1, \ldots y_r$ ganze rationale Functionen von z sind. Es ist dann $\mathfrak{a}_s$ der grösste gemeinschaftliche Theiler von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$. Da nun jeder Modul $\mathfrak{a}_r$ durch den folgenden $\mathfrak{a}_{r+1}$ theilbar ist, so folgt aus

1. und 2.

$$(\mathfrak{b},\ \mathfrak{a}) = (\mathfrak{a}_s,\ \mathfrak{a}) = (\mathfrak{a}_s,\ \mathfrak{a}_{s-1})(\mathfrak{a}_{s-1},\ \mathfrak{a}_{s-2})\dots(\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{a}),$$

und es handelt sich also noch um die Bestimmung von $(\mathfrak{a}_r, \mathfrak{a}_{r-1})$. Es ist aber

$$\alpha_r = \alpha_{r-1} + y_r \beta_r \equiv y_r \beta_r \quad (\text{mod.}\, \mathfrak{a}_{r-1}),$$

und nach der Voraussetzung giebt es eine von Null verschiedene ganze rationale Function x_r von z, für welche

$$x_r \beta_r \equiv 0 \quad (\text{mod.}\, \mathfrak{a}),$$

also auch

$$x_r \beta_r \equiv 0 \quad (\text{mod.}\, \mathfrak{a}_{r-1}).$$

Ist nun $a_{r,r}$ unter allen der letzteren Congruenz genügenden Functionen x_r eine von möglichst niedrigem Grade m_r, die zugleich so angenommen sei, dass der Coefficient der höchsten Potenz von $z = 1$ ist, so sind alle andern dieser Congruenz genügenden Functionen x_r durch $a_{r,r}$ theilbar; denn es ist für ein beliebiges ganzes rationales q

$$(x_r - q a_{r,r}) \beta_r \equiv 0 \quad (\text{mod.}\, \mathfrak{a}_{r-1}),$$

und wenn x_r nicht durch $a_{r,r}$ theilbar ist, so lässt sich q so wählen, dass $x_r - q a_{r,r}$ von niedrigerem Grade wird als $a_{r,r}$, gegen die Voraussetzung.

Setzt man also

$$y_r = q a_{r,r} + b_{r,r}$$

und bestimmt q so, dass der Grad von $b_{r,r}$ kleiner als m_r wird, so folgt:

$$\alpha_r \equiv b_{r,r} \beta_r \ (\text{mod.}\, \mathfrak{a}_{r-1})$$

und hieraus

$$\mathfrak{a}_r \equiv (\beta_r,\ z\beta_r,\ \dots\ z^{m_r - 1}\beta_r) \ (\text{mod.}\, \mathfrak{a}_{r-1}).$$

Wenn man daher für den Augenblick setzt:

$$a_{r,r} = c_0 + c_1 z + \cdots + c_{m_r - 1} z^{m_r - 1} + z^{m_r},$$

$$\lambda_k = z^{k-1} \beta_r,$$

so folgt:

$$z\lambda_1 = \lambda_2, \quad z\lambda_2 = \lambda_3, \quad \dots$$

$$z\lambda_{m_r} \equiv -c_0\lambda_1 - c_1\lambda_2 - \cdots - c_{m_r-1}\lambda_{m_r} \ (\text{mod.}\, \mathfrak{a}_{r-1})$$

also:

$$(\mathfrak{a}_r,\ \mathfrak{a}_{r-1}) = (-1)^{m_r} \begin{vmatrix} -z, & 1, & 0, & \dots & 0 \\ 0, & -z, & 1, & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & 0, & \dots & 1 \\ -c_0, & -c_1, & -c_2, & \dots & -c_{m_r-1} - z \end{vmatrix} = a_{r,r}.$$

Hieraus ergiebt sich wie in 2., dass das Functionensystem

$$\begin{array}{llll} \beta_1, & z\beta_1, & \dots & z^{m_1-1}\beta_1, \\ \beta_2, & z\beta_2, & \dots & z^{m_2-1}\beta_2, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_s, & z\beta_s, & \dots & z^{m_s-1}\beta_s, \end{array}$$

eine Basis eines vollständigen Restsystems von $\mathfrak{b}$ nach $\mathfrak{a}$ bildet, und dass

$$(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) = a_{1,1}a_{2,2}\dots a_{s,s}$$

vom Grade

$$m = m_1+m_2+\dots+m_s$$

ist.

Da nun $a_{r,r}\beta_r \equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}_{r-1}}$, so lässt sich eine Function μ_r in $\mathfrak{a}$ und ganze rationale Functionen $a_{k,r}$ so bestimmen, dass

$$\mu_r = a_{1,r}\beta_1+a_{2,r}\beta_2+\dots+a_{r,r}\beta_r$$

wird; die auf diese Weise bestimmten Functionen

$$\begin{array}{ll} \mu_1 = & a_{1,1}\beta_1, \\ \mu_2 = & a_{1,2}\beta_1+a_{2,2}\beta_2, \\ \cdot & \cdot \\ \mu_s = & a_{1,s}\beta_1+a_{2,s}\beta_2+\dots+a_{s,s}\beta_s \end{array}$$

sind, da keine der Functionen $a_{1,1}, \dots a_{s,s}$ verschwindet, rational unabhängig und sind sämmtlich zugleich in $\mathfrak{a}$ und in $\mathfrak{b}$, also auch in dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen $\mathfrak{m}$ dieser beiden Moduln enthalten. Es ist noch nachzuweisen, dass dieselben eine Basis von $\mathfrak{m}$ bilden.

Es sei $\mathfrak{m}_r$ das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von $\mathfrak{a}$ und $[\beta_1, \beta_2, \dots \beta_r]$, $\mathfrak{m}_s = \mathfrak{m}$, so dass unter den Moduln $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \dots \mathfrak{m}_s$ jeder durch alle folgenden, also auch durch $\mathfrak{m}$ theilbar ist, und

$$\nu_r = z_1\beta_1+z_2\beta_2+\dots+z_r\beta_r$$

eine Function in $\mathfrak{m}_r$, also auch in $\mathfrak{a}$.

Es ist hiernach

$$z_r\beta_r \equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}_{r-1}},$$

also

$$z_r = x_r a_{r,r},$$

worin x_r eine ganze rationale Function bedeutet. Daher ist

$$\nu_r - x_r\mu_r \equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}_{r-1}}, \quad \nu_1 - x_1\mu_1 = 0,$$

woraus folgt:

$$\nu_r = x_1\mu_1+x_2\mu_2+\dots+x_r\mu_r,$$

also:

$$\mathfrak{m}_r = [\mu_1, \mu_2, \dots \mu_r],$$
$$\mathfrak{m} = [\mu_1, \mu_2, \dots \mu_s],$$

w. z. b. w.

Hiernach enthält eine irreductible Basis des Moduls $\mathfrak{m}$ genau ebenso viele Functionen wie eine irreductible Basis von $\mathfrak{b}$. Wählt man statt der Basis $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_s$ eine andere $\mu'_1, \mu'_2, \dots \mu'_s$, so lässt sich $\mu'_1, \mu'_2, \dots \mu'_s$ in der Form ausdrücken

$$\mu'_k = a'_{1,k}\beta_1 + a'_{2,k}\beta_2 + \dots + a'_{s,k}\beta_s$$

mit ganzen rationalen Coefficienten $a'_{\iota,k}$, und aus § 4, 2. ergiebt sich

$$(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) = \text{const.} \Sigma \pm a'_{1,1} a'_{2,2} \dots a'_{s,s}.$$

4. Machen wir ins Besondere die Annahme, es sei $\mathfrak{a}$ gleichfalls ein endlicher Modul, der eine irreductible Basis von ebenso vielen Functionen besitzt wie $\mathfrak{b}$, und es sei ausserdem $\mathfrak{a}$ theilbar durch $\mathfrak{b}$, dann lassen sich, wenn

$$\mathfrak{a} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s]$$

ist, die ganzen rationalen Functionen $b_{\iota,k}$ von z so bestimmen, dass

$$\alpha_k = b_{1,k}\beta_1 + b_{2,k}\beta_2 + \dots + b_{s,k}\beta_s,$$

und die Voraussetzung von 3., dass die Functionen β_ι durch Multiplication mit ganzen rationalen Functionen von z in Functionen des Moduls $\mathfrak{a}$ verwandelt werden können, ist erfüllt, wie man durch Auflösung dieses Gleichungssystems erkennt. Zugleich ist hier $\mathfrak{a}$ selbst das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, und daraus ergiebt sich

$$(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) = \text{const.} \Sigma \pm b_{1,1} b_{2,2} \dots b_{n,n}.$$

5. Ist $\mathfrak{m}$ das kleinste gemeinschaftliche Vielfache zweier Moduln $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und ν eine beliebige Function in Ω, so ist, wie sich aus der Definition ohne Schwierigkeit ergiebt, $\nu\mathfrak{m}$ das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von $\nu\mathfrak{a}$ und $\nu\mathfrak{b}$. Ist $(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) = 0$, so ist auch $(\nu\mathfrak{b}, \nu\mathfrak{a}) = 0$. Ist aber $(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})$ und ν von Null verschieden, so ergiebt sich

$$(\nu\mathfrak{b}, \nu\mathfrak{a}) = (\mathfrak{b}, \mathfrak{a}),$$

wenn man in 3. die Basis-Functionen μ_ι, β_ι von $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{b}$ durch $\nu\mu_\iota$, $\nu\beta_\iota$ ersetzt.

§ 7.

Die Ideale in $\mathfrak{o}$.

Ein System $\mathfrak{a}$ von *ganzen* Functionen von z im Körper Ω heisst ein *Ideal*, wenn es die beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

I. Summe und Differenz je zweier Functionen in $\mathfrak{a}$ ergeben wieder eine Function in $\mathfrak{a}$.

II. Das Product einer jeden Function in $\mathfrak{a}$ mit einer jeden Function in $\mathfrak{o}$ (§ 3) ist wieder eine Function in $\mathfrak{a}$.

Jedes Ideal ist also zugleich ein Modul und alle für die Moduln erklärten Begriffe und Bezeichnungen können auf die Ideale angewandt werden.

Der Modul $\mathfrak{o}$ (das System aller ganzen Functionen von z) ist selbst ein Ideal, und ***jedes Ideal ist durch*** $\mathfrak{o}$ ***theilbar.*** Ebenso ist, wenn μ eine beliebige von Null verschiedene Function in $\mathfrak{o}$ bedeutet, der Modul $\mathfrak{o}\mu$ (das System aller durch μ theilbaren ganzen Functionen) ein Ideal. Ein solches Ideal soll ein ***Hauptideal*** genannt werden. Ist $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ eine Basis von $\mathfrak{o}$, so ist

$$\mathfrak{o}\mu = [\omega_1\mu, \omega_2\mu, \ldots \omega_n\mu]$$

und $\mathfrak{o}\mu$ ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o}\mu$. Daher ist nach § 6, 4. und nach der Definition (4.) in § 2:

$$(1.) \qquad (\mathfrak{o}, \mathfrak{o}\mu) = \text{const.} N(\mu)$$

und mithin von Null verschieden.

Ist $\mathfrak{a}$ irgend ein Ideal und α eine beliebige Function in $\mathfrak{a}$, so ist (wegen II.) das Hauptideal $\mathfrak{o}\alpha$ theilbar durch $\mathfrak{a}$, und mithin nach § 6, 2.:

$$(2.) \qquad (\mathfrak{o}, \mathfrak{o}\alpha) = (\mathfrak{o}, \mathfrak{a})(\mathfrak{a}, \mathfrak{o}\alpha),$$

mithin auch $(\mathfrak{o}, \mathfrak{a})$ von Null verschieden. Da nun wieder $\mathfrak{a}$ das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{o}$ ist, so besitzt $\mathfrak{a}$ nach § 6, 3. eine irreductible Basis, welche aus n ganzen Functionen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ besteht, die demnach auch eine Basis des Körpers Ω bilden.

Die Norm von $\mathfrak{a}$ in Bezug auf $\mathfrak{o}$, d. h. die ganze rationale Function $(\mathfrak{o}, \mathfrak{a})$ von z soll die ***Norm des Ideals*** $\mathfrak{a}$ genannt und mit $N(\mathfrak{a})$ bezeichnet werden. Der Grad dieser ganzen rationalen Function heisst zugleich der ***Grad des Ideals*** $\mathfrak{a}$.

Ist

$$\mathfrak{a} = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n], \quad \mathfrak{o} = [\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n]$$

und

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a_{1,1}\omega_1 + a_{2,1}\omega_2 + \cdots + a_{n,1}\omega_n, \\ \alpha_2 &= a_{1,2}\omega_1 + a_{2,2}\omega_2 + \cdots + a_{n,2}\omega_n, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_n &= a_{1,n}\omega_1 + a_{2,n}\omega_2 + \cdots + a_{n,n}\omega_n \end{aligned}$$

mit ganzen rationalen Coefficienten $a_{\iota,\varkappa}$, so ergiebt sich aus § 6, 4.:

$$(3.)\qquad N(\mathfrak{a}) = \text{const.}\,\Sigma \pm a_{1,1}a_{2,2}\ldots a_{n,n}.$$

Da jede Function in $\mathfrak{o}$, also auch die Function „1“ durch Multiplication mit $N(\mathfrak{a})$ in eine Function des Ideals $\mathfrak{a}$ verwandelt wird, so ist $N(\mathfrak{a})$ stets eine Function in $\mathfrak{a}$.

Die Norm des Ideals $\mathfrak{o}$ ist gleich 1 und umgekehrt ist $\mathfrak{o}$ das einzige Ideal, welches diese Eigenschaft hat. Auch ist $\mathfrak{o}$ das einzige Ideal, welches die Function „1“ (oder eine Constante) enthält.

Ist α eine Function in $\mathfrak{a}$, so folgt aus (1.), (2.), (3.):

$$(4.)\qquad N(\alpha) = \text{const.}\,N(\mathfrak{a})(\mathfrak{a}, \mathfrak{o}\alpha),$$

d. h. die Norm einer jeden in $\mathfrak{a}$ enthaltenen Function ist durch die Norm von $\mathfrak{a}$ theilbar.

Für die Congruenzen in Bezug auf einen Idealmodul gilt der folgende Satz, welcher die Ideale wesentlich von den allgemeinen Moduln unterscheidet.

Sind μ, μ_1, ν, ν_1 Functionen in $\mathfrak{o}$, welche den Congruenzen genügen

$$\mu \equiv \mu_1, \quad \nu \equiv \nu_1 \pmod{\mathfrak{a}},$$

so ist auch

$$\mu\nu \equiv \mu_1\nu_1 \pmod{\mathfrak{a}}.$$

§ 8.

Multiplication und Theilung der Ideale.

Aus den Grundeigenschaften I., II. der Ideale und aus den Begriffsbestimmungen in § 4 ergiebt sich zunächst:

1. Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache, der grösste gemeinschaftliche Theiler, das Product von zwei (und also auch von beliebig vielen) Idealen sind selbst Ideale. Ebenso ist, wenn ν eine Function in $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{a}$ ein Ideal ist, das Product $\mathfrak{a}\nu$ ein Ideal.

2. Das Product aus mehreren Idealen ist durch jeden seiner Factoren theilbar, und es ist für jedes Ideal $\mathfrak{a}$

$$\mathfrak{a}\mathfrak{o} = \mathfrak{a};$$

denn nach I., II. ist jede Function in $\mathfrak{a}\mathfrak{o}$ zugleich eine Function in $\mathfrak{a}$, und, da $\mathfrak{o}$ die Function „1“ enthält, auch umgekehrt jede Function in $\mathfrak{a}$ zugleich eine Function in $\mathfrak{a}\mathfrak{o}$.

3. Ein Hauptideal $\mathfrak{o}\mu$ ist dann und nur dann theilbar durch ein Hauptideal $\mathfrak{o}\nu$, wenn die ganze Function μ theilbar ist durch die ganze Function ν.

Wir fügen noch folgende Definitionen hinzu:

4. *Definition.* Eine Function α in $\mathfrak{o}$ soll durch das Ideal $\mathfrak{a}$ *theilbar* heissen, wenn das Hauptideal $\mathfrak{o}\alpha$ durch $\mathfrak{a}$ theilbar, oder, was dasselbe sagt, wenn α eine Function in $\mathfrak{a}$ ist.

5. *Definition.* Zwei Ideale $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ heissen *relativ prim,* wenn ihr grösster gemeinschaftlicher Theiler $\mathfrak{o}$ ist. Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, dass in $\mathfrak{a}$ eine Function α, in $\mathfrak{b}$ eine Function β existirt der Art, dass

$$\alpha+\beta = 1,$$

oder, anders ausgedrückt, dass in $\mathfrak{a}$ eine der Congruenz $\alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{b}}$ oder in $\mathfrak{b}$ eine der Congruenz $\beta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{a}}$ genügende Function existirt.

6. *Definition.* Ein von $\mathfrak{o}$ verschiedenes Ideal $\mathfrak{p}$ heisst ein *Primideal,* wenn kein anderes Ideal ausser $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{o}$ in $\mathfrak{p}$ aufgeht.

Auf Grund dieser Definitionen ergeben sich nun die folgenden Sätze über die Theilbarkeit der Ideale.

7. Sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ zwei Ideale mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen $\mathfrak{m}$ und dem grössten gemeinschaftlichen Theiler $\mathfrak{d}$, so folgt aus § 6, 1., 2.

$$N(\mathfrak{m}) = N(\mathfrak{b})(\mathfrak{b},\ \mathfrak{m}) = N(\mathfrak{b})(\mathfrak{b},\ \mathfrak{a}),$$
$$N(\mathfrak{a}) = N(\mathfrak{d})(\mathfrak{d},\ \mathfrak{a}) = N(\mathfrak{d})(\mathfrak{b},\ \mathfrak{a}),$$

folglich $(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})$ von Null verschieden und

$$N(\mathfrak{a})N(\mathfrak{b}) = N(\mathfrak{m})N(\mathfrak{d}).$$

8. Ist das Ideal $\mathfrak{a}$ theilbar durch das Ideal $\mathfrak{b}$, so ist, nach § 6, 2.

$$N(\mathfrak{a}) = (\mathfrak{b},\ \mathfrak{a})N(\mathfrak{b}),$$

also $N(\mathfrak{a})$ theilbar durch $N(\mathfrak{b})$.

Ist ins Besondere $(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) = 1$, so ist auch $\mathfrak{b}$ theilbar durch $\mathfrak{a}$, und es folgt:

9. Ist $\mathfrak{a}$ theilbar durch $\mathfrak{b}$ und ist zugleich $N(\mathfrak{a}) = N(\mathfrak{b})$, so ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, d. h. beide Ideale sind identisch.

10. Ist $\mathfrak{a}$ theilbar durch $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}$ durch $\mathfrak{b}_1$, so ist $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ theilbar durch $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$ (§ 4, 7.).

11. Ist ein Ideal $\mathfrak{a}$ theilbar durch ein Hauptideal $\mathfrak{o}\mu$, so sind alle Functionen in $\mathfrak{a}$ von der Form $\beta\mu$, und der Inbegriff der Functionen β ist wieder ein Ideal $\mathfrak{b}$, so dass man setzen kann

$$\mathfrak{a} = \mu\mathfrak{b}.$$

12. Ist μ eine beliebige von Null verschiedene Function in $\mathfrak{o}$ und das Ideal $\mathfrak{a}\mu$ theilbar durch das Ideal $\mathfrak{b}\mu$, so ist $\mathfrak{a}$ theilbar durch $\mathfrak{b}$, und aus $\mathfrak{a}\mu = \mathfrak{b}\mu$ folgt $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.

13. Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache zweier Ideale $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{o}\nu$, davon eines ein Hauptideal ist, hat nach 11. die Form $\mathfrak{r}\nu$, worin $\mathfrak{r}$ ein Ideal ist. Da andererseits $\mathfrak{a}\nu$ ein gemeinschaftliches Vielfache von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{o}\nu$, also durch $\mathfrak{r}\nu$ theilbar ist, so ist nach 12. $\mathfrak{r}$ ein Theiler von $\mathfrak{a}$.

14. Ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal, ν eine Function in $\mathfrak{o}$, so ist nach § 6, 2., 5.:

$$(\mathfrak{o},\ \mathfrak{a}\nu) = (\mathfrak{o},\ \mathfrak{o}\nu)(\mathfrak{o}\nu,\ \mathfrak{a}\nu) = (\mathfrak{o},\ \mathfrak{o}\nu)(\mathfrak{o},\ \mathfrak{a}),$$

also

$$N(\mathfrak{a}\nu) = \text{const.}\, N(\mathfrak{a}) N(\nu).$$

Ist also $\mathfrak{r}\nu$ das kleinste gemeinschaftliche Vielfache, $\mathfrak{d}$ der grösste gemeinschaftliche Theiler der beiden Ideale $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{o}\nu$, so ergiebt sich aus 7.

$$N(\mathfrak{a}) = N(\mathfrak{r}) N(\mathfrak{d}).$$

15. Jedes von $\mathfrak{o}$ verschiedene Ideal $\mathfrak{a}$ ist durch ein Primideal $\mathfrak{p}$ theilbar.

Ist nämlich $\mathfrak{a}$ kein Primideal, so hat es mindestens einen von $\mathfrak{o}$ verschiedenen echten Theiler, und von diesen sei $\mathfrak{p}$ ein solcher, dessen Norm von möglichst niedrigem Grade ist. Dieser kann keinen von $\mathfrak{o}$ verschiedenen echten Theiler $\mathfrak{p}'$ haben, denn es wäre auch $\mathfrak{p}'$ ein Theiler von $\mathfrak{a}$ und zugleich (nach 8.) $N(\mathfrak{p}')$ von niedrigerem Grade als $N(\mathfrak{p})$. Dies widerspricht der Voraussetzung über $\mathfrak{p}$, und folglich ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal.

16. Ist $\mathfrak{a}$ relativ prim zu $\mathfrak{b}$, so ist $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, und folglich ist jedes durch $\mathfrak{a}$ und durch $\mathfrak{b}$ theilbare Ideal auch durch das Product $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ theilbar.

Denn nach Voraussetzung giebt es in $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ zwei Functionen α_1, β_1 der Art, dass

$$\alpha_1 + \beta_1 = 1$$

ist (5.). Ist andererseits $\alpha = \beta$ eine Function des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, so ist hiernach

$$\alpha = \beta = \alpha_1\beta + \alpha\beta_1,$$

also eine Function in $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$. Es ist demnach $\mathfrak{m}$ theilbar durch $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, und da umgekehrt (zufolge 2.) $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ durch $\mathfrak{m}$ theilbar ist, so ist $\mathfrak{m}$ mit $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ identisch, und aus 7. folgt noch für diesen Fall

$$N(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = N(\mathfrak{a})N(\mathfrak{b}).$$

17. Ist $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal, $\mathfrak{p}$ ein Primideal, so ist entweder $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{p}$ theilbar oder $\mathfrak{a}$ relativ prim zu $\mathfrak{p}$; denn da $\mathfrak{p}$ keinen anderen Theiler hat als $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{p}$, so kann auch der grösste gemeinschaftliche Theiler von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{p}$ kein anderer sein als $\mathfrak{o}$ oder $\mathfrak{p}$.

18. Ist $\mathfrak{a}$ relativ prim zu $\mathfrak{b}$ und zu $\mathfrak{c}$, so ist $\mathfrak{a}$ auch relativ prim zu $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$.

Nach Voraussetzung (5.) giebt es in $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ zwei den Congruenzen

$$\beta \equiv 1, \quad \gamma \equiv 1 \pmod{\mathfrak{a}}$$

genügende Functionen, folglich nach § 7

$$\beta\gamma \equiv 1 \pmod{\mathfrak{a}}.$$

Da $\beta\gamma$ in $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ enthalten ist, so ist hiermit die Behauptung erwiesen.

Es folgt hieraus noch, dass, falls das Product $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ durch ein Primideal theilbar ist, wenigstens einer der beiden Factoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ durch $\mathfrak{p}$ theilbar sein muss, und, auf Hauptideale angewandt, dass, wenn das Product zweier ganzen Functionen, $\mu\nu$, in $\mathfrak{p}$ enthalten ist, wenigstens der eine der beiden Factoren μ, ν in $\mathfrak{p}$ enthalten sein muss.

19. Ist $\mathfrak{a}$ relativ prim zu $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ durch $\mathfrak{c}$ theilbar, so ist $\mathfrak{b}$ durch $\mathfrak{c}$ theilbar. Nach Voraussetzung giebt es in $\mathfrak{a}$ eine Function α, welche der Congruenz genügt

$$\alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{c}}.$$

Ist nun β eine beliebige Function in $\mathfrak{b}$, so ist hiernach

$$\beta \equiv \alpha\beta \quad \text{und nach Vor.} \quad \equiv 0 \pmod{\mathfrak{c}},$$

folglich β in $\mathfrak{c}$ enthalten, also $\mathfrak{b}$ durch $\mathfrak{c}$ theilbar.

§ 9.

Gesetze der Theilbarkeit der Ideale.

Alle diese Sätze, die sich meist unmittelbar aus der Definition der Ideale ergaben, reichen nicht aus, um die vollständige Analogie zu beweisen, die zwischen den Gesetzen der Theilbarkeit der Ideale und denen der ganzen rationalen Functionen herrscht. Wir stützen uns bei diesem Beweis auf folgenden Satz:

1. ***Ist* $\mathfrak{a}$ *ein Ideal und* k *eine beliebige ganze rationale Function von* z*, so lässt sich in* $\mathfrak{a}$ *eine Function* α *so auswählen, dass* $(\mathfrak{a}, \mathfrak{o}\alpha)$ *mit* k *keinen Theiler gemeinschaftlich hat**).**

Ist nämlich

$$\mathfrak{a} = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n],$$
$$\mathfrak{o} = [\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n],$$

und α eine beliebige Function in $\mathfrak{a}$, so lassen sich die ganzen rationalen Functionen $x_{h,k}$ so bestimmen, dass

$$\alpha\omega_1 = x_{1,1}\alpha_1 + x_{2,1}\alpha_2 + \cdots + x_{n,1}\alpha_n,$$
$$\alpha\omega_2 = x_{1,2}\alpha_1 + x_{2,2}\alpha_2 + \cdots + x_{n,2}\alpha_n,$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$\alpha\omega_n = x_{1,n}\alpha_1 + x_{2,n}\alpha_2 + \cdots + x_{n,n}\alpha_n,$$

und es ist (§ 6, 4.)

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{o}\alpha) = \text{const.}\, \Sigma \pm x_{1,1} x_{2,2} \ldots x_{n,n}.$$

Ist nun $\Sigma \pm x_{1,1} x_{2,2} \ldots x_{n,n}$ durch einen Linearfactor $z-c$ von k theilbar, so lässt sich eine nicht durch $z-c$ theilbare Function ω in $\mathfrak{o}$ und eine Function α' in $\mathfrak{a}$ so bestimmen, dass

$$\alpha\omega = (z-c)\alpha' \text{**}).$$

Setzt man nun, indem man unter t eine unbestimmte Constante versteht:

$$t(z-c) - \omega = \omega',$$

so ist

$$N(\omega') = t^n(z-c)^n + a_1 t^{n-1}(z-c)^{n-1} + \cdots + a_{n-1} t(z-c) + a_n,$$

worin die von t unabhängigen Coefficienten $a_1, a_2, \ldots a_n$ ganze rationale Functionen von z sind. Es kann nun nicht zugleich a_1 durch $z-c$, a_2 durch $(z-c)^2, \ldots, a_n$ durch $(z-c)^n$ theilbar sein, weil sonst gegen die Voraussetzung $\frac{\omega}{z-c}$ eine ganze Function wäre (§ 2, 5., § 3, 4.). Daher lassen sich nicht

---

*) Die Möglichkeit, diesen Satz schon an dieser Stelle zu beweisen, unterscheidet wesentlich die Theorie der algebraischen Functionen von der der algebraischen Zahlen und gestattet bei ersterer eine nicht unerhebliche Vereinfachung im Vergleich mit letzterer.

**) Wenn nämlich die Determinante $\Sigma \pm x_{1,1} x_{2,2} \ldots x_{n,n}$ durch $z-c$ theilbar ist, d. h. für $z = c$ verschwindet, so kann man ein System von Constanten $c_1, c_2, \ldots c_n$, die nicht sämmtlich verschwinden, so bestimmen, dass die ganzen rationalen Functionen

$$c_1 x_{k,1} + c_2 x_{k,2} + \cdots + c_k x_{k,n} \qquad (k = 1, 2 \ldots n)$$

für $z = c$ verschwinden, also durch $z-c$ theilbar sind, und es ist dann

$$\omega = c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + \cdots + c_n\omega_n$$

zu setzen.

alle Glieder von $N(\omega')$ durch $(z-c)^n$ theilen, und wenn also $(z-c)^{n-r}$ die höchste Potenz von $z-c$ ist, durch welche dieselben theilbar sind, so ist $r > 0$ und

$$\frac{N(\omega')}{(z-c)^{n-r}} = t^n(z-c)^r + b_1 t^{n-1} + \cdots + b_{n-1} t + b_n = f(t),$$

worin die ganzen rationalen Functionen $b_1, b_2, \ldots b_n$ nicht alle für $z = c$ verschwinden. Es giebt daher nur eine endliche Anzahl von constanten Werthen t, für welche $f(t)$ durch $z-c$ theilbar ist. Ist $z-c'$ ein von $z-c$ verschiedener Linearfactor von k, so wird $f(t)$ auch nur für eine endliche Anzahl von Werthen t durch $z-c'$ theilbar. Daraus folgt, dass man über t so verfügen kann, dass $N(\omega')$ nicht durch $(z-c)^n$ und zugleich durch keinen andern Linearfactor von k theilbar wird*). Setzt man, wenn dies geschehen,

$$t\alpha - \alpha' = \alpha'',$$

welches ebenfalls eine Function in $\mathfrak{a}$ ist, so folgt

$$\alpha\omega' = (z-c)\alpha'',$$

$$N(\alpha'') = \frac{N(\alpha)N(\omega')}{(z-c)^n}$$

und mithin, da nach § 7, (4.)

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{o}\alpha) = \text{const.}\frac{N(\alpha)}{N(\mathfrak{a})}$$

ist:

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{o}\alpha'') = \text{const.}\frac{(\mathfrak{a}, \mathfrak{o}\alpha)N(\omega')}{(z-c)^n}.$$

Die Function $(\mathfrak{a}, \mathfrak{o}\alpha'')$ enthält daher den Factor $z-c$ mindestens einmal weniger als $(\mathfrak{a}, \mathfrak{o}\alpha)$, während sie zugleich keinen anderen Linearfactor von k öfter enthält als $(\mathfrak{a}, \mathfrak{o}\alpha)$. Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens ergiebt sich die Richtigkeit des ausgesprochenen Satzes.

2. Jedes Ideal $\mathfrak{a}$ kann als grösster gemeinschaftlicher Theiler zweier Hauptideale $\mathfrak{o}\mu$, $\mathfrak{o}\nu$ dargestellt werden, von denen das eine ganz beliebig, nur theilbar durch $\mathfrak{a}$, angenommen werden kann.

Beweis. Man wähle nach Belieben in $\mathfrak{a}$ eine von Null verschiedene Function ν, und eine zweite Function μ der Art, dass die beiden Functionen $(\mathfrak{a}, \mathfrak{o}\nu)$ und $(\mathfrak{a}, \mathfrak{o}\mu)$ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben (nach 1). Ist nun α eine beliebige Function in $\mathfrak{a}$, so ist nach § 6 $(\mathfrak{a}, \mathfrak{o}\mu)\alpha$ in $\mathfrak{o}\mu$, $(\mathfrak{a}, \mathfrak{o}\nu)\alpha$ in $\mathfrak{o}\nu$ enthalten, so dass es zwei Functionen ω, ω' in $\mathfrak{o}$ giebt, für welche

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{o}\mu)\alpha = \mu\omega, \quad (\mathfrak{a}, \mathfrak{o}\nu)\alpha = \nu\omega'.$$

---

*) Diese Schlüsse gelten in der analogen Frage der Zahlentheorie nicht mehr.

Wählt man daher, was nach der Voraussetzung über $(\mathfrak{a}, \mathfrak{o}\mu)$, $(\mathfrak{a}, \mathfrak{o}\nu)$ möglich ist, zwei ganze rationale Functionen g, h von z, welche der Bedingung genügen

$$g(\mathfrak{a}, \mathfrak{o}\mu) + h(\mathfrak{a}, \mathfrak{o}\nu) = 1,$$

so folgt

$$\alpha = g\mu\omega + h\nu\omega',$$

d. h. α ist theilbar durch den grössten gemeinschaftlichen Theiler von $\mathfrak{o}\mu$ und $\mathfrak{o}\nu$. Und da letzterer umgekehrt durch $\mathfrak{a}$ theilbar ist (weil $\mathfrak{o}\mu$ und $\mathfrak{o}\nu$ durch $\mathfrak{a}$ theilbar sind), so ist er gleich $\mathfrak{a}$, w. z. b. w.

3. Jedes Ideal $\mathfrak{a}$ kann durch Multiplication mit einem Ideal $\mathfrak{m}$ in ein Hauptideal $\mathfrak{o}\mu = \mathfrak{a}\mathfrak{m}$ verwandelt werden.

Beweis. Man wähle (nach 1.) in $\mathfrak{a}$ eine Function μ so, dass $(\mathfrak{a}, \mathfrak{o}\mu)$ keinen Theiler mit $N(\mathfrak{a})$ gemein hat, hierauf eine zweite Function ν so, dass $(\mathfrak{a}, \mathfrak{o}\nu)$ mit $(\mathfrak{a}, \mathfrak{o}\mu)$ keinen Theiler gemein hat. Dann ist (nach 2.) $\mathfrak{a}$ der grösste gemeinschaftliche Theiler von $\mathfrak{o}\mu$ und $\mathfrak{o}\nu$. Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von $\mathfrak{o}\mu$ und $\mathfrak{o}\nu$ ist (nach § 8, 13) von der Form $\mathfrak{m}\nu$, worin $\mathfrak{m}$ ein Theiler von $\mathfrak{o}\mu$ ist. Nach § 8, 14 ist alsdann

$$N(\mathfrak{m}) = \frac{N(\mathfrak{o}\mu)}{N(\mathfrak{a})} = (\mathfrak{a}, \mathfrak{o}\mu),$$

also, nach Voraussetzung, ohne gemeinschaftlichen Theiler mit $N(\mathfrak{a})$. Bestimmt man also wieder zwei ganze rationale Functionen g, h von z, so dass

$$gN(\mathfrak{m}) + hN(\mathfrak{a}) = 1,$$

so folgt aus § 8, 5, da $N(\mathfrak{m})$ in $\mathfrak{m}$, $N(\mathfrak{a})$ in $\mathfrak{a}$ enthalten ist, dass $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{a}$ relative Primideale sind, und daraus, nach § 8, 16.

$$N(\mathfrak{m}\mathfrak{a}) = N(\mathfrak{m})N(\mathfrak{a}) = N(\mathfrak{o}\mu).$$

Da nun $\mathfrak{o}\mu$ durch $\mathfrak{m}$ und durch $\mathfrak{a}$, also auch durch $\mathfrak{m}\mathfrak{a}$ theilbar ist (§ 8, 16.), so ist nach § 8, 9.

$$\mathfrak{m}\mathfrak{a} = \mathfrak{o}\mu,$$

w. z. b. w.*)

4. Ist ein Ideal $\mathfrak{c}$ theilbar durch ein Ideal $\mathfrak{a}$, so giebt es ein und *nur* ein Ideal $\mathfrak{b}$, welches der Bedingung

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$$

genügt, welches der *Quotient von* $\mathfrak{c}$ *durch* $\mathfrak{a}$ heisst.

---

*) Man kann das Ideal $\mathfrak{m}$ zugleich so wählen, dass es relativ prim zu einem beliebigen Ideal $\mathfrak{b}$ wird. Dies wird erreicht, wenn man die Function μ so annimmt, dass $(\mathfrak{a}, \mathfrak{o}\mu) = N(\mathfrak{m})$ keinen Theiler mit $N(\mathfrak{a})N(\mathfrak{b})$ gemein hat (§ 8, 8.).

Ist $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ theilbar durch $\mathfrak{a}\mathfrak{b}'$, so ist $\mathfrak{b}$ theilbar durch $\mathfrak{b}'$, und aus $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}'$ folgt $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}'$.

Beweis. Es sei $\mathfrak{c}$ theilbar durch $\mathfrak{a}$ und (nach 3.) $\mathfrak{a}\mathfrak{m} = \mathfrak{o}\mu$. Es ist alsdann auch $\mathfrak{c}\mathfrak{m}$ theilbar durch $\mathfrak{a}\mathfrak{m} = \mathfrak{o}\mu$ und folglich $\mathfrak{c}\mathfrak{m} = \mathfrak{b}\mu$ (§ 8, 10., 11.); also, durch Multiplication der letzten Gleichung mit $\mathfrak{a}$,

$$\mathfrak{c}\mu = \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mu$$

und nach § 8, 12.

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\mathfrak{b},$$

womit der erste Theil des Satzes bewiesen ist*).

Ist ferner $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ theilbar durch $\mathfrak{a}\mathfrak{b}'$, so ist (§ 8, 10.) $\mu\mathfrak{b}$ theilbar durch $\mu\mathfrak{b}'$, also $\mathfrak{b}$ durch $\mathfrak{b}'$. — Ist $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}'$, so folgt $\mu\mathfrak{b} = \mu\mathfrak{b}'$ und mithin $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}'$ (§ 8, 12.).

5. Jedes von $\mathfrak{o}$ verschiedene Ideal ist entweder ein Primideal, oder es lässt sich, und nur auf eine Weise, als Product von lauter Primidealen darstellen.

Beweis. Ist das Ideal $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{o}$ verschieden, so ist es (§ 8, 15.) durch ein Primideal $\mathfrak{p}_1$ theilbar, und folglich (nach 4.) $= \mathfrak{p}_1\mathfrak{a}_1$, worin $\mathfrak{a}_1$ ein *echter* Theiler von $\mathfrak{a}$ ist (denn aus $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}$ würde nach 4. folgen $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{o}$). Es ist also der Grad von $N(\mathfrak{a}_1)$ niedriger als der von $N(\mathfrak{a})$. Ist $\mathfrak{a}_1$ von $\mathfrak{o}$ verschieden, so schliesst man ebenso, dass $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{p}_2\mathfrak{a}_2$ sein muss, wobei der Grad von $N(\mathfrak{a}_2)$ wieder niedriger ist als der von $N(\mathfrak{a}_1)$. Fährt man auf diese Weise fort, so gelangt man schliesslich nach einer endlichen Anzahl von Zerlegungen zu einem Ideal $\mathfrak{a}_{r-1} = \mathfrak{p}_r\mathfrak{a}_r$ der Art, dass $N(\mathfrak{a}_r) = 1$, also $\mathfrak{a}_r = \mathfrak{o}$ ist. Es ist daher

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\ldots\mathfrak{p}_r.$$

Wäre eine solche Zerlegung auf eine zweite Art möglich, etwa

$$\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\ldots\mathfrak{p}_r = \mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2\ldots\mathfrak{q}_s,$$

so müsste (§ 8, 18.) von den Primidealen $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_r$ mindestens eines, etwa $\mathfrak{p}_1$ durch $\mathfrak{q}_1$ theilbar und also $= \mathfrak{q}_1$ sein, also nach 4.

$$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3\ldots\mathfrak{p}_r = \mathfrak{q}_2\mathfrak{q}_3\ldots\mathfrak{q}_s.$$

Hieraus schliesst man ebenso $\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{q}_2$ u. s. f.

Fasst man in der so gewonnenen Zerlegung die einander gleichen Primideale zu Potenzen zusammen, so kann man setzen

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{e_1}\mathfrak{p}_2^{e_2}\ldots\mathfrak{p}_r^{e_r}.$$

*) Diese Definition des Quotienten zweier Ideale stimmt mit der in § 4, 8. gegebenen völlig überein.

Irgend ein Theiler $\mathfrak{a}_1$ von $\mathfrak{a}$ kann dann durch kein von $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_r$ verschiedenes Primideal und durch keines öfter als $\mathfrak{a}$ theilbar sein. Man erhält also die sämmtlichen Divisoren von $\mathfrak{a}$, deren Anzahl endlich und $=(e_1+1)(e_2+1)\ldots(e_r+1)$ ist, wenn man in

$$\mathfrak{p}_1^{h_1}\mathfrak{p}_2^{h_2}\ldots\mathfrak{p}_r^{h_r}$$

die Exponenten h_i die Reihe der Zahlen 0, 1, 2, ... e_i durchlaufen lässt (wobei unter $\mathfrak{p}^0$ das Ideal $\mathfrak{o}$ zu verstehen ist). Sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ zwei Ideale

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{p}_1^{e_1}\mathfrak{p}_2^{e_2}\ldots\mathfrak{p}_r^{e_r};\quad \mathfrak{b}=\mathfrak{p}_1^{f_1}\mathfrak{p}_2^{f_2}\ldots\mathfrak{p}_r^{f_r}$$

(worin die Exponenten e, f auch zum Theil Null sein können), so erhält man den grössten gemeinschaftlichen Theiler und das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ in der Form

$$\mathfrak{p}_1^{g_1}\mathfrak{p}_2^{g_2}\ldots\mathfrak{p}_r^{g_r},$$

wenn man für $g_1, g_2, \ldots g_r$ für ersteren die kleinsten, für letzteres die grössten unter den Zahlen $e_1, f_1; e_2, f_2; \ldots e_r, f_r$ nimmt.

6. Sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ irgend zwei Ideale, so ist allgemein

$$N(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = N(\mathfrak{a})N(\mathfrak{b}).$$

Beweis. Es sei, wie in 5., $\mathfrak{a}=\mathfrak{p}_1\mathfrak{a}_1$, so giebt es, weil $\mathfrak{a}_1$ ein echter Theiler von $\mathfrak{a}$ ist, in $\mathfrak{a}_1$ eine durch $\mathfrak{a}$ nicht theilbare Function η. Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache und der grösste gemeinschaftliche Theiler von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{o}\eta$ sind bezw. $\mathfrak{p}_1\eta$ und $\mathfrak{a}_1$, wie sich (nach 5.) sofort aus der Zerlegung von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{o}\eta$ in ihre Primfactoren ergiebt. Hieraus folgt aber nach § 8, 14.

$$N(\mathfrak{a}) = N(\mathfrak{p}_1)N(\mathfrak{a}_1).$$

Durch Wiederholung desselben Schlusses für $\mathfrak{a}_1$ u. s. f. ergiebt sich, wenn $\mathfrak{a}=\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\ldots\mathfrak{p}_r$ ist:

$$N(\mathfrak{a}) = N(\mathfrak{p}_1)N(\mathfrak{p}_2)\ldots N(\mathfrak{p}_r)$$

und daraus

$$N(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = N(\mathfrak{a})N(\mathfrak{b}).$$

7. Jedes Primideal ist ein Ideal *ersten Grades* (§ 7) und umgekehrt, jedes Ideal ersten Grades ist ein Primideal*).

Beweis. Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal, so ist $N(\mathfrak{p})$ durch $\mathfrak{p}$ theilbar, und daher wenigstens einer der Linearfactoren von $N(\mathfrak{p})$, etwa $z-c$, durch $\mathfrak{p}$ theilbar

*) Durch diesen Satz unterscheidet sich die Theorie der algebraischen Functionen wesentlich von der analogen Theorie der algebraischen Zahlen.

(§ 8, 18.). Ist ω eine beliebige Function in $\mathfrak{o}$, welche der Gleichung genügt:

$$\omega^n + a_1\omega^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\omega + a_n = 0,$$

so erhält man daraus, indem man die ganzen rationalen Functionen a_1, a_2, ... a_n auf ihre constanten Reste $a_1^{(0)}$, $a_2^{(0)}$, ... $a_n^{(0)}$ nach $z-c$ reducirt, und die ganze Function

$$\omega^n + a_1^{(0)}\omega^{n-1} + \cdots + a_{n-1}^{(0)}\omega + a_n^{(0)}$$

in ihre Linearfactoren $(\omega - b_1)$, $(\omega - b_2)$, ... $(\omega - b_n)$ zerlegt:

$$(\omega - b_1)(\omega - b_2)\ldots(\omega - b_n) = (z-c)\omega' \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Es muss also wenigstens einer der Factoren $\omega - b_1$, $\omega - b_2$, ... durch $\mathfrak{p}$ theilbar sein, d. h. es ist

$$\omega \equiv b \pmod{\mathfrak{p}},$$

worin b eine Constante bedeutet. Da hiernach jede Function in $\mathfrak{o}$ congruent einer Constanten ist (mod. $\mathfrak{p}$), so ist nach § 6 $(\mathfrak{o}, \mathfrak{p}) = N(\mathfrak{p}) = z - c$ eine *lineare* Function von z, wodurch der erste Theil der Behauptung erwiesen ist.

Umgekehrt: ist $\mathfrak{q}$ ein Ideal ersten Grades, und

$$N(\mathfrak{q}) = z - c,$$

so ist $\mathfrak{q}$ gewiss durch ein Primideal $\mathfrak{p}$ theilbar, und da $N(\mathfrak{q})$ durch $N(\mathfrak{p})$ theilbar ist, so ist $N(\mathfrak{p}) = N(\mathfrak{q}) = z - c$, also (§ 8, 9.)

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{q}.$$

Es ergiebt sich hieraus, dass der Grad eines Ideals gleich ist der Anzahl der Primfactoren, in welche sich dasselbe zerlegen lässt. Ist daher

$$\mathfrak{o}(z-c) = \mathfrak{p}_1^{e_1}\mathfrak{p}_2^{e_2}\mathfrak{p}_3^{e_3}\ldots,$$

so ist

$$e_1 + e_2 + e_3 + \cdots = n.$$

Es folgt ferner noch, dass eine ganze *rationale* Function von z dann und nur dann durch ein Primideal $\mathfrak{p}$ theilbar ist, wenn sie durch die Norm von $\mathfrak{p}$ theilbar ist.

§ 10.

Die complementären Basen des Körpers Ω.

1. *Definition.* Bilden die Functionen α_1, α_2, ... α_n eine Basis von Ω, und setzt man zur Abkürzung

$$S(\alpha_r \alpha_s) = a_{r,s} = a_{s,r},$$

$$\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) = \Sigma \pm a_{1,1}a_{2,2}\ldots a_{n,n} = a \quad (§\ 2),$$

so lässt sich, da a von Null verschieden ist, ein ganz bestimmtes Functionensystem $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots \alpha'_n$ aus den linearen Gleichungen bestimmen

$$(1.) \qquad \alpha_r = \sum_{1,n}^{\iota} a_{r,\iota}\alpha'_\iota,$$

und da

$$\Delta(\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots \alpha'_n) = \frac{1}{a}$$

von Null verschieden ist, so bilden die Functionen $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots \alpha'_n$ ebenfalls eine Basis von Ω. Diese soll die zu $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ *complementäre Basis* heissen.

2. Bezeichnet man, wenn die Indices r, s der Zahlenreihe $1, 2, \ldots n$ angehören, mit (r, s) die Zahl 1 oder 0, je nachdem r, s gleich oder verschieden sind, so ist

$$(2.) \qquad S(\alpha_r\alpha'_s) = (r, s),$$

denn durch Auflösung der Gleichungen (1.) folgt

$$\alpha'_s = \sum^{\iota} a'_{\iota,s}\alpha_\iota;$$

$$a'_{r,s} = a'_{s,r}; \quad \sum^{\iota} a_{r,\iota}a'_{s,\iota} = (r, s),$$

hieraus:

$$\alpha_r\alpha'_s = \sum^{\iota} a'_{\iota,s}\alpha_\iota\alpha_r; \quad S(\alpha_r\alpha'_s) = \sum^{\iota} a'_{\iota,s}a_{\iota,r} = (r, s).$$

Genügt umgekehrt ein Functionensystem β_s den Bedingungen $S(\alpha_r\beta_s) = (r, s)$, so ist $\beta_s = \alpha'_s$; denn setzt man $\beta_s = \sum^{\iota} b_{\iota,s}\alpha'_\iota$, so folgt wegen (2.)

$$b_{r,s} = S(\beta_s\alpha_r) = (r, s).$$

Daraus folgt unmittelbar, dass die Beziehung der α_ι zu den α'_ι eine gegenseitige ist, d. h. dass die Basis $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ complementär ist zu $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots \alpha'_n$.

3. Ist η eine beliebige Function in Ω, so kann man stets setzen

$$\eta = \sum x_\iota\alpha_\iota = \sum x'_\iota\alpha'_\iota,$$

und durch Anwendung von (2.) folgt:

$$x_\iota = S(\eta\alpha'_\iota), \quad x' = S(\eta\alpha_\iota),$$

also:

$$(3.) \qquad \eta = \sum^{\iota} \alpha_\iota S(\eta\alpha'_\iota) = \sum^{\iota} \alpha'_\iota S(\eta\alpha_\iota).$$

4. Ist η eine beliebige von Null verschiedene Function in Ω, so ist

$$\frac{\alpha'_1}{\eta}, \frac{\alpha'_2}{\eta}, \ldots \frac{\alpha'_n}{\eta}$$

die zu $\eta\alpha_1, \eta\alpha_2, \ldots \eta\alpha_n$ complementäre Basis. Dies folgt aus 2. wegen

$$S\left(\eta\alpha_r \cdot \frac{\alpha'_s}{\eta}\right) = S(\alpha_r\alpha'_s) = (r, s).$$

5. Wenn zwei Basen von Ω, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ und $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ durch die n Gleichungen zusammenhängen

$$\beta_s = \sum^{\iota} x_{\iota,s} \alpha_\iota$$

mit rationalen Coefficienten $x_{\iota,s}$, so hängen die zu ihnen complementären Basen zusammen durch die n Gleichungen

$$\alpha'_r = \sum^{\iota} x_{r,\iota} \beta'_\iota$$

(transponirte Substitution). Es ist dies eine unmittelbare Folge aus 3. wegen

$$x_{r,s} = S(\alpha'_r \beta_s).$$

6. Es ist

$$\sum^{\iota} \alpha_\iota \alpha'_\iota = 1,$$

also:

$$\sum^{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'} \alpha'_\iota \alpha'_{\iota'} = \sum^{\iota,\iota'} a'_{\iota,\iota'} \alpha_\iota \alpha_{\iota'} = 1.$$

Setzt man nämlich zunächst

$$\Sigma \alpha_\iota \alpha_{\iota'} = \sigma,$$

so folgt aus 3. (auf die Functionen $\eta \alpha_r$ angewandt),

$$\eta \alpha_r = \sum^{\iota} \alpha_\iota S(\eta \alpha_r \alpha'_\iota),$$

mithin, nach der Definition der Spur in § 2, (5.)

$$S(\eta) = \sum^{\iota} S(\eta \alpha_\iota \alpha'_\iota) = S(\Sigma \eta \alpha_\iota \alpha'_\iota),$$

also:

$$S(\eta\sigma) = S(\eta),$$

und daraus, wenn man in 3. einmal $\eta = \sigma$, dann $\eta = 1$ setzt:

$$\sigma = \sum^{\iota} \alpha_\iota S(\sigma \alpha'_\iota) = \sum^{\iota} \alpha_\iota S(\alpha'_\iota) = 1.$$

Wir gehen etwas genauer ein auf die Bildung der complementären Basen in zwei besonderen Fällen:

7. Es sei $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ eine Basis von $\mathfrak{o}$ und $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ die complementäre Basis (von Ω). Es sei

$$e_{r,s} = e_{s,r} = S(\omega_r \omega_s),$$

welches *ganze* rationale Functionen sind, und

$$D = \text{const.} \Sigma \pm e_{1,1} e_{2,2} \ldots e_{n,n}$$

die Discriminante von Ω; es ist dann nach 2.

$$\varepsilon_r = \frac{1}{D} \sum^{\iota} \frac{\partial D}{\partial e_{\iota,r}} \omega_\iota,$$

woraus hervorgeht, dass die Functionen $D\varepsilon_r$ zu den *ganzen Functionen* gehören. Aus 6. folgt aber ferner

$$D = \sum^{\iota,\iota'} \frac{\partial D}{\partial e_{\iota,\iota'}} \omega_\iota \omega_{\iota'}$$

und hieraus

$$\begin{aligned} \varepsilon_r \varepsilon_s &= \frac{1}{D^2} \sum^{\iota,\iota'} \frac{\partial D}{\partial e_{r,\iota}} \frac{\partial D}{\partial e_{s,\iota'}} \omega_\iota \omega_{\iota'} \\ &= \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial e_{r,s}} + \frac{1}{D^2} \sum^{\iota,\iota'} \left(\frac{\partial D}{\partial e_{r,\iota}} \frac{\partial D}{\partial e_{s,\iota'}} - \frac{\partial D}{\partial e_{r,s}} \frac{\partial D}{\partial e_{\iota,\iota'}} \right) \omega_\iota \omega_{\iota'} \end{aligned}$$

und daraus nach einem bekannten Determinantensatz:

$$\varepsilon_r \varepsilon_s = \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial e_{r,s}} + \frac{1}{D} \sum^{\iota,\iota'} \frac{\partial^2 D}{\partial e_{r,\iota} \partial e_{s,\iota'}} \omega_\iota \omega_{\iota'},$$

woraus das wichtige Resultat folgt, dass auch die Functionen $D\varepsilon_r\varepsilon_s$ zu den *ganzen Functionen* gehören.

8. Es sei θ eine solche Function in Ω, dass $1, \theta, \theta^2, \ldots \theta^{n-1}$ eine Basis von Ω bilden, und es sei also

$$(4.) \qquad f(\theta) = \theta^n + a_1 \theta^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\theta + a_n = 0$$

mit rationalen Coefficienten a irreductibel. Es soll die complementäre Basis zu $1, \theta, \theta^2, \ldots \theta^{n-1}$ aufgesucht werden. Setzen wir, wenn t eine unbestimmte Constante bedeutet,

$$\frac{f(t)}{t-\theta} = \eta_0 + \eta_1 t + \eta_2 t^2 + \cdots + \eta_{n-1} t^{n-1},$$

also:

$$(5.) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \eta_0 &= a_{n-1} + a_{n-2}\theta + \cdots + a_1 \theta^{n-2} + \theta^{n-1}, \\ \eta_1 &= a_{n-2} + a_{n-3}\theta + \cdots + \theta^{n-2}, \\ \cdots & \cdots \\ \eta_{n-2} &= a_1 + \theta, \\ \eta_{n-1} &= 1, \end{array} \right.$$

so bilden die Functionen $\eta_0, \eta_1, \ldots \eta_{n-1}$ gleichfalls eine Basis von Ω, da die Determinante der Gleichungen (5.) $= (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}$, also von Null verschieden ist. Es lässt sich daher jede Function ζ in Ω in der Form darstellen

$$\zeta = y_0 \eta_0 + y_1 \eta_1 + \cdots + y_{n-1} \eta_{n-1}.$$

Die Reihe der rationalen Functionen $y_0, y_1, \ldots y_{n-1}$ setzen wir nun fort, indem wir die Functionen $y_n, y_{n+1}, \ldots$ durch die Recursion bestimmen

$$(6.) \qquad a_n y_r + a_{n-1} y_{r+1} + \cdots + a_2 y_{r+n-2} + a_1 y_{r+n-1} + y_{r+n} = 0.$$

Nun ist nach (5.)

$$(7.)\quad \begin{cases} \theta\eta_0 = \quad\; - a_n\eta_{n-1}, \\ \theta\eta_1 = \eta_0 - a_{n-1}\eta_{n-1}, \\ \theta\eta_2 = \eta_1 - a_{n-2}\eta_{n-1}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \theta\eta_{n-1} = \eta_{n-2} - a_1\eta_{n-1}, \end{cases}$$

also

$$\zeta\theta = y_1\eta_0 + y_2\eta_1 + \cdots + y_{n-1}\eta_{n-2} + y_n\eta_{n-1},$$

und ebenso allgemein für jedes ganze positive r:

$$\zeta\theta^r = y_r\eta_0 + y_{r+1}\eta_1 + \cdots + y_{r+n-2}\eta_{n-2} + y_{r+n-1}\eta_{n-1},$$

oder, wenn man $\eta_0, \eta_1, \ldots \eta_{n-1}$ durch $1, \theta, \theta^2, \ldots \theta^{n-1}$ ausdrückt:

$$\zeta\theta^r = x_0^{(r)} + x_1^{(r)}\theta + x_2^{(r)}\theta^2 + \cdots + x_{n-1}^{(r)}\theta^{n-1},$$

worin

$$\begin{aligned} x_0^{(r)} &= y_r a_{n-1} + y_{r+1}a_{n-2} + \cdots + y_{r+n-2}a_1 + y_{r+n-1}, \\ x_1^{(r)} &= y_r a_{n-2} + y_{r+1}a_{n-3} + \cdots + y_{r+n-2}, \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x_{n-2}^{(r)} &= y_r a_1 \;\; + y_{r+1}, \\ x_{n-1}^{(r)} &= y_r. \end{aligned}$$

Mithin ist (nach der Definition von S, § 2 (5.))

$$\begin{aligned} S(\zeta) &= x_0^{(0)} + x_1^{(1)} + x_2^{(2)} + \cdots + x_{n-1}^{(n-1)} \\ &= y_0 a_{n-1} + 2y_1 a_{n-2} + \cdots + (n-1)y_{n-2}a_1 + ny_{n-1}, \end{aligned}$$

also, auf $\zeta = \eta_r$ angewandt:

$$S(\eta_r) = (r+1)a_{n-1-r}; \quad S(\eta_{n-1-r}) = (n-r)a_r,$$

worin $a_0 = 1$ zu setzen ist.

Setzt man daher zur Abkürzung

$$S(\theta^r) = s_r,$$

so folgt, so lange $r \lesseqgtr n$, mittels (5.)

$$(8.)\quad (n-r)a_r = a_r s_0 + a_{r-1}s_1 + \cdots + a_1 s_{r-1} + s_r$$

und nach (4.) allgemein

$$(9.)\quad 0 = a_n s_r + a_{n-1}s_{r+1} + \cdots + a_1 s_{r+n-1} + s_{r+n}.$$

Aus diesen Formeln folgt aber ferner:

$$(10.)\quad \begin{cases} f'(\theta) = n\theta^{n-1} + (n-1)a_1\theta^{n-1} + \cdots + 2a_{n-2}\theta + a_{n-1} \\ \qquad\;\; = s_0\eta_0 + \; s_1\eta_1 + \cdots + s_{n-1}\eta_{n-1}, \\ \theta^r f'(\theta) = s_r\eta_0 + s_{r+1}\eta_1 + \cdots + s_{r+n-2}\eta_{n-2} + s_{r+n-1}\eta_{n-1}. \end{cases}$$

Beachtet man nun den Werth der Determinante des Gleichungssystems (5.), so folgt hieraus mit Rücksicht auf die Definition der Norm und der Discriminante in § 2 (4.) und (12.) die wichtige Formel

$$(11.)\quad Nf'(\theta) = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \begin{vmatrix} s_0, & s_1, & \dots & s_{n-1} \\ s_1, & s_2, & \dots & s_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{n-1}, & s_n, & \dots & s_{2n-2} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \Delta(1, \theta, \theta^2, \dots \theta^{n-1}).$$

Die Gleichungen (10.) ergeben aber auch mit Rücksicht auf die Definition 1. die zu $1,\ \theta,\ \theta^2,\ \dots\ \theta^{n-1}$ complementäre Basis:

$$\frac{\eta_0}{f'(\theta)},\ \frac{\eta_1}{f'(\theta)},\ \dots\ \frac{\eta_{n-1}}{f'(\theta)}.$$

9. Bedeutet $\mathfrak{a} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n]$ einen Modul, dessen Basis zugleich eine Basis von Ω ist, so erhält man aus der zu $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots\ \alpha_n$ complementären Basis von Ω, $\alpha'_1,\ \alpha'_2,\ \dots\ \alpha'_n$ einen anderen Modul $\mathfrak{a}' = [\alpha'_1, \alpha'_2, \dots \alpha'_n]$, welcher der zu $\mathfrak{a}$ *complementäre Modul* genannt wird. Derselbe ist, wie sich aus 5. in Verbindung mit § 4, 2. sofort ergiebt, von der Wahl der Basis von $\mathfrak{a}$ unabhängig.

10. Wir betrachten ins Besondere den zu $\mathfrak{o} = [\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n]$ complementären Modul $\mathfrak{e} = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_n]$. Setzen wir

$$\omega_r \omega_s = \sum^{\iota} e_{r,s}^{(\iota)} \omega_\iota,$$

so ist nach 3.

$$e_{r,s}^{(\iota)} = e_{s,r}^{(\iota)} = S(\omega_r \omega_s \varepsilon_\iota)$$

eine ganze rationale Function von $\mathfrak{z}$, und es folgt:

$$\omega_r \varepsilon_s = \sum^{\iota} e_{r,\iota}^{(s)} \varepsilon_\iota.$$

Hieraus ergiebt sich, dass der Modul $\mathfrak{o}\mathfrak{e}$ (§ 4, 7.) theilbar ist durch $\mathfrak{e}$; andererseits ist, weil $\mathfrak{o}$ die Function 1 enthält, $\mathfrak{e}$ theilbar durch $\mathfrak{o}\mathfrak{e}$, also

$$\mathfrak{o}\mathfrak{e} = \mathfrak{e},$$

d. h. der Modul $\mathfrak{e}$, der zwar nicht bloss ganze Functionen enthält, besitzt die charakteristische Eigenschaft II. § 7 der Ideale. Dasselbe gilt in Folge dessen auch von dem Modul $\mathfrak{e}^2$. Da die beiden Moduln $D\mathfrak{e}$, $D\mathfrak{e}^2$ nach 7. nur ganze Functionen enthalten, so sind dieselben Ideale, und aus 7. ergiebt sich noch

$$N(D\mathfrak{e}) = D^{n-1}.$$

11. Ist θ eine Function in $\mathfrak{o}$ von der Art, dass $1, \theta, \theta^2, \ldots \theta^{n-1}$ eine Basis von Ω bildet, so dass in der irreductibeln Gleichung

$$f(\theta) = \theta^n + a_1\theta^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\theta + a_n = 0$$

die Coefficienten *ganze* rationale Functionen von z sind, so kann man für $r = 0, 1, 2, \ldots n-1$ die ganzen rationalen Functionen $k_\iota^{(r)}$ so bestimmen, dass

$$\theta^r = \sum_{1,n}^{\iota} k_\iota^{(r)} \omega_\iota$$

wird. Wendet man hierauf den Satz 5. und 8. an, so folgt:

$$f'(\theta)\varepsilon_s = k_s^{(0)}\eta_0 + k_s^{(1)}\eta_1 + \cdots + k_s^{(n-1)}\eta_{n-1},$$

und hieraus ergiebt sich, dass der Modul

$$f'(\theta)\mathfrak{e} = \mathfrak{k}$$

nur *ganze* Functionen enthält. Aus 10. schliesst man, dass derselbe ein *Ideal* ist.

§ 11.

Das Verzweigungsideal.

1. ***Hülfssatz.*** Sind je zwei der Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots$ relativ prim, so existirt immer eine Function, welche in Bezug auf jedes von ihnen einer gegebenen Function in $\mathfrak{o}$ congruent ist.

Beweis. Man setze

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\cdots = \mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{b}\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{c}\mathfrak{c}_1 = \cdots;$$

der grösste gemeinschaftliche Theiler von $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{b}\mathfrak{c}\ldots$, $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a}\mathfrak{c}\ldots$, $\mathfrak{c}_1 = \mathfrak{a}\mathfrak{b}\ldots$ ist alsdann gleich $\mathfrak{o}$, da kein Primideal zugleich in $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \ldots$ aufgehen kann. Folglich kann man (§ 4, 5.) α_1 aus $\mathfrak{a}_1$, β_1 aus $\mathfrak{b}_1$, γ_1 aus $\mathfrak{c}_1$, ... so auswählen, dass

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \cdots = 1,$$

also:

$$\begin{array}{llll} \alpha_1 \equiv 1, & \beta_1 \equiv 0, & \gamma_1 \equiv 0, & \ldots \pmod{\mathfrak{a}}, \\ \alpha_1 \equiv 0, & \beta_1 \equiv 1, & \gamma_1 \equiv 0, & \ldots \pmod{\mathfrak{b}}, \\ \alpha_1 \equiv 0, & \beta_1 \equiv 0, & \gamma_1 \equiv 1, & \ldots \pmod{\mathfrak{c}}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Sind daher $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ gegebene Functionen in $\mathfrak{o}$, so genügt

$$\omega \equiv \lambda\alpha_1 + \mu\beta_1 + \nu\gamma_1 + \cdots \pmod{\mathfrak{m}}$$

den Bedingungen

$$\omega \equiv \lambda \pmod{\mathfrak{a}}, \quad \omega \equiv \mu \pmod{\mathfrak{b}}, \quad \omega \equiv \nu \pmod{\mathfrak{c}}, \quad \ldots$$

2. Es seien $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots$ die sämmtlichen von einander verschiedenen in einer beliebigen linearen Function $z-c$ aufgehenden Primideale und

$$\mathfrak{o}(z-c) = \mathfrak{p}^e \mathfrak{p}_1^{e_1} \mathfrak{p}_2^{e_2} \ldots, \quad e+e_1+e_2+\cdots = n \quad (\S\ 9,\ 7.).$$

Man wähle die Functionen $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ theilbar resp. durch $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots$, aber nicht durch $\mathfrak{p}^2, \mathfrak{p}_1^2, \mathfrak{p}_2^2, \ldots$ und lasse $b, b_1, b_2, \ldots$ beliebige, jedoch von einander verschiedene Constanten bedeuten. Nach 1. lässt sich dann eine Function ζ bestimmen, welche den Congruenzen genügt

$$\zeta \equiv b+\lambda \ (\text{mod.}\, \mathfrak{p}^2), \quad \zeta \equiv b_1+\lambda_1 \ (\text{mod.}\, \mathfrak{p}_1^2), \quad \zeta \equiv b_2+\lambda_2 \ (\text{mod.}\, \mathfrak{p}_2^2), \quad \ldots,$$

also

$$\zeta \equiv b \ (\text{mod.}\, \mathfrak{p}), \quad \zeta \equiv b_1 \ (\text{mod.}\, \mathfrak{p}_1), \quad \zeta \equiv b_2 \ (\text{mod.}\, \mathfrak{p}_2), \quad \ldots,$$

so dass, wenn a irgend eine Constante bedeutet, $\zeta - a$ höchstens durch eines der Primideale $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots$ und niemals durch eines ihrer Quadrate theilbar ist. Ist daher $\varphi(t) = \Pi(t-a)$ eine ganze Function der Variablen t mit constanten Coefficienten, so ist $\varphi(\zeta) = \Pi(\zeta - a)$ stets und nur dann durch $\mathfrak{p}^m$ theilbar, wenn $\varphi(t)$ algebraisch durch $(t-b)^m$ theilbar ist, und wenn $\mathfrak{p}^m$ die höchste in $\varphi(\zeta)$ aufgehende Potenz von $\mathfrak{p}$ ist, so ist folglich $\mathfrak{p}^{m-1}$ die höchste in $\varphi'(\zeta)$ aufgehende Potenz von $\mathfrak{p}$. Soll daher $\varphi(\zeta)$ durch $z-c$ theilbar sein, so muss $\varphi(t)$ durch die Function n^{ten} Grades

$$\psi(t) = (t-b)^e (t-b_1)^{e_1} (t-b_2)^{e_2} \ldots$$

theilbar sein. Mithin ist die Congruenz

$$x_0 + x_1\zeta + x_2\zeta^2 + \cdots + x_{n-1}\zeta^{n-1} \equiv 0 \quad (\text{mod.}\, z-c)$$

nur durch solche ganze rationale x zu befriedigen, die alle durch $z-c$ theilbar sind. Setzt man also, indem man mit $k_1^{(0)}, k_1^{(1)}, \ldots$ ganze rationale Functionen von z und mit $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ eine Basis von $\mathfrak{o}$ bezeichnet:

$$\begin{aligned}
1 &= k_1^{(0)}\omega_1 + k_2^{(0)}\omega_2 + \cdots + k_n^{(0)}\omega_n, \\
\zeta &= k_1^{(1)}\omega_1 + k_2^{(1)}\omega_2 + \cdots + k_n^{(1)}\omega_n, \\
\zeta^2 &= k_1^{(2)}\omega_1 + k_2^{(2)}\omega_2 + \cdots + k_n^{(2)}\omega_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\zeta^{n-1} &= k_1^{(n-1)}\omega_1 + k_2^{(n-1)}\omega_2 + \cdots + k_n^{(n-1)}\omega_n,
\end{aligned}$$

so kann die Determinante

$$k = \Sigma \pm k_1^{(0)} k_2^{(1)} \ldots k_n^{(n-1)}$$

weder identisch verschwinden, noch durch $z-c$ theilbar sein (vgl. die Note zu § 9, 1.).

Es folgt also, dass

$$N(t-\zeta) = f(t, z)$$

irreductibel ist. Da nun $f(\zeta, z) = 0$, also $f(\zeta, c)$ durch $z-c$ theilbar ist, so muss $f(t, c)$ durch $\psi(t)$ theilbar, also, da beide Functionen von gleichem Grade sind,

$$f(t, c) = \psi(t)$$

sein, woraus man noch für eine folgende Anwendung schliesst:

$$S(\zeta) \equiv eb + e_1 b_1 + e_2 b_2 + \cdots \pmod{z-c},$$

und, indem man dieselbe Betrachtung auf die Functionen $\zeta^2, \zeta^3, \ldots$ anwendet, was falls keine der Constanten b verschwindet, sicher gestattet ist:

$$S(\zeta^2) \equiv eb^2 + e_1 b_1^2 + e_2 b_2^2 + \cdots \pmod{z-c},$$
$$S(\zeta^3) \equiv eb^3 + e_1 b_1^3 + e_2 b_2^3 + \cdots \pmod{z-c}.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Es ist also $\mathfrak{p}^e$ die höchste in $f(\zeta, c)$, also $\mathfrak{p}^{e-1}$ die höchste in $f'(\zeta, c)$ aufgehende Potenz von $\mathfrak{p}$, und da

$$f'(\zeta, c) \equiv f'(\zeta, z) \pmod{\mathfrak{p}^e},$$

so ist $\mathfrak{p}^{e-1}$ auch die höchste in $f'(\zeta, z)$ aufgehende Potenz von $\mathfrak{p}$. Hieraus ergiebt sich

$$\mathfrak{o}f'(\zeta, z) = \mathfrak{m}\mathfrak{p}^{e-1}\mathfrak{p}_1^{e_1-1}\ldots,$$

worin $\mathfrak{m}$ und folglich auch $N(\mathfrak{m})$ relativ prim zu $z-c$ ist.

Ist nun D die Discriminante von Ω, so ist hiernach und nach § 10, (11.) und § 2, (13.) (von constanten Factoren abgesehen)

$$Nf'(\zeta, z) = \Delta(1, \zeta, \zeta^2, \ldots \zeta^{n-1}) = Dk^2 = (z-c)^{n-s} N(\mathfrak{m}),$$

wenn s die Anzahl der verschiedenen in $z-c$ aufgehenden Primideale $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots$ bedeutet; und da k und $N(\mathfrak{m})$ durch $z-c$ nicht theilbar sind, so ist $(z-c)^{n-s}$ die höchste in D aufgehende Potenz von $z-c$. Folglich:

$$(1.) \quad D = \Pi(z-c)^{n-s},$$

worin das Productzeichen Π sich auf alle solche linearen Ausdrücke $z-c$ bezieht, in denen weniger als n *verschiedene* Primfactoren aufgehen, die also durch die zweite oder eine höhere Potenz eines Primideals theilbar sind.

Es giebt also nur eine endliche Anzahl linearer Functionen $z-c$, die durch das Quadrat eines Primideals theilbar sind.

Wir setzen nun

$$(2.) \quad \mathfrak{z} = \Pi\mathfrak{p}^{e-1},$$

worin sich das Productzeichen Π auf alle diejenigen Primideale $\mathfrak{p}$ bezieht,

von denen eine höhere als die erste, nämlich die e^{te} Potenz in ihrer Norm aufgeht, und nennen dieses Ideal $\mathfrak{z}$ das *Verzweigungsideal.* Aus (1.) und (2.) folgt sofort

$$(3.)\qquad N(\mathfrak{z}) = D.$$

Da ferner $n-s \geqq e-1$, also $e(n-s)-2(e-1) \geqq (e-1)(e-2) \geqq 0$ ist, so ist D theilbar durch $\mathfrak{p}^{2(e-1)}$, also auch durch $\mathfrak{z}^2$, und man kann, wenn man mit $\mathfrak{d}$ gleichfalls ein Ideal bezeichnet, setzen:

$$(4.)\qquad \mathfrak{o}D = \mathfrak{d}\mathfrak{z}^2,\quad N(\mathfrak{d}) = D^{n-2}.$$

3. Ist eine Function ϱ in $\mathfrak{o}$ durch jedes in $z-c$ aufgehende Primideal theilbar, so ist $S(\varrho)$ durch $z-c$ theilbar.

Beweis. Es sei ζ dieselbe Function wie in 2., so dass man setzen kann:

$$x\varrho = x_0+x_1\zeta+x_2\zeta^2+\cdots+x_{n-1}\zeta^{n-1},$$

worin die Coefficienten $x, x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$ ganze rationale Functionen von z ohne gemeinsamen Theiler sind, von denen die erste durch $z-c$ nicht theilbar ist (vgl. 2.). Aus unserer Voraussetzung über die Function ϱ folgt, wenn die Constanten b dieselbe Bedeutung wie in 2. haben

$$\begin{aligned}
x_0+x_1b\ +x_2b^2+\cdots+x_{n-1}b^{n-1} &\equiv 0 \quad (\text{mod.}\, z-c),\\
x_0+x_1b_1+x_2b_1^2+\cdots+x_{n-1}b_1^{n-1} &\equiv 0 \quad (\text{mod.}\, z-c),\\
x_0+x_1b_2+x_2b_2^2+\cdots+x_{n-1}b_2^{n-1} &\equiv 0 \quad (\text{mod.}\, z-c),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &\cdots\cdots
\end{aligned}$$

und hieraus, indem man die Congruenzen mit $e, e_1, e_2, \ldots$ multiplicirt und addirt:

$$x_0n+x_1S(\zeta)+x_2S(\zeta^2)+\cdots+x_{n-1}S(\zeta^{n-1}) = xS(\varrho) \equiv 0 \quad (\text{mod.}\, z-c),$$

also, da x durch $z-c$ nicht theilbar ist,

$$S(\varrho) \equiv 0 \quad (\text{mod.}\, z-c)$$

w. z. b. w.

4. Es sei jetzt

$$r = (z-c)(z-c_1)(z-c_2)\ldots$$

das Product sämmtlicher von einander verschiedenen Linearfactoren von D und

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{p}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\ldots$$

das Product der sämmtlichen von einander verschiedenen in r aufgehenden Primideale. Ist wie oben $\mathfrak{z}$ das Verzweigungsideal, so ist

$$(5.)\qquad \mathfrak{r}\mathfrak{z} = \Pi\mathfrak{p}^e = \mathfrak{o}r$$

und mithin

$$N(\mathfrak{r}) = \frac{r^n}{D}.$$

Jede Function ϱ in $\mathfrak{r}$ hat nach 3. die Eigenschaft, dass $S(\varrho)$ durch r theilbar ist. Ist nun, wie in § 10

$$\mathfrak{e} = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_n]$$

der zu $\mathfrak{o}$ complementäre Modul, ϱ eine beliebige Function in $\mathfrak{r}$, so kann man setzen

$$\varrho = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n,$$

worin nach § 10, 3.

$$x_\iota = S(\varrho\,\omega_\iota),$$

also, da $\varrho\,\omega_\iota$ eine Function in $\mathfrak{r}$ ist, x_ι eine durch r theilbare ganze rationale Function von z. Hieraus folgt, dass das Ideal $\mathfrak{r}$ durch den Modul $r\mathfrak{e}$ theilbar ist. Es ist also auch das Ideal $D\mathfrak{r}$ theilbar durch das Ideal $rD\mathfrak{e}$. Zugleich ist

$$N(D\mathfrak{r}) = r^n D^{n-1}, \quad N(rD\mathfrak{e}) = r^n D^{n-1} \qquad (\S\ 10,\ 10.);$$

mithin nach § 8, 9.

$$D\mathfrak{r} = rD\mathfrak{e}$$

oder

$$(6.)\qquad \mathfrak{r} = r\mathfrak{e}.$$

Woraus mittelst der obigen Bemerkung über ϱ folgt, dass, wenn ε eine beliebige Function in $\mathfrak{e}$ bedeutet, $S(\varepsilon)$ eine *ganze* rationale Function von z ist. Aus der Formel (6.) folgt durch Multiplication mit $\mathfrak{z}$ nach (5.)

$$\mathfrak{r}\mathfrak{z} = r\mathfrak{e}\mathfrak{z} = \mathfrak{o}r$$

und folglich

$$(7.)\qquad \mathfrak{e}\mathfrak{z} = \mathfrak{o}.$$

Multiplicirt man die letzte Gleichung mit D, so ergiebt sich aus (4.)

$$\mathfrak{e}D\mathfrak{z} = \mathfrak{z}^2\mathfrak{d},$$

folglich

$$(8.)\qquad D\mathfrak{e} = \mathfrak{z}\mathfrak{d}$$

und durch Multiplication dieser Gleichung mit $\mathfrak{e}$ nach (7.)

$$(9.)\qquad D\mathfrak{e}^2 = \mathfrak{d}.$$

4. Ist θ eine ganze Function von z in Ω und $N(t-\theta) = f(t)$, so ist $f'(\theta)$ theilbar durch das Verzweigungsideal $\mathfrak{z}$.

Beweis. Ist $f(t)$ reductibel, so ist $f'(\theta) = 0$, also sicher theilbar durch $\mathfrak{z}$. Im anderen Fall ist nach § 10, 11.

$$\mathfrak{e}f'(\theta) = \mathfrak{k}$$

ein Ideal, folglich durch Multiplication mit $\mathfrak{z}$ nach (7.)

$$(10.)\quad \mathfrak{o}f'(\theta) = \mathfrak{k}\mathfrak{z}.$$

Zugleich folgt, wenn wir wie in § 10, 11.

$$\theta^r = \sum^{\iota} k_\iota^{(r)}\omega_\iota,$$
$$k = \Sigma \pm k_1^{(0)} k_2^{(1)} \dots k_n^{(n-1)}$$

setzen,

$$Nf'(\theta) = N(\mathfrak{k})N(\mathfrak{z}) = DN(\mathfrak{k})$$
$$= \text{const.}\, k^2 D \quad (\S\, 10,\ (11.) \text{ und } \S\, 2,\ (13.)),$$

also:

$$(11.)\quad N(\mathfrak{k}) = \text{const.}\, k^2$$

ein vollständiges Quadrat.

§ 12.

Die gebrochenen Functionen von z im Körper Ω.

1. Jede beliebige Function η in Ω lässt sich nach § 3, 3. auf unendlich viele Arten als Quotient zweier ganzen Functionen von z darstellen (der Nenner kann sogar eine ganze rationale Function von z sein). Es sei also

$$\eta = \frac{\nu}{\mu}$$

und μ, ν ganze Functionen von z (Functionen in $\mathfrak{o}$). Ist nun $\mathfrak{m}$ der grösste gemeinschaftliche Theiler der beiden Hauptideale $\mathfrak{o}\mu$, $\mathfrak{o}\nu$, also, wenn $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ relative Primideale sind,

$$(1.)\quad \mathfrak{o}\mu = \mathfrak{a}\mathfrak{m},\quad \mathfrak{o}\nu = \mathfrak{b}\mathfrak{m},$$

so folgt (§ 4, 6.)

$$(2.)\quad \mathfrak{a}\nu = \mathfrak{b}\mu \quad\text{oder}\quad \mathfrak{a}\eta = \mathfrak{b}.$$

Ist also α eine beliebige Function in $\mathfrak{a}$, so ist $\alpha\eta$ in $\mathfrak{b}$ enthalten, also jedenfalls eine ganze Function von z. Ist umgekehrt α eine ganze Function von z, welche die Eigenschaft hat, dass $\alpha\eta = \beta$ eine ganze Function ist, so folgt

$$\alpha\nu = \beta\mu,$$

also nach (1.)

$$\alpha\mathfrak{b} = \beta\mathfrak{a};$$

da nun $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ relativ prim sind, so muss α durch $\mathfrak{a}$, β durch $\mathfrak{b}$ theilbar sein, und daraus folgt:

Es ist $\mathfrak{a}$ der Inbegriff aller derjenigen ganzen Functionen α, welche die Eigenschaft haben, dass $\alpha\eta$ eine ganze Function ist, und der Inbegriff aller dieser ganzen Functionen $\alpha\eta$ ist das Ideal $\mathfrak{b}$; oder anders ausgedrückt: *Es ist* $\mathfrak{b}$ *das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von* $\mathfrak{o}\eta$ *und* $\mathfrak{o}$, *ebenso* $\mathfrak{a}$ *das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von* $\frac{\mathfrak{o}}{\eta}$ *und* $\mathfrak{o}$. Hiernach muss, wenn $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$ zwei der Bedingung

$$\mathfrak{a}'\eta = \mathfrak{b}'$$

genügende Ideale sind, $\mathfrak{a}'$ durch $\mathfrak{a}$ theilbar sein. Sei also

$$\mathfrak{a}' = \mathfrak{n}\mathfrak{a},$$

so folgt:

$$\mathfrak{b}' = \mathfrak{n}\mathfrak{a}\eta = \mathfrak{n}\mathfrak{b}.$$

Umgekehrt ist auch für ein beliebiges Ideal $\mathfrak{n}$

$$\mathfrak{n}\mathfrak{a}\eta = \mathfrak{n}\mathfrak{b}.$$

2. Es seien jetzt $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ zwei der Bedingung

$$\mathfrak{a}\eta = \mathfrak{b}$$

genügende Ideale, gleichviel ob relativ prim oder nicht. Der Quotient $\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}$ ist nach § 4, 8. der Inbegriff aller derjenigen Functionen γ, welche die Eigenschaft haben, dass $\mathfrak{a}\gamma$ durch $\mathfrak{b}$ theilbar ist. Zu diesen Functionen gehören gewiss alle Functionen von der Form $\omega\eta$, wenn ω eine beliebige Function in $\mathfrak{o}$ bedeutet. Aber auch umgekehrt ist jede Function γ von dieser Form; denn da $\mathfrak{a}\gamma$ durch $\mathfrak{b}$, also auch durch $\mathfrak{o}$ theilbar ist, so ist es ein Ideal (da es die Eigenschaften I., II. § 7 besitzt), also wenn $\mathfrak{c}$ gleichfalls ein Ideal ist:

$$\mathfrak{a}\gamma = \mathfrak{c}\mathfrak{b}$$

und durch Multiplication mit η

$$\mathfrak{b}\gamma = \mathfrak{c}\mathfrak{b}\eta.$$

Ist nun wie oben $\eta = \frac{\nu}{\mu}$, und, wenn ϱ, σ ganze Functionen sind, $\gamma = \frac{\varrho}{\sigma}$, so folgt hieraus

$$\mathfrak{b}\varrho\mu = \mathfrak{c}\mathfrak{b}\nu\sigma,$$

also:

$$\mathfrak{o}\varrho\mu = \mathfrak{c}\nu\sigma, \quad \mathfrak{o}\gamma = \mathfrak{c}\eta.$$

Beides zusammen liefert den Satz

$$(3.) \qquad \mathfrak{o}\eta = \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}.$$

Sind in dieser Darstellung $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}$ relativ prim, was nach 1. stets und nur auf eine Weise angenommen werden kann, so soll $\mathfrak{b}$ das ***Oberideal***, $\mathfrak{a}$ das ***Unterideal*** der Function η heissen.

3. Ist wieder allgemein

$$\mathfrak{a}\eta = \mathfrak{b}, \quad \text{also} \quad \mathfrak{o}\eta = \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}$$

und α eine beliebige Function in $\mathfrak{a}$, β eine zugehörige Function in $\mathfrak{b}$, so ist

$$\eta = \frac{\beta}{\alpha} \quad \text{und} \quad \mathfrak{a}\beta = \mathfrak{b}\,\alpha.$$

Hieraus folgt durch Bildung der Normen

$$N(\eta) \;=\; \text{const.}\frac{N(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{b})}\cdot$$

4. Sind η, η' zwei Functionen in Ω und ist wie in 1.

$$\mathfrak{a}\eta = \mathfrak{b}; \quad \mathfrak{a}'\eta' = \mathfrak{b}',$$

gleichviel ob $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$; $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$ relativ prim sind oder nicht, so folgt

$$\mathfrak{a}\mathfrak{a}'\eta\eta' \;=\; \mathfrak{b}\mathfrak{b}'.$$

Es folgen also aus

$$\mathfrak{o}\eta = \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}, \quad \mathfrak{o}\eta' = \frac{\mathfrak{b}'}{\mathfrak{a}'}$$

die Gleichungen

$$\mathfrak{o}\eta\eta' = \frac{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'}{\mathfrak{a}\mathfrak{a}'}, \quad \mathfrak{o}\frac{1}{\eta} = \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}, \quad \mathfrak{o}\frac{\eta}{\eta'} = \frac{\mathfrak{b}\mathfrak{a}'}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}'}\cdot$$

5. Ist $\mathfrak{a}\eta = \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}\eta' = \mathfrak{b}'$, so wird auch

$$\mathfrak{a}(\eta \pm \eta') \;=\; \mathfrak{b}''$$

ein Ideal sein, weil, wenn $\alpha\eta$, $\alpha\eta'$ ganze Functionen sind, stets auch $\alpha(\eta \pm \eta')$ eine solche ist. Ist also

$$\mathfrak{o}\eta = \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}, \quad \mathfrak{o}\eta' = \frac{\mathfrak{b}'}{\mathfrak{a}},$$

so folgt

$$\mathfrak{o}(\eta \pm \eta') \;=\; \frac{\mathfrak{b}''}{\mathfrak{a}};$$

haben die beiden Ideale $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$ einen gemeinsamen Theiler, so ist derselbe auch Theiler von $\mathfrak{b}''$.

6. Es sei jetzt ϱ eine Function in Ω, deren Oberideal durch ein beliebig gegebenes Primideal $\mathfrak{p}$, aber nicht durch $\mathfrak{p}^2$ theilbar ist (solche Func-

tionen existiren stets; dieselben können sogar ganze Functionen von s sein), also

$$\mathfrak{o}\varrho = \frac{\mathfrak{m}\mathfrak{p}}{\mathfrak{n}},$$

worin $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ durch $\mathfrak{p}$ nicht theilbare Ideale sind. Sei ferner η eine beliebige Function in Ω, deren Unterideal durch $\mathfrak{p}$ nicht theilbar ist, also

$$\mathfrak{o}\eta = \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}$$

und $\mathfrak{a}$ nicht theilbar durch $\mathfrak{p}$. Man wähle eine beliebige Function α in $\mathfrak{a}$, die nicht durch $\mathfrak{p}$ theilbar ist, und eine entsprechende Function β in $\mathfrak{b}$, so dass

$$\eta = \frac{\beta}{\alpha}$$

wird. Sei

$$\alpha \equiv \alpha_0, \quad \beta \equiv \beta_0 \pmod{\mathfrak{p}}, \quad c_0 = \frac{\beta_0}{\alpha_0},$$

worin α_0, β_0, c_0 Constanten sind, deren erste von Null verschieden ist. Nach 5. ist

$$\mathfrak{o}(\eta - c_0) = \mathfrak{o}\frac{\beta - c_0\alpha}{\alpha} = \frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}},$$

und aus

$$\mathfrak{a}(\beta - c_0\alpha) = \mathfrak{b}_1\alpha, \quad \beta - c_0\alpha \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$$

folgt, da α durch $\mathfrak{p}$ nicht theilbar ist, dass $\mathfrak{b}_1$ durch $\mathfrak{p}$ theilbar sein muss. Setzt man also

$$\eta - c_0 = \varrho\eta_1,$$

so ist auch das Unterideal von η_1 durch $\mathfrak{p}$ nicht theilbar. Auf diese Weise lässt sich eine ganz bestimmte Reihe von Constanten $c_0, c_1, \ldots c_{r-1}, \ldots$ der Art ermitteln, dass

$$\begin{aligned} \eta &= c_0 + \varrho\eta_1, \\ \eta_1 &= c_1 + \varrho\eta_2, \\ &\cdots\cdots \\ \eta_{r-1} &= c_{r-1} + \varrho\eta_r, \quad \ldots, \end{aligned}$$

worin die $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_r, \ldots$ Functionen bedeuten, deren Unterideale keine andern Primfactoren haben können als das Unterideal von η und das Oberideal von ϱ mit Ausschluss von $\mathfrak{p}$. Demnach ist für jedes ganze positive r

$$\eta = c_0 + c_1\varrho + \cdots + c_{r-1}\varrho^{r-1} + \eta_r\varrho^r.$$

Ist das Unterideal von ζ durch $\mathfrak{p}^s$, nicht durch $\mathfrak{p}^{s+1}$ theilbar, so kann man dieselbe Betrachtung auf die Function $\eta = \zeta\varrho^s$ anwenden und erhält

$$\zeta = c_0\varrho^{-s} + c_1\varrho^{-s+1} + \cdots + c_{r-1}\varrho^{-s+r} + \eta_r\varrho^{-s+r}.$$

§ 13.

Die rationalen Transformationen der Functionen des Körpers Ω.

Ist z_1 eine beliebige, nicht constante, Function des Körpers Ω (eine *Variable* in Ω), so besteht, wie in § 2 nachgewiesen, zwischen z_1 und z eine irreductible algebraische Gleichung, welche, von Nennern befreit, in Bezug auf z_1 vom Grade e, in Bezug auf z vom Grade e_1 sei. Es ist, wie eben dort gezeigt, e ein Divisor von n, $n = ef$. Es sei diese Gleichung

$$(1.)\qquad G(\overset{e}{z_1}, \overset{e_1}{z}) = 0.$$

Jede rationale Function ζ von z und z_1 lässt sich (§ 1) mit Hilfe dieser Gleichung auf die beiden Formen bringen

$$(2.)\qquad \begin{cases} \zeta = x_0 + x_1 z_1 + \cdots + x_{e-1} z_1^{e-1}, \\ \zeta = x_0^{(1)} + x_1^{(1)} z + \cdots + x_{e_1-1}^{(1)} z^{e_1-1} \end{cases}$$

und zwar nur auf eine Weise so, dass $x_0, x_1, \dots x_{e-1}$ rationale Functionen von z, $x_0^{(1)}, x_1^{(1)}, \dots x_{e_1-1}^{(1)}$ rationale Functionen von z_1 sind.

Ist nun θ eine solche Function, dass $1, \theta, \theta^2, \dots \theta^{n-1}$ eine Basis *) von Ω (in Bezug auf z) bilden, so bilden nach § 2 die n Functionen

$$(3.)\qquad \begin{cases} 1, & z_1, & z_1^2, & \dots & z_1^{e-1}, \\ \theta, & \theta z_1, & \theta z_1^2, & \dots & \theta z_1^{e-1}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \theta^{f-1}, & \theta^{f-1} z_1, & \theta^{f-1} z_1^2, & \dots & \theta^{f-1} z_1^{e-1} \end{cases}$$

gleichfalls eine solche Basis, und daraus ergiebt sich nach (2.), dass zwischen den $e_1 f = n_1$ Functionen

$$(4.)\qquad \begin{cases} 1, & z, & z^2, & \dots & z^{e_1-1}, \\ \theta, & \theta z, & \theta z^2, & \dots & \theta z^{e_1-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \theta^{f-1}, & \theta^{f-1} z, & \theta^{f-1} z^2, & \dots & \theta^{f-1} z^{e_1-1}, \end{cases}$$

die zur Abkürzung mit

$$\eta_1^{(1)}, \quad \eta_2^{(1)}, \quad \dots \quad \eta_{n_1}^{(1)}$$

bezeichnet sein mögen, eine Gleichung von der Form

$$x_1^{(1)} \eta_1^{(1)} + x_2^{(1)} \eta_2^{(1)} + \cdots + x_{n_1}^{(1)} \eta_{n_1}^{(1)} = 0$$

*) Man könnte statt der Basis $1, \theta, \dots \theta^{n-1}$ auch eine beliebige andere Basis von Ω dieser Betrachtung zu Grunde legen. Es genügt aber für unsern Zweck, wenn wir gerade diese wählen.

nur dann besteht, wenn die rationalen Functionen $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots x_{n_1}^{(1)}$ von z_1 sämmtlich verschwinden. Daraus folgt nach (2.), dass jede Function η in Ω, und zwar nur auf eine einzige Art, darstellbar ist in der Form:

$$\eta = x_1^{(1)}\eta_1^{(1)} + x_2^{(1)}\eta_2^{(1)} + \cdots + x_{n_1}^{(1)}\eta_{n_1}^{(1)},$$

worin die $x^{(1)}$ rationale Functionen von z_1 sind.

Jede solche Function η genügt einer algebraischen Gleichung vom Grade n_1, deren Coefficienten rational von z_1 abhängen, denn es ist

$$\begin{aligned}
\eta\eta_1^{(1)} &= x_{1,1}^{(1)}\eta_1^{(1)} + x_{1,2}^{(1)}\eta_2^{(1)} + \cdots + x_{1,n_1}^{(1)}\eta_{n_1}^{(1)},\\
\eta\eta_2^{(1)} &= x_{2,1}^{(1)}\eta_1^{(1)} + x_{2,2}^{(1)}\eta_2^{(1)} + \cdots + x_{2,n_1}^{(1)}\eta_{n_1}^{(1)},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\eta\eta_{n_1}^{(1)} &= x_{n_1,1}^{(1)}\eta_1^{(1)} + x_{n_1,2}^{(1)}\eta_2^{(1)} + \cdots + x_{n_1,n_1}^{(1)}\eta_{n_1}^{(1)},
\end{aligned}$$

und mithin

$$\begin{vmatrix}
x_{1,1}^{(1)} - \eta, & x_{1,2}^{(1)}, & \dots & x_{1,n_1}^{(1)}\\
x_{2,1}^{(1)}, & x_{2,2}^{(1)} - \eta, & \dots & x_{2,n_1}^{(1)}\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
x_{n_1,1}^{(1)}, & x_{n_1,2}^{(1)}, & \dots & x_{n_1,n_1}^{(1)} - \eta
\end{vmatrix} = 0.$$

Es lässt sich nun zeigen, dass man eine Function $\eta = \theta_1$ so auswählen kann, dass θ_1 nicht zugleich einer Gleichung niedrigeren Grades, deren Coefficienten rational von z_1 abhängen, genügt.

Wir stützen uns zum Beweis dieser Behauptung auf den folgenden Satz, dessen Beweis sich leicht durch den Schluss von $m-1$ auf m ergiebt. Ist

$$F(x_1, x_2, \dots x_m)$$

eine ganze rationale Function von $x_1, x_2, \dots x_m$, deren Coefficienten Functionen in Ω sind, die nicht alle verschwinden, so kann man für die $x_1, x_2, \dots x_m$ solche constanten oder rational von z_1 abhängigen Grössen setzen, dass F in eine nicht verschwindende Function in Ω übergeht. Ist also $F(x_1, x_2, \dots x_m)$ für *alle* solche $x_1, x_2, \dots x_m$ gleich Null, so folgt auch für beliebige constante oder rational von z_1 abhängige $dx_1, dx_2, \dots dx_m$

$$dF = F'(x_1)\,dx_1 + F'(x_2)\,dx_2 + \cdots + F'(x_m)\,dx_m = 0.$$

Ist nun

$$\theta_1 = x_1\eta_1^{(1)} + x_2\eta_2^{(1)} + \cdots + x_{n_1}\eta_{n_1}^{(1)}$$

und

$$(5.)\quad \begin{cases}
1 = x_{1,0}\,\eta_1^{(1)} + x_{2,0}\,\eta_2^{(1)} + \cdots + x_{n_1,0}\,\eta_{n_1}^{(1)},\\
\theta_1 = x_{1,1}\,\eta_1^{(1)} + x_{2,1}\,\eta_2^{(1)} + \cdots + x_{n_1,1}\,\eta_{n_1}^{(1)},\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\theta_1^m = x_{1,m}\eta_1^{(1)} + x_{2,m}\eta_2^{(1)} + \cdots + x_{n_1,m}\eta_{n_1}^{(1)},
\end{cases}$$

so sind die $x_{k,h}$ ganze rationale und homogene Functionen vom Grade h von $x_1, x_2, \ldots x_{n_1}$ und hängen ausserdem rational von z_1 ab.

Ist also

$$\varphi(\theta_1) = a_m \theta_1^m + a_{m-1}\theta_1^{m-1} + \cdots + a_1\theta_1 + a_0 = 0$$

die Gleichung niedrigsten Grades, welcher θ_1 genügt, deren Coefficienten rational von z_1 abhängen, so genügen die Functionen $a_0, a_1, \ldots a_m$ der Bedingung

$$a_0 x_{\iota,0} + a_1 x_{\iota,1} + \cdots + a_m x_{\iota,m} = 0, \qquad (\iota = 1, 2, \ldots n_1)$$

und zugleich ist $m \overline{\gtrless} n_1$. Da nun nicht alle aus den Coefficienten $x_{h,k}$ zu bildenden m-reihigen Determinanten verschwinden können, weil sonst θ_1 einer Gleichung von niedrigerem als dem m^{ten} Grade genügen würde, so folgt aus letzteren Gleichungen, dass man die $a_0, a_1, \ldots a_m$ als ganze homogene Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_{n_1}$ voraussetzen kann.

Wenn nun die Gleichung $\varphi(\theta_1) = 0$ für alle rational von z_1 abhängigen $x_1, x_2, \ldots x_{n_1}$ bestehen soll, so muss nach obigem Satze auch

$$d\varphi = \varphi'(\theta_1)\,d\theta_1 + da_m \theta_1^m + \cdots + da_1\theta_1 + da_0 = 0$$

sein, und wenn $m < n_1$ ist, so lassen sich die $dx_1, dx_2, \ldots dx_{n_1}$, ohne dass sie alle verschwinden, so bestimmen, dass

$$da_m : da_{m-1} : \ldots : da_1 : da_0 = a_m : a_{m-1} : \ldots : a_1 : a_0$$

und folglich

$$\varphi'(\theta_1)\,d\theta_1 = 0$$

ist. Da aber $\varphi'(\theta_1)$ vom Grade $m-1$ ist, so muss $d\theta_1 = 0$, also $dx_1 = 0$, $dx_2 = 0, \ldots dx_{n_1} = 0$ sein. Daher kann nur $m = n_1$ sein.

Ist also θ_1 so bestimmt, dass die Gleichung niedrigsten Grades

$$F_1(\overset{n_1}{\theta_1}, z_1) = 0$$

den Grad n_1 wirklich erreicht, so lassen sich alle Functionen in Ω, und zwar nur auf eine Weise in der Form darstellen

$$\eta = x_0^{(1)} + x_1^{(1)}\theta_1 + \cdots + x_{n_1-1}^{(1)}\theta_1^{n_1-1},$$

worin die Coefficienten $x_0^{(1)}, x_1^{(1)}, \ldots x_{n_1-1}^{(1)}$ rational von z_1 abhängen; denn man kann unter dieser Voraussetzung $\eta_1^{(1)}, \eta_2^{(1)}, \ldots \eta_{n_1}^{(1)}$ vermittelst der Gleichungen (5.) in der angegebenen Weise darstellen.

Es lassen sich also sowohl z_1, θ_1 rational durch z, θ, als auch umgekehrt z, θ rational durch z_1, θ_1 darstellen.

Die Variable z, die wir bisher als die unabhängige bezeichnet haben, kann daher jede beliebige (nicht constante) Function des Körpers Ω sein.

Während aber die Gesammtheit aller Functionen des Körpers Ω gänzlich ungeändert bleibt, sind die Begriffe: ***Basis, Norm, Spur, Discriminante, ganze Function, Modul, Ideal,*** wesentlich abhängig von der Wahl der ***unabhängigen*** Veränderlichen z.

In dem besonderen Falle nur, wenn zwei Variable z, z_1 linear von einander abhängen, ist eine Basis von Ω in Bezug auf z zugleich eine solche in Bezug auf z_1; ebenso sind Normen, Spuren und Discriminanten in diesem Fall für z und z_1 identisch.

Sind α, β irgend zwei Functionen in Ω, so bestehen zwischen denselben Gleichungen, deren linker Theil eine ganze rationale Function von α und β ist.

Unter diesen ist eine (nach § 1)

$$F(\alpha, \beta) = 0,$$

welche sowohl in Bezug auf α als in Bezug auf β von möglichst niedrigem Grade ist, und diese soll die ***zwischen α und β bestehende irreductible Gleichung*** heissen. Diese ist, von einem constanten Factor abgesehen, völlig bestimmt.

II. Abtheilung.

§ 14.

Die Punkte der *Riemann*schen Fläche.

Die bisherigen Betrachtungen über die Functionen des Körpers Ω waren rein formaler Natur. Alle Resultate waren rationale, d. h. nach den Regeln der Buchstabenrechnung mittelst der vier Species abgeleitete Folgerungen aus der zwischen zwei Functionen in Ω bestehenden irreductibeln Gleichung. Die numerischen Werthe dieser Functionen kamen nirgends in Betracht. Man würde sogar, ohne andere Principien anzuwenden, die formelle Behandlung noch wesentlich weiter treiben können, indem man zwei Functionen des Körpers Ω nicht als durch eine Gleichung verbunden, sondern als unabhängige Veränderliche auffasst, wobei dann alles auf algebraische Theilbarkeit von rationalen Functionen zweier Veränderlichen hinausläuft. Wir haben auch diesen Weg durchgeführt, der jedoch in Darstellung und Ausdrucksweise sehr schwerfällig ist und bezüglich der Strenge

nichts mehr leistet als der im Vorhergehenden benutzte Gang. Nachdem nun aber der formale Theil der Untersuchung so weit geführt ist, drängt sich die Frage auf, ***in welchem Umfange es möglich ist, den Functionen in Ω solche bestimmten Zahlenwerthe beizulegen, dass alle zwischen diesen Functionen bestehenden rationalen Relationen (Identitäten) in richtige Zahlengleichungen übergehen.*** Es erweist sich bei dieser Untersuchung als zweckmässig, auch das Unendlichgrosse als *eine* bestimmte Zahl ∞ (Constante) zu betrachten, mit welcher nach bestimmten Regeln gerechnet wird*). Die mittelst der rationalen Operationen in dem so erweiterten Zahlengebiet ausgeführten Rechnungen führen stets zu einem ganz bestimmten Zahlenresultat, wenn nicht im Verlaufe der Rechnung eines der Zeichen $\infty \pm \infty$, $0.\infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ auftritt, Zeichen, welchen kein bestimmter Werth zukommt. Das Auftreten einer solchen Unbestimmtheit in einer Gleichung ist nicht als ein Widerspruch aufzufassen, da in diesem Fall die Gleichung gar keine bestimmte Behauptung mehr enthält, also von der Wahrheit oder Unwahrheit derselben auch keine Rede sein kann. Unter den Functionen des Körpers Ω finden sich ausser unendlich vielen Veränderlichen auch sämmtliche Constanten, d. h. Zahlen. Hiernach gelangt man durch die oben gestellte Forderung zu folgendem Begriff.

1. ***Definition.*** Wenn ***alle*** Individuen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ des Körpers Ω durch ***bestimmte*** Zahlwerthe $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \ldots$ so ersetzt werden, dass

$$\text{(I.)}\quad \alpha_0 = \alpha, \quad \text{falls } \alpha \text{ constant ist, und allgemein}$$

$$\text{(II.)}\quad (\alpha+\beta)_0 = \alpha_0+\beta_0, \qquad \text{(IV.)}\quad (\alpha\beta)_0 = \alpha_0\beta_0,$$

$$\text{(III.)}\quad (\alpha-\beta)_0 = \alpha_0-\beta_0, \qquad \text{(V.)}\quad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_0 = \frac{\alpha_0}{\beta_0}$$

wird, so soll einem solchen Zusammentreffen bestimmter Werthe ein ***Punkt*** $\mathfrak{P}$ zugeordnet werden (den man sich zur Versinnlichung irgend wie im Raume gelegen vorstellen mag**)), und wir sagen, ***in*** $\mathfrak{P}$ sei $\alpha = \alpha_0$, oder α habe ***in*** $\mathfrak{P}$ den Werth α_0. Zwei Punkte heissen stets und nur dann ver-

*) Das Unendliche als einen bestimmten Werth zu betrachten ist in der Functionentheorie vielfach üblich und nützlich. Es spricht sich dies bei *Riemann* z. B. darin aus, dass er seine die algebraischen Functionen darstellenden Flächen als geschlossen betrachtet.

**) Eine geometrische Versinnlichung des „Punktes" ist übrigens keineswegs nothwendig, und trägt zu einer leichteren Auffassung nicht einmal viel bei. Es genügt, das Wort „Punkt" als einen kurzen und bequemen Ausdruck für die beschriebene Werth-Coexistenz zu betrachten.

schieden, wenn eine Function α in Ω existirt, die in beiden Punkten verschiedene Werthe hat.

Aus dieser Definition des Punktes soll nun die Existenz desselben, sowie der Umfang des Begriffes deducirt werden. Zunächst ist aber hervorzuheben, dass nach dieser Definition der „Punkt" ein zum Körper Ω gehöriger *invarianter* Begriff ist, der in keiner Weise abhängt von der Wahl der unabhängigen Veränderlichen, durch welche man die Functionen des Körpers darstellt.

2. ***Satz.*** Ist ein Punkt $\mathfrak{P}$ gegeben, und z eine in $\mathfrak{P}$ endliche Variable in Ω (eine solche existirt für jeden Punkt; denn ist $z_0 = \infty$, so ist $\left(\frac{1}{z}\right)_0 = 0$, also endlich), so hat auch jede ganze Function ω von z in $\mathfrak{P}$ einen endlichen Werth ω_0 — denn zwischen ω und z besteht eine Relation von der Form

$$1 = a\frac{1}{\omega} + b\frac{1}{\omega^2} + \cdots + k\frac{1}{\omega^m},$$

worin $a, b, \ldots k$ als *ganze rationale* Functionen von z nach (II.), (III.), (IV.) in $\mathfrak{P}$ endliche Werthe haben. Mithin kann $\left(\frac{1}{\omega}\right)_0$ nicht gleich 0, also ω_0 nicht gleich ∞ sein.

3. ***Satz.*** Ist z irgend eine in $\mathfrak{P}$ endliche Variable, so ist der Inbegriff $\mathfrak{p}$ aller derjenigen ganzen Functionen π von z, welche in $\mathfrak{P}$ verschwinden, ein Primideal in z; wir sagen, der Punkt $\mathfrak{P}$ *erzeuge* dies Primideal $\mathfrak{p}$. Ist ω eine ganze Function von z, welche in $\mathfrak{P}$ den Werth ω_0 hat, so ist $\omega \equiv \omega_0 \pmod{\mathfrak{p}}$.

Beweis. Ist $\pi'_0 = 0$, $\pi''_0 = 0$, so ist auch $(\pi'+\pi'')_0 = \pi'_0+\pi''_0 = 0$, und wenn ω eine beliebige ganze Function von z, also ω_0 endlich ist, so folgt aus $\pi_0 = 0$ auch $(\omega\pi)_0 = \omega_0\pi_0 = 0$; also ist $\mathfrak{p}$ ein *Ideal* in z (§ 7, I., II.). Das Ideal $\mathfrak{p}$ ist von $\mathfrak{o}$ verschieden, da es die Function „1" nicht enthält.

Hat ω in $\mathfrak{P}$ den Werth ω_0, so ist $(\omega-\omega_0)_0 = 0$, folglich $\omega \equiv \omega_0 \pmod{\mathfrak{p}}$, also jede ganze Function von z einer Constanten congruent nach dem Modul $\mathfrak{p}$. Daher ist (§ 9, 7.) $\mathfrak{p}$ ein ***Primideal.***

4. ***Satz.*** Dasselbe Primideal $\mathfrak{p}$ kann nicht durch zwei verschiedene Punkte erzeugt werden.

Denn zunächst ist der Werth einer jeden ganzen Function ω in einem das Ideal $\mathfrak{p}$ erzeugenden Punkt $\mathfrak{P}$ durch die Congruenz $\omega \equiv \omega_0 \pmod{\mathfrak{p}}$ vollkommen bestimmt. Ist aber η eine beliebige Function in Ω, so lassen

sich nach § 12, 1. zwei ganze Functionen α, β, die nicht beide durch $\mathfrak{p}$ theilbar sind, so bestimmen, dass

$$\eta = \frac{\alpha}{\beta}$$

wird. Da nun die endlichen Werthe α_0, β_0 nicht beide verschwinden, so folgt aus (V.)

$$\eta_0 = \frac{\alpha_0}{\beta_0},$$

also ebenfalls durch $\mathfrak{p}$ vollkommen bestimmt.

Es ergiebt sich hieraus noch, dass zwei Punkte, in denen eine Variable z endliche Werthe hat, dann und nur dann von einander verschieden sind, wenn eine *ganze* Function von z existirt, welche in beiden verschiedene Werthe hat.

5. ***Satz.*** Ist z irgend eine Variable in Ω und $\mathfrak{p}$ ein Primideal in z, so giebt es *einen* (und nach 4. auch *nur* einen) Punkt $\mathfrak{P}$, welcher dies Primideal erzeugt, und welcher der *Nullpunkt* des Ideals $\mathfrak{p}$ genannt werden soll.

Beweis. Es sei η eine beliebige Function in Ω, und ϱ eine solche, deren Oberideal durch $\mathfrak{p}$ aber nicht durch $\mathfrak{p}^2$ theilbar ist. Es lassen sich dann nach § 12, 6. stets und nur auf eine Weise eine ganze Zahl m, eine von Null verschiedene endliche Constante c und eine Function η_1, deren Unterideal nicht durch $\mathfrak{p}$ theilbar ist, so bestimmen, dass

$$\eta = c\varrho^m + \eta_1\varrho^{m+1}.$$

Wir setzen

$$\eta_0 = 0, \quad c, \quad \infty,$$

je nachdem m positiv, Null oder negativ ist. Dieser Werthbestimmung der Functionen des Körpers Ω entspricht ein Punkt $\mathfrak{P}$, da die Bedingungen (I.) bis (V.), wie man sofort übersieht, erfüllt sind*).

---

*) Ist $\eta' = c'\varrho^{m'} + \eta'_1\varrho^{m'+1}$, so ist z. B.

$$\frac{\eta}{\eta'} = \varrho^{m-m'}\left(\frac{c}{c'} + \varrho\eta''_1\right),$$

worin

$$\eta''_1 = \frac{c'\eta_1 - c\eta'_1}{c'(c' + \varrho\eta'_1)}$$

eine Function von derselben Beschaffenheit ist wie η_1 (noch einfacher ist der Beweis in den übrigen Fällen).

Jede Function, deren Oberideal durch $\mathfrak{p}$ theilbar ist, also ins Besondere jede Function in $\mathfrak{p}$ erhält nach dieser Festsetzung in $\mathfrak{P}$ den Werth Null, d. h. der so bestimmte Punkt $\mathfrak{P}$ erzeugt das Primideal $\mathfrak{p}$.

Jede Function, deren Unterideal durch $\mathfrak{p}$ theilbar ist, und nur eine solche hat in $\mathfrak{P}$ den Werth ∞, und daraus geht hervor, dass eine *ganze* Function von z in keinem Punkt, in welchem z einen endlichen Werth hat, unendlich ist, und, da eine gebrochene Function von z im Unterideal gewiss ein Primideal enthält, also mindestens in einem Punkt, in welchem z endlich ist, unendlich sein muss, so ist auch umgekehrt jede Function, die in keinem Punkt, in welchem z einen endlichen Werth hat, unendlich ist, eine ganze Function von z.

6. Aus 3., 4., 5. ergiebt sich nun das folgende Resultat. Um alle existirenden Punkte $\mathfrak{P}$ und jeden nur ein einziges mal zu erhalten, ergreife man eine beliebige Variable z des Körpers Ω; man bilde alle Primideale $\mathfrak{p}$ in z und construire für jedes derselben den Nullpunkt, so sind alle diejenigen Punkte $\mathfrak{P}$ gefunden, in denen z endlich bleibt; ist $\mathfrak{P}'$ ein von diesen verschiedener Punkt, so hat in ihm $z' = \frac{1}{z}$ den endlichen Werth Null; umgekehrt ist jeder Punkt $\mathfrak{P}'$, in dem z' den Werth Null hat, von den Punkten $\mathfrak{P}$ verschieden. Das durch einen solchen Punkt $\mathfrak{P}'$ erzeugte Primideal $\mathfrak{p}'$ in z' (welches aus allen in $\mathfrak{P}'$ verschwindenden ganzen Functionen von z' besteht) geht in z' auf, und umgekehrt ist der Nullpunkt eines jeden in z' aufgehenden Primideals $\mathfrak{p}'$ in z' ein Punkt $\mathfrak{P}'$, in welchem $z' = 0$ also $z = \infty$ ist. Mit diesen in endlicher Anzahl vorhandenen, den verschiedenen $\mathfrak{p}'$ entsprechenden Ergänzungspunkten und den vorher aus den Primidealen $\mathfrak{p}$ in z abgeleiteten ist die Gesammtheit aller Punkte $\mathfrak{P}$ erschöpft, deren Inbegriff die *Riemann*sche *Fläche T* bildet.

§ 15.

Die Ordnungszahlen.

1. *Definition.* Ist $\mathfrak{P}$ ein bestimmter Punkt, so betrachten wir die sämmtlichen in $\mathfrak{P}$ verschwindenden Functionen π in Ω, und ertheilen jeder derselben eine bestimmte *Ordnungszahl* nach folgendem Gesichtspunkt.

Eine solche Function ϱ hat die Ordnungszahl 1, oder heisst *unendlich klein in der ersten Ordnung* oder 0^1 in $\mathfrak{P}$, wenn *alle* Quotienten $\frac{\pi}{\varrho}$ in $\mathfrak{P}$ endlich bleiben. Ist ϱ' eine ebensolche Function wie ϱ, so ist $\frac{\varrho'}{\varrho}$ in $\mathfrak{P}$

weder 0 noch ∞, und umgekehrt, ist $\frac{\varrho'}{\varrho}$ in $\mathfrak{P}$ weder 0 noch ∞, so ist ϱ' gleichfalls unendlich klein von der ersten Ordnung. Giebt es ferner für irgend eine Function π einen ganzen positiven Exponenten r, so dass $\frac{\pi}{\varrho^r}$ in $\mathfrak{P}$ weder 0 noch ∞ wird, so gilt dasselbe von $\frac{\pi}{\varrho'^r}$, und π erhält die Ordnungszahl r oder heisst unendlich klein in der Ordnung r im Punkte $\mathfrak{P}$. Wir werden auch sagen, π ist 0^r in $\mathfrak{P}$ oder π ist 0 in $\mathfrak{P}^r$.

Um die Frage nach der Existenz solcher Functionen ϱ und solcher Ordnungszahlen r zu entscheiden, ergreife man eine beliebige in $\mathfrak{P}$ endliche Variable z, bezeichne mit $\mathfrak{p}$ das durch $\mathfrak{P}$ erzeugte Primideal in z, und stelle jede Function π (mit Ausnahme der ordnungslosen Constanten 0) nach § 12 als Quotienten von zwei relativen Primidealen in z dar. Das Oberideal jeder dieser Functionen ist dann durch $\mathfrak{p}$ theilbar, und es giebt darunter auch solche, deren Oberideal nicht durch $\mathfrak{p}^2$ theilbar ist; diese haben die Ordnungszahl 1; für die übrigen Functionen π ist die Ordnungszahl der Exponent der höchsten im Oberideal aufgehenden Potenz von $\mathfrak{p}$, was sich aus den Sätzen des § 12 ohne Weiteres ergiebt.

2. Hat eine Function η den endlichen Werth η_0 in $\mathfrak{P}$, so sagen wir, η habe diesen Werth r-mal in $\mathfrak{P}$ oder in r mit $\mathfrak{P}$ zusammenfallenden Punkten, oder in $\mathfrak{P}^r$, wenn die Function $\eta-\eta_0$ in $\mathfrak{P}$ unendlich klein in der Ordnung r ist. Ist aber $\eta_0=\infty$, so sagen wir, η habe den Werth ∞ r-mal in $\mathfrak{P}$ oder in r mit $\mathfrak{P}$ zusammenfallenden Punkten, oder η sei ∞^r in $\mathfrak{P}$ oder ∞ in $\mathfrak{P}^r$, wenn $\frac{1}{\eta}$ in $\mathfrak{P}^r$ verschwindet.

3. Wird eine Function η in $\mathfrak{P}$ ∞^r, so legen wir derselben auch die Ordnungszahl $-r$ bei, wenn aber η in $\mathfrak{P}$ weder 0 noch ∞ wird, so habe sie die Ordnungszahl 0. Hiernach kommt in einem beliebigen Punkt $\mathfrak{P}$ jeder Function des Körpers Ω eine ganz bestimmte ***Ordnungszahl*** zu, mit Ausnahme der beiden Constanten 0 und ∞.

4. Ist ϱ eine Function, welche in einem beliebigen Punkt $\mathfrak{P}$ die Ordnungszahl 1 besitzt, und η eine Function mit der (positiven, negativen oder verschwindenden) Ordnungszahl m, so lässt sich nach dem Schlusssatz des § 12 für jedes beliebige positive r eine Reihe von Constanten c_0, $c_1, \ldots c_{r-1}$, deren erste ***nicht*** verschwindet, und eine in $\mathfrak{P}$ endliche Function σ so bestimmen, dass

$$\eta = c_0\varrho^m + c_1\varrho^{m+1} + \cdots + c_{r-1}\varrho^{m+r-1} + \sigma\varrho^{m+r}$$

wird.

5. Hieraus ergiebt sich unmittelbar, dass die Ordnungszahl eines Productes zweier oder mehrerer Functionen gleich ist der Summe der Ordnungszahlen der einzelnen Factoren.

Die Ordnungszahl eines Quotienten zweier Functionen ist gleich der Differenz der Ordnungszahlen des Zählers und Nenners.

Ist $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_s$ eine Reihe von Functionen und m die algebraisch kleinste unter ihren Ordnungszahlen, so ist

$$\begin{aligned} \eta_1 &= e_1\varrho^m + \sigma_1\varrho^{m+1}, \\ \eta_2 &= e_2\varrho^m + \sigma_2\varrho^{m+1}, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \eta_s &= e_s\varrho^m + \sigma_s\varrho^{m+1}, \end{aligned}$$

worin die Constanten $e_1, e_2, \dots e_s$ jedenfalls nicht alle verschwinden. Sind daher $c_1, c_2, \dots c_s$ Constanten, so ist die Ordnungszahl von

$$\eta = c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \cdots + c_s\eta_s,$$

falls $c_1e_1 + c_2e_2 + \cdots + c_se_s$ von Null verschieden ist, ebenfalls m, sonst grösser als m.

6. Complexe von Punkten, welche denselben Punkt auch mehrmals enthalten können, nennen wir *Polygone* und bezeichnen dieselben mit $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \dots$

Es bedeute ferner $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ das aus den Punkten von $\mathfrak{A}$ und von $\mathfrak{B}$ zusammengesetzte Polygon, in der Weise, dass, wenn ein Punkt $\mathfrak{P}$ r-mal in $\mathfrak{A}$, s-mal in $\mathfrak{B}$ auftritt, er $(r+s)$-mal in $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ vorkommt. Daraus ergiebt sich die Bedeutung von $\mathfrak{P}^r$ und von $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}^r\mathfrak{P}_1^{r_1}\mathfrak{P}_2^{r_2}\dots$, und die Gesetze der Theilbarkeit der Polygone in vollkommener Uebereinstimmung mit denen der Theilbarkeit der ganzen Zahlen und der Ideale. Die Rolle der Primfactoren übernehmen dabei die Punkte; um aber auch die Einheit zu erhalten, muss man das gar keinen Punkt enthaltende Polygon $\mathfrak{O}$ (das Nulleck) zulassen.

Die Anzahl der Punkte eines Polygons heisst seine *Ordnung*. Ein Polygon von der Ordnung n wird auch kurz ein *n-Eck* genannt.

Der *grösste gemeinschaftliche Theiler* zweier Polygone $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ ist dasjenige Polygon, welches jeden Punkt $\mathfrak{P}$ so oft enthält, als er in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ *mindestens* vorkommt. Ist dies $\mathfrak{O}$, so heissen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ *relativ prim*.

Das *kleinste gemeinschaftliche Vielfache* von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ist dasjenige Polygon, welches jeden Punkt so oft enthält, als er in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ *höchstens*

vorkommt. Sind $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ relativ prim, so ist $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ ihr kleinstes gemeinschaftliches Vielfache.

Ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}^r \mathfrak{P}_1^{r_1} \mathfrak{P}_2^{r_2} \dots$ ein beliebiges Polygon, so giebt es stets Functionen z in Ω, welche in keinem der Punkte $\mathfrak{A}$ unendlich sind. Denn wenn z in einigen Punkten von $\mathfrak{A}$ unendlich ist, so kann man eine Constante c so wählen, dass $z-c$ in keinem der Punkte von $\mathfrak{A}$ den Werth 0 hat, und dann ist $\frac{1}{z-c}$ in allen Punkten des Polygons $\mathfrak{A}$ endlich. Legt man eine solche Variable z zu Grunde, so ist der Inbegriff aller derjenigen ganzen Functionen von z, welche in den Punkten des Polygons $\mathfrak{A}$ (jeden nach seiner Vielfachheit gezählt) verschwinden, ein Ideal $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}^r \mathfrak{p}_1^{r_1} \mathfrak{p}_2^{r_2} \dots$, und man kann sagen, das Polygon $\mathfrak{A}$ *erzeuge* das Ideal $\mathfrak{a}$, oder $\mathfrak{A}$ sei das *Nullpolygon* des Ideals $\mathfrak{a}$. Der Idealbegriff fällt hiernach vollständig zusammen mit dem Begriff eines Systems ganzer Functionen, welche alle in denselben festen Punkten verschwinden. Das Ideal $\mathfrak{o}$ wird erzeugt durch das Nulleck $\mathfrak{O}$.

Das Product zweier oder mehrerer Ideale wird erzeugt durch das Product der Nullpolygone der Factoren, grösster gemeinschaftlicher Theiler und kleinstes gemeinschaftliches Vielfache zweier Ideale durch den grössten gemeinschaftlichen Theiler und das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der entsprechenden Nullpolygone.

7. *Satz.* Ist z irgend eine Variable in Ω und n der Grad des Körpers Ω in Bezug auf z, so nimmt z jeden bestimmten Werth c in genau n Punkten an. — Denn wenn $\mathfrak{o}$ das System aller ganzen Functionen von z und c eine endliche Constante bedeutet, so ist

$$\mathfrak{o}(z-c) = \mathfrak{p}_1^{e_1} \mathfrak{p}_2^{e_2} \dots, \quad e_1 + e_2 + \dots = n \quad (\S\ 9,\ 7.),$$

wenn $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, ... von einander verschiedene Primideale in z bedeuten. Bezeichnet man mit $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, ... die Nullpunkte von $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, ..., so hat nach 2. z den Werth c in e_1 Punkten $\mathfrak{P}_1$ (oder in $\mathfrak{P}_1^{e_1}$), in e_2 Punkten $\mathfrak{P}_2$ (oder in $\mathfrak{P}_2^{e_2}$) u. s. f., also in den n Punkten des Polygons $\mathfrak{P}_1^{e_1} \mathfrak{P}_2^{e_2} \dots$ Umgekehrt: ist $\mathfrak{P}$ ein Punkt, in welchem z den Werth c hat, und $\mathfrak{p}$ das durch $\mathfrak{P}$ erzeugte Primideal in z, so ist $z \equiv c$ (mod. $\mathfrak{p}$), und folglich ist $\mathfrak{p}$ eines der Ideale $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, ..., mithin $\mathfrak{P}$ einer der Punkte $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \dots$ Dasselbe Resultat gilt aber auch für $c = \infty$; denn weil n auch der Grad von Ω in Bezug auf $\frac{1}{z}$ ist, so nimmt letztere Variable den Werth 0, folglich z den Werth ∞ in genau n Punkten an. Aus § 11 folgt, dass nur für eine endliche Anzahl

von Werthen der Constanten c einer der Exponenten e_1, e_2, ... grösser als 1 sein kann.

Die Zahl n, d. h. die Anzahl der Punkte, in welchen die Function z je einen constanten Werth hat, soll die *Ordnung* der Function z genannt werden. Die Constanten und *nur* diese haben die Ordnung Null. Für alle anderen Functionen in Ω ist die Ordnung eine positive ganze Zahl. Die Ordnung einer Variablen z ist zugleich der Grad des Körpers Ω in Bezug auf z.

§ 16.

Conjugirte Punkte und conjugirte Werthe.

1. *Definition.* Ist c ein bestimmter Zahlwerth, so entspricht demselben, wie in § 15 gezeigt, ein Polygon $\mathfrak{A}$ von n (gleichen oder verschiedenen) Punkten $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$, ... $\mathfrak{P}^{(n)}$, in welchen die Variable n^{ter} Ordnung z eben diesen Werth hat; diese n Punkte sollen *conjugirt nach z* heissen; durch einen von ihnen (und durch die Variable z) sind die übrigen bestimmt. Lässt man c nach und nach alle Werthe annehmen, so bewegt sich das Polygon $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}'\mathfrak{P}''\ldots\mathfrak{P}^{(n)}$ und zwar so, dass stets alle seine Punkte sich verändern. Man erhält hierbei also alle überhaupt existirenden Punkte und nur diejenigen (in endlicher Anzahl vorhandenen) mehrfach, in welchen $z - z_0$ oder $\frac{1}{z}$ in höherer als der ersten Ordnung verschwindet. Es ist daher das Product aller dieser Polygone

$$\Pi\mathfrak{A} = T\mathfrak{Z}_z,$$

wo T die einfache Gesammtheit aller Punkte, die *Riemann*sche *Fläche*, $\mathfrak{Z}_z$ ein bestimmtes endliches Polygon ist, welches das *Verzweigungs-* oder *Windungspolygon von T in z* heisst. Jeder in $\mathfrak{Z}_z$ enthaltene Punkt $\mathfrak{Q}$ heisst ein *Verzweigungs-* oder *Windungspunkt von T in z*, und zwar von der Ordnung s, wenn er genau s-mal in $\mathfrak{Z}_z$ vorkommt. Es ist $s = e - 1$, wenn $z - z_0$ oder $\frac{1}{z}$ in $\mathfrak{Q}$ unendlich klein von der e^{ten} Ordnung ist. Die Ordnung des Polygons $\mathfrak{Z}_z$ heisst die *Verzweigungs-* oder *Windungszahl* w_z der Fläche T nach z. Diejenigen Punkte des Verzweigungspolygons, in welchen z einen endlichen Werth hat, erzeugen zusammen das *Verzweigungsideal* in z (§ 11).

Will man von dieser Definition der „absoluten“ *Riemann*schen Fläche, welche ein zu dem Körper Ω gehöriger invarianter Begriff ist, zu der bekannten *Riemann*schen Vorstellung übergehen, so hat man sich die Fläche

in einer z-Ebene ausgebreitet zu denken, welche sie dann überall mit Ausnahme der Verzweigungspunkte n-fach bedeckt.

2. ***Satz.*** Ist

$$z' = \frac{c+dz}{a+bz},$$

worin a, b, c, d Constanten bedeuten, deren Determinante $ad-bc$ von Null verschieden ist, so ist

$$\mathfrak{Z}_z = \mathfrak{Z}_{z'}; \quad \mathrm{w}_z = \mathrm{w}_{z'}.$$

Denn wenn in einem Punkt $\mathfrak{P}$ $z-z_0$ oder $\frac{1}{z}$ unendlich klein in der e^{ten} Ordnung ist, so ist in demselben Punkte auch

$$z'-z'_0 = \frac{(ad-bc)(z-z_0)}{(a+bz)(a+bz_0)},$$

oder falls z_0 unendlich ist:

$$z'-z'_0 = \frac{-(ad-bc)}{b(a+bz)},$$

oder falls $z'_0 = \infty$, also $a+bz_0 = 0$ ist:

$$\frac{1}{z'} = \frac{a+bz}{c+dz}$$

unendlich klein in der e^{ten} Ordnung.

Ist ins Besondere $z' = \frac{1}{z}$, so ist die Verzweigungszahl $\mathrm{w}_z = \mathrm{w}_{z'}$ gleich dem Grad der Discriminante $\Delta_z(\Omega)$ vermehrt um die Anzahl der verschwindenden Wurzeln von $\Delta_{z'}(\Omega) = 0$ (§ 11).

3. ***Definition.*** Die Werthe $\eta', \eta'', \ldots \eta^{(n)}$, welche eine beliebige Function η in Ω in n nach z conjugirten Punkten $\mathfrak{P}', \mathfrak{P}'', \ldots \mathfrak{P}^{(n)}$ annimmt, heissen ***conjugirte Werthe von η nach z.***

4. ***Satz.*** Ist $N_z(\eta)$ die Norm einer beliebigen Function η in Bezug auf z, so ist der Werth, welchen diese rationale Function von z für $z = z_0$ besitzt, gleich dem Product $\eta'\eta''\ldots\eta^{(n)}$ der zu $z = z_0$ gehörigen conjugirten Werthe von η, wobei von dem Fall, dass dies Product unbestimmt wird, also einer dieser conjugirten Werthe 0, ein anderer ∞ ist, abzusehen ist. Beim Beweis dieses Satzes können wir annehmen, es sei z_0 endlich; denn ist $z_0 = \infty$, so legen wir statt z die Variable $z' = \frac{1}{z}$ zu Grunde, wobei die Norm ungeändert bleibt. Ferner können wir annehmen, die Werthe $\eta', \eta'', \ldots \eta^{(n)}$ seien alle endlich; denn ist einer von ihnen unendlich, so ist n. V. keiner derselben gleich 0, und wir betrachten statt η die Function $\frac{1}{\eta}$.

Es sei nun unter diesen Voraussetzungen

$$\mathfrak{o}(z-z_0) = \mathfrak{p}_1^{e_1}\mathfrak{p}_2^{e_2}\mathfrak{p}_3^{e_3}\ldots$$

und $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3, \ldots$ die Nullpunkte der von einander verschiedenen Primideale $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \ldots$ Wir construiren ein System ganzer Functionen λ, μ von z nach folgender Regel: Es sei

λ_1 theilbar durch $\mathfrak{p}_1$, nicht durch $\mathfrak{p}_1^2$;
λ_2 „ „ $\mathfrak{p}_2$, „ „ $\mathfrak{p}_2^2$;
λ_3 „ „ $\mathfrak{p}_3$, „ „ $\mathfrak{p}_3^2$;
. . . .

μ_1 theilbar durch $\mathfrak{p}_2^{e_2}, \mathfrak{p}_3^{e_3}, \ldots$, nicht durch $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2^{e_2+1}, \mathfrak{p}_3^{e_3+1}, \ldots$;
μ_2 „ „ $\mathfrak{p}_1^{e_1}, \mathfrak{p}_3^{e_3}, \ldots$, „ „ $\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1^{e_1+1}, \mathfrak{p}_3^{e_3+1}, \ldots$;
μ_3 „ „ $\mathfrak{p}_1^{e_1}, \mathfrak{p}_2^{e_2}, \ldots$, „ „ $\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1^{e_1+1}, \mathfrak{p}_2^{e_2+1}, \ldots$ *).
. . . .

Die n Functionen

$$\begin{array}{lllll}
\mu_1, & \mu_1\lambda_1, & \mu_1\lambda_1^2, & \ldots & \mu_1\lambda_1^{e_1-1}, \\
\mu_2, & \mu_2\lambda_2, & \mu_2\lambda_2^2, & \ldots & \mu_2\lambda_2^{e_2-1}, \\
\mu_3, & \mu_3\lambda_3, & \mu_3\lambda_3^2, & \ldots & \mu_3\lambda_3^{e_3-1}, \\
\ldots & & & &
\end{array}$$

die wir mit $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ bezeichnen, bilden dann eine Basis von Ω; diese Behauptung ist in der nun zu beweisenden allgemeineren enthalten.

Wenn

$$(z-z_0)\zeta = x_1\eta_1+x_2\eta_2+\cdots+x_n\eta_n$$

mit ganzen rationalen Coefficienten $x_1, x_2, \ldots x_n$ ist, und ζ in den Punkten $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3, \ldots$ endliche Werthe $\zeta', \zeta'', \zeta''', \ldots$ hat, so müssen die sämmtlichen Coefficienten $x_1, x_2, \ldots x_n$ durch $z-z_0$ theilbar sein. In der That ist z. B. im Punkte $\mathfrak{P}_1$ die linke Seite unendlich klein mindestens in der Ordnung e_1. Es muss also nach § 15, 5. auch

$$x_1\eta_1+x_2\eta_2+\cdots+x_{e_1}\eta_{e_1} = \mu_1(x_1+x_2\lambda_1+\cdots+x_{e_1}\lambda_1^{e_1-1})$$

in dieser Ordnung unendlich klein sein. Dies ist aber nur möglich, wenn $x_1, x_2, \ldots x_{e_1}$ in $\mathfrak{P}_1$ verschwinden, also durch $z-z_0$ theilbar sind, w. z. b. w.

---

*) Die Möglichkeit, solche Functionen zu bestimmen, ergiebt sich aus § 9, 3. Anmerkung, oder auch nach § 11, 2., wonach man z. B. setzen kann

$$\lambda = \varrho - b, \quad \mu\lambda^e = \psi(\varrho).$$

Hiernach können wir setzen:

$$\begin{aligned}\eta\mu_1\lambda_1^r = {} & \mu_1(x_1^{(0)}+x_1^{(1)}\lambda_1+\cdots+x_1^{(e_1-1)}\lambda_1^{e_1-1})\\ & +\mu_2(x_2^{(0)}+x_2^{(1)}\lambda_2+\cdots+x_2^{(e_2-1)}\lambda_2^{e_2-1})\\ & +\mu_3(x_3^{(0)}+x_3^{(1)}\lambda_3+\cdots+x_3^{(e_3-1)}\lambda_3^{e_3-1})+\cdots,\end{aligned}$$

worin die $x_1^{(0)}, x_1^{(1)}, \dots x_2^{(0)}, \dots$ rationale Functionen von z sind, die alle für $z = z_0$ endlich bleiben. In den Punkten $\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3, \dots$ ist die linke Seite unendlich klein mindestens in der Ordnung $e_2, e_3, \dots$ Dasselbe gilt für $\mathfrak{P}_2$ von $\mu_1, \mu_3, \dots$ aber nicht von μ_2, für $\mathfrak{P}_3$ von $\mu_1, \mu_2, \dots$ aber nicht von $\mu_3, \dots$; folglich ist für $z = z_0$

$$\begin{aligned} & x_2^{(0)} = 0, \quad x_2^{(1)} = 0, \quad \dots \quad x_2^{(e_2-1)} = 0,\\ & x_3^{(0)} = 0, \quad x_3^{(1)} = 0, \quad \dots \quad x_3^{(e_3-1)} = 0,\\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{aligned}$$

In $\mathfrak{P}_1$ ist die linke Seite unendlich klein mindestens in der Ordnung r; daher wird, wenn $r < e_1$ ist, für $z = z_0$

$$x_1^{(0)} = 0, \quad x_1^{(1)} = 0, \quad \dots \quad x_1^{(r-1)} = 0, \quad x_1^{(r)} = \eta'.$$

Dieselbe Betrachtung lässt sich auf die Functionen $\eta\mu_2\lambda_2^r$, $\eta\mu_3\lambda_3^r, \dots$ anwenden. Setzt man also

$$\begin{aligned}\eta\eta_1 &= x_{1,1}\eta_1+x_{1,2}\eta_2+\cdots+x_{1,n}\eta_n,\\ \eta\eta_2 &= x_{2,1}\eta_1+x_{2,2}\eta_2+\cdots+x_{2,n}\eta_n,\\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \eta\eta_n &= x_{n,1}\eta_1+x_{n,2}\eta_2+\cdots+x_{n,n}\eta_n,\end{aligned}$$

so werden in der Determinante

$$N(\eta) = \Sigma \pm x_{1,1}x_{2,2}\dots x_{n,n}$$

sämmtliche links von der Diagonalreihe stehenden Glieder für $z = z_0$ verschwinden, während von den Diagonalgliedern e_1 gleich η', e_2 gleich η'', e_3 gleich η''', ... werden. Es ist also für $z = z_0$

$$N(\eta). = \eta'^{e_1}\eta''^{e_2}\eta'''^{e_3}\dots$$

w. z. b. w.

5. Da nach der Definition der Spur (§ 2)

$$S(\eta) = x_{1,1}+x_{2,2}+\cdots+x_{n,n}$$

ist, so führen dieselben Betrachtungen zu dem Satze:

Es ist für $z = z_0$

$$S(\eta) = e_1\eta'+e_2\eta''+e_3\eta'''+\cdots,$$

welcher jedoch nur unter der Voraussetzung gilt, dass die Werthe $\eta', \eta'', \eta''', \ldots$ endlich sind.

Der Satz 4. ergiebt für ein beliebiges constantes (oder rational von z abhängiges) t für $z = z_0$

$$N(t-\eta) = (t-\eta')^{e_1}(t-\eta'')^{e_2}(t-\eta''')^{e_3}\ldots,$$

und daraus durch Vergleichung der Coefficienten gleicher Potenzen von t für jeden dieser Coefficienten einen Ausdruck durch die conjugirten Werthe (symmetrische Functionen).

6. Ist $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ eine Basis von Ω, so ergiebt sich durch Anwendung von 5. sofort der Werth der Discriminante dieses Systems für $z = z_0$

$$\Delta_z(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n) = (\Sigma \pm \eta_1' \eta_2'' \ldots \eta_n^{(n)})^2,$$

wenn $\eta_\iota', \eta_\iota'', \ldots \eta_\iota^{(n)}$ die sämmtlichen gleichen oder verschiedenen, aber als endlich vorausgesetzten, zu $z = z_0$ gehörigen conjugirten Werthe von η_ι bedeuten.

§ 17.

Darstellung der Functionen des Körpers Ω durch Polygonquotienten.

Eine Function η des Körpers Ω hat nur in einer endlichen Anzahl von Punkten eine von Null verschiedene Ordnungszahl; die Summe sämmtlicher Ordnungszahlen ist gleich 0, also die Summe der positiven gleich der Summe der negativen Ordnungszahlen, und zwar gleich der Ordnung der Function η (§ 15). Sind die Ordnungszahlen einer Function η für jeden Punkt $\mathfrak{P}$ bekannt, so ist damit die Function η bis auf einen constanten Factor bestimmt; denn hat η' überall dieselbe Ordnungszahl wie η, so hat $\frac{\eta}{\eta'}$ (nach § 15, 5.) überall die Ordnungszahl Null und ist also (nach § 15, 7.) eine Constante.

Bilden wir also ein Polygon $\mathfrak{A}$, in welches wir jeden Punkt, in dem η eine positive Ordnungszahl hat, so oft aufnehmen, als diese Ordnungszahl angiebt, und ein zweites Polygon $\mathfrak{B}$, in welches wir in entsprechender Weise die Punkte aufnehmen, in welchen η eine negative Ordnungszahl hat, so sind die Polygone $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ von gleicher Ordnung, und zwar von der Ordnung der Function η. Durch diese Polygone $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ ist also die Function η bis auf einen constanten Factor bestimmt. Wir setzen in symbolischer Be-

zeichnung

$$\eta = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}},$$

und nennen $\mathfrak{A}$ das *Obereck*, $\mathfrak{B}$ das *Untereck* der Function η *).

Nach dieser Festsetzung sind die beiden Polygone $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ relativ prim; es ist aber zweckmässig, die Bezeichnung dahin auszudehnen, dass man auch gemeinschaftliche Factoren in $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ zulässt, was durch die Bestimmung geschieht, dass

$$\frac{\mathfrak{M}\mathfrak{A}}{\mathfrak{M}\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$$

sein soll, wenn $\mathfrak{M}$ ein beliebiges Polygon bedeutet. Setzen wir nach dieser verallgemeinerten Bezeichnung

$$\eta = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}},$$

so kann ein Punkt $\mathfrak{P}$, in welchem η die Ordnungszahl m besitzt, m_1-mal in $\mathfrak{A}$, m_2-mal in $\mathfrak{B}$ aufgenommen werden, wenn $m_1 - m_2 = m$ ist. Es ist auch jetzt noch die Ordnung von $\mathfrak{A}$ gleich der von $\mathfrak{B}$, aber nicht mehr gleich der Ordnung der Function η.

Aus dieser Definition ergiebt sich (nach § 15, 5.) unmittelbar der Satz: Ist

$$\eta = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}, \quad \eta' = \frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{B}'},$$

so ist

$$\eta\eta' = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{A}'}{\mathfrak{B}\mathfrak{B}'}, \quad \frac{\eta}{\eta'} = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}'}{\mathfrak{B}\mathfrak{A}'}.$$

Nach § 14, 5. *ist eine Function η' dann und nur dann eine ganze Function von η, wenn jeder im Untereck von η' aufgehende Punkt auch in dem von η enthalten ist.*

§ 18.

Aequivalente Polygone und Polygonclassen.

1. *Definition.* Zwei Polygone $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ von gleichviel Punkten heissen *äquivalent*, wenn eine Function η in Ω existirt, welche (nach § 17) die Be-

---

*) Alle Functionen der einfachen Schaar (η) haben hiernach dieselbe Bezeichnung $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$, und es würde daher correcter sein, $(\eta) = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$ zu setzen; indessen führt diese Bezeichnung zu unnöthigen Weitläufigkeiten.

zeichnung hat:

$$\eta = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}'}.$$

2. *Satz.* Ist $\mathfrak{A}$ äquivalent mit $\mathfrak{A}'$ und mit $\mathfrak{A}''$, so ist auch $\mathfrak{A}'$ mit $\mathfrak{A}''$ äquivalent; denn aus

$$\eta' = \frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{A}}; \quad \eta'' = \frac{\mathfrak{A}''}{\mathfrak{A}}$$

folgt:

$$\frac{\eta'}{\eta''} = \frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{A}''}.$$

3. *Definition und Satz.* Alle mit einem gegebenen Polygon $\mathfrak{A}$ äquivalenten Polygone $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$, ... bilden eine *Polygonclasse* A. Nach 2. kommt dann jedes beliebige Polygon in einer und *nur* in einer Classe vor; denn sind $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ zwei äquivalente Polygone, welche zu den Classen A, B führen, so ist nach 2. jedes Polygon der Classe B zugleich in A enthalten und umgekehrt, und daher sind beide Classen identisch.

Alle Polygone einer Classe haben dieselbe Ordnung, welche die *Ordnung der Classe* genannt werden soll.

4. Es können aber Polygone existiren, welche mit keinem andern äquivalent sind, und deren jedes daher für sich eine Classe bildet. Solche Polygone mögen *isolirte* genannt sein.

5. Ist $\mathfrak{M}$ ein beliebiges Polygon, und $\mathfrak{A}$ äquivalent mit $\mathfrak{A}'$, so ist auch $\mathfrak{M}\mathfrak{A}$ äquivalent mit $\mathfrak{M}\mathfrak{A}'$; aber auch umgekehrt folgt aus der Aequivalenz von $\mathfrak{M}\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{M}\mathfrak{A}'$ die Aequivalenz von $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A}'$.

6. Ist $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{B}'$ äquivalent, so ist auch $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ äquivalent. Die Classe C, welcher das Product $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ angehört, umfasst daher die sämmtlichen Producte je zweier Polygone der Classen A, B von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ (aber ausserdem unter Umständen noch unendlich viele andere Polygone) und soll als das *Product* der beiden Classen A, B bezeichnet sein:

$$C = AB = BA.$$

Die Definition des Products von mehreren Classen und die Gültigkeit des Fundamentalsatzes der Multiplication ergiebt sich hieraus von selbst.

7. Sind A, B, D drei Classen, welche der Bedingung

$$DA = DB$$

genügen, so folgt $A = B$; denn sind $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$ drei Polygone der Classen A, B, D, so folgt aus der Voraussetzung, dass $\mathfrak{D}\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{D}\mathfrak{A}$, und folglich $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{A}$ äquivalent ist.

8. Geht ein Polygon $\mathfrak{A}$ der Classe A in einem Polygon $\mathfrak{C}$ der Classe C auf, so gilt dasselbe von jedem Polygon $\mathfrak{A}'$ der Classe A; denn aus $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ folgt nach 5., dass $\mathfrak{C}' = \mathfrak{A}'\mathfrak{B}$ in C enthalten ist, und wir können also, obschon nicht umgekehrt jedes Polygon der Classe C durch ein Polygon der Classe A theilbar zu sein braucht, sagen, *die Classe C sei durch die Classe A theilbar*. Ist $\mathfrak{B}'$ irgend ein Polygon der Classe B von $\mathfrak{B}$, so ist auch $\mathfrak{C}'' = \mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ in C enthalten und folglich

$$C = AB.$$

Ist also C durch A theilbar, so giebt es eine und (nach 7.) *nur* eine Classe B, welche der Bedingung

$$C = AB$$

genügt.

§ 19.
Die Polygonschaaren.

1. Sind $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots \mathfrak{A}_s$ bestimmte, und zwar äquivalente Polygone, und $\mathfrak{A}$ ein beliebiges Polygon derselben Classe A, so existiren s Functionen in Ω

$$\eta_1 = \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}}, \quad \eta_2 = \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}}, \quad \ldots \quad \eta_s = \frac{\mathfrak{A}_s}{\mathfrak{A}}.$$

Setzt man, wie in § 15, 5. für einen beliebigen Punkt $\mathfrak{P}$

$$\begin{aligned} \eta_1 &= e_1\varrho^m + \sigma_1\varrho^{m+1}, \\ \eta_2 &= e_2\varrho^m + \sigma_2\varrho^{m+1}, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \eta_s &= e_s\varrho^m + \sigma_s\varrho^{m+1}, \end{aligned}$$

worin ϱ in $\mathfrak{P}$ 0^1 ist, $e_1, e_2, \ldots e_s$ Constanten, die nicht alle verschwinden, und $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_s$ in $\mathfrak{P}$ endliche Functionen bedeuten, so folgt, dass jede Function η der Schaar $(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_s)$, d. h. jede Function von der Form

$$\eta = c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \cdots + c_s\eta_s$$

in $\mathfrak{P}$ eine Ordnungszahl hat, die nicht kleiner als m ist, und daraus nach § 17, dass die Function η in die Form

$$\eta = \frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{A}}$$

gesetzt werden kann, wo $\mathfrak{A}'$ gleichfalls in der Classe A enthalten ist.

Wählt man für $\mathfrak{A}$ ein beliebiges anderes Polygon $\mathfrak{B}$ der Classe A, und setzt

$$\zeta = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}},$$

$$\eta_1\zeta = \eta_1' = \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{B}}, \quad \eta_2\zeta = \eta_2' = \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{B}}, \quad \dots \quad \eta_s\zeta = \eta_s' = \frac{\mathfrak{A}_s}{\mathfrak{B}},$$

so wird auch

$$\eta\zeta = \eta' = c_1\eta_1' + c_2\eta_2' + \cdots + c_s\eta_s',$$

und folglich

$$\eta' = \frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{B}}.$$

Jedes durch den Nenner $\mathfrak{A}$ und ein Constantensystem $c_1, c_2, \dots c_s$ erzeugte Polygon wird daher auch durch jeden andern derselben Classe angehörigen Nenner $\mathfrak{B}$ erzeugt, und der Inbegriff der sämmtlichen Polygone $\mathfrak{A}'$, die den verschiedenen Werthen der Constanten $c_1, c_2, \dots c_s$ entsprechen, ist nur abhängig von den Polygonen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots \mathfrak{A}_s$. Dieser Inbegriff soll daher eine ***Polygonschaar*** mit der Basis $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots \mathfrak{A}_s$ genannt und mit

$$(\mathfrak{A}_1, \ \mathfrak{A}_2, \ \dots \ \mathfrak{A}_s)$$

bezeichnet werden.

2. Haben die Polygone $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots \mathfrak{A}_s$ einen grössten gemeinschaftlichen Theiler $\mathfrak{M}$, so ist derselbe nach 1. auch Theiler eines jeden Polygons $\mathfrak{A}'$ der Schaar $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots \mathfrak{A}_s)$, und kann der ***Theiler der Schaar*** genannt werden; aber es lässt sich in dieser Schaar ein Polygon $\mathfrak{A}' = \mathfrak{M}\mathfrak{B}$ der Art bestimmen, dass $\mathfrak{B}$ relativ prim zu einem beliebig gegebenen Polygon wird. Ist nämlich unter Beibehaltung der Bezeichnung von 1. ein Punkt $\mathfrak{P}$ genau μ-mal in $\mathfrak{M}$ und ν-mal in $\mathfrak{A}$ enthalten, so ist, wenn

$$\eta = e\varrho^m + \sigma\varrho^{m+1}$$

gesetzt wird, m niemals kleiner als $\mu - \nu$, und es ist $m = \mu - \nu$, wenn man die Constanten $c_1, c_2, \dots c_s$ so wählt, dass

$$e = c_1e_1 + c_2e_2 + \cdots + c_se_s$$

von Null verschieden ist. Der Punkt $\mathfrak{P}$ ist daher mindestens μ-mal in $\mathfrak{A}'$ enthalten, und unter der letzteren Voraussetzung auch nicht öfter als μ-mal. Da man nun die Constanten $c_1, c_2, \dots c_s$ immer so wählen kann, dass eine beliebige Anzahl von Ausdrücken der Form

$$\Sigma c_\iota e_\iota, \quad \Sigma c_\iota e_\iota', \quad \dots,$$

in deren keinem die sämmtlichen Constanten $e_\iota, e_\iota', \dots$ verschwinden, von Null verschiedene Werthe haben, so folgt die Richtigkeit der aufgestellten Behauptung.

3. Sind die Functionen $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_s$ in 1. linear abhängig oder unabhängig, so gilt das Gleiche von den Functionen $\eta'_1, \eta'_2, \dots \eta'_s$. Wir werden dem entsprechend auch die Polygone $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots \mathfrak{A}_s$ *linear abhängig* oder *unabhängig* und ihr System *linear reductibel* oder *irreductibel nennen.*

Da nach § 5, 4. jede Functionenschaar eine irreductible Basis besitzt, so folgt, dass auch jede Polygonschaar eine *irreductible Basis* hat. Ist s die Anzahl der Polygone einer solchen Basis, so heisst die Schaar *eine s-fache*, oder s die *Dimension der Schaar*. Irgend s Polygone einer solchen Schaar bilden eine irreductible Basis derselben oder nicht, je nachdem sie linear unabhängig oder abhängig sind. (Vgl. § 5, 4.).

4. Sind die Polygone $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots \mathfrak{A}_s$ linear abhängig oder unabhängig, so sind, wenn $\mathfrak{M}$ ein beliebiges Polygon bedeutet, auch $\mathfrak{M}\mathfrak{A}_1, \mathfrak{M}\mathfrak{A}_2, \dots \mathfrak{M}\mathfrak{A}_s$ linear abhängig oder unabhängig und umgekehrt.

§ 20.

Erniedrigung der Dimension der Schaar durch Theilbarkeitsbedingungen.

1. Es sei

$$S = (\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots \mathfrak{A}_s)$$

eine s-fache Schaar vom Theiler $\mathfrak{M}$. Es wird nach der Mannigfaltigkeit derjenigen Polygone $\mathfrak{A}'$ der Schaar S gefragt, welche einen beliebig gegebenen Punkt wenigstens einmal öfter enthalten als der Theiler $\mathfrak{M}$ der Schaar.

Ist der Punkt $\mathfrak{P}$ μ-mal in $\mathfrak{M}$ und ν-mal in einem beliebigen mit $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots$ äquivalenten Polygon $\mathfrak{A}$ enthalten, so ist, wenn wir wie in § 19

$$\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}} = \eta_1 = e_1\varrho^m + \sigma_1\varrho^{m+1},$$
$$\frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}} = \eta_2 = e_2\varrho^m + \sigma_2\varrho^{m+1},$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{\mathfrak{A}_s}{\mathfrak{A}} = \eta_s = e_s\varrho^m + \sigma_s\varrho^{m+1}$$

setzen, $m = \mu - \nu$, und von den Constanten $e_1, e_2, \dots e_s$ ist wenigstens eine, etwa e_s, von Null verschieden. Die gesuchten Polygone $\mathfrak{A}'$ sind dann durch die Gleichung charakterisirt

$$\frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{A}} = \eta' = c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \dots + c_s\eta_s,$$

worin die Constanten $c_1, c_2, \dots c_s$ an die Bedingung gebunden sind

$$c_1e_1 + c_2e_2 + \dots + c_se_s = 0.$$

Hiernach können wir setzen

$$\frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{A}} = e_s\eta' = c_1(e_s\eta_1 - e_1\eta_s) + \cdots + c_{s-1}(e_s\eta_{s-1} - e_{s-1}\eta_s).$$

Daraus aber ergiebt sich, wenn wir

$$\begin{aligned}
\eta'_1 &= e_s\eta_1 - e_1\eta_s,\\
\eta'_2 &= e_s\eta_2 - e_2\eta_s,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\eta'_{s-1} &= e_s\eta_{s-1} - e_{s-1}\eta_s
\end{aligned}$$

setzen, dass die Functionen η' eine $(s-1)$-fache Schaar $(\eta'_1, \eta'_2, \ldots \eta'_{s-1})$ bilden; denn die Functionen $\eta'_1, \eta'_2, \ldots \eta'_{s-1}$ sind linear unabhängig, wenn es, wie vorausgesetzt, die Functionen $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_s$ sind. Es bilden also auch die Polygone $\mathfrak{A}'$ eine $(s-1)$-fache Schaar

$$S' = (\mathfrak{A}'_1, \mathfrak{A}'_2, \ldots \mathfrak{A}'_{s-1}),$$

wenn

$$\frac{\mathfrak{A}'_i}{\mathfrak{A}} = e_s\eta_i - e_i\eta_s$$

gesetzt wird. Der Theiler dieser Schaar ist durch $\mathfrak{M}\mathfrak{P}$ theilbar, wenn auch nicht nothwendig damit identisch.

2. Hieraus ergiebt sich sofort, dass die Polygone einer Schaar S, welche durch ein beliebiges r-Eck $\mathfrak{R}$ theilbar sind, eine *mindestens* $(s-r)$-fache Schaar bilden. Denn nehmen wir an, es sei dies bereits für ein r-Eck $\mathfrak{R}$ bewiesen, so folgt die Richtigkeit der Behauptung für ein $(r+1)$-Eck $\mathfrak{P}\mathfrak{R}$ unmittelbar aus 1, indem durch das Hinzutreten des Punktes $\mathfrak{P}$, wenn $\mathfrak{P}$ im Theiler der durch $\mathfrak{R}$ bereits reducirten Schaar enthalten ist, die Dimension nicht weiter geändert, sonst um 1 erniedrigt wird.

Hieraus folgt als Specialfall, dass es in einer s-fachen Schaar immer *wenigstens ein* Polygon giebt, welches durch ein gegebenes $(s-1)$-Eck theilbar ist.

3. Man kann, wenn $r \leqq s$ ist, das r-Eck $\mathfrak{R}$ so wählen, dass die durch $\mathfrak{R}$ theilbaren Polygone der Schaar S eine genau $(s-r)$-fache Schaar bilden. Zu diesem Ende wähle man einen Punkt $\mathfrak{P}$, welcher im Theiler von S nicht enthalten ist; die durch $\mathfrak{P}$ theilbaren Polygone in S bilden nach 1. eine $(s-1)$-fache Schaar S'; man wähle einen zweiten Punkt $\mathfrak{P}'$, der nicht im Theiler von S' enthalten ist; die Polygone in S', die durch $\mathfrak{P}'$, d. h. die Polygone in S, die durch $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ theilbar sind, bilden eine $(s-2)$-fache

Schaar, u. s. f.; zugleich erhellt aus dieser Bildungsweise, dass man $\mathfrak{R}$ zu einem beliebig gegebenen Polygon relativ prim annehmen kann. Ist $r = s$, so wird hiernach in S kein durch $\mathfrak{R}$ theilbares Polygon existiren.

§ 21.

Die Dimensionen der Polygonclassen.

1. *Die Polygone einer Classe bilden eine Schaar von endlicher Dimension, welche die Dimension der Classe heissen soll.*

Beweis. Wählt man in einer Classe A, deren Ordnung m sei, irgend s Polygone $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots \mathfrak{A}_s$ aus, so gehören alle Polygone der Schaar $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots \mathfrak{A}_s)$ zugleich in die Classe A. Die Anzahl der linear unabhängigen Polygone, die in A enthalten sind, kann daher gewiss nicht grösser sein als $m+1$, weil man sonst (nach § 20, 2.) in der Classe ein durch ein beliebiges $(m+1)$-Eck theilbares Polygon finden könnte, was widersinnig ist. Wenn daher s die Maximalzahl der linear unabhängigen Polygone $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2, \ldots \mathfrak{A}_s$ der Classe A ist, so muss jedes Polygon dieser Classe in der Schaar $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots \mathfrak{A}_s)$ enthalten sein, und s ist die *Dimension der Classe.* Das System der Polygone $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots \mathfrak{A}_s$ soll eine *Basis der Classe* genannt werden.

Die isolirten Polygone bilden Classen von der Dimension 1.

2. Giebt es in einer Classe C s und nicht mehr linear unabhängige, durch ein gegebenes Polygon $\mathfrak{A}$ der Classe A theilbare Polygone

$$\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{A}\mathfrak{B}_1, \quad \mathfrak{C}_2 = \mathfrak{A}\mathfrak{B}_2, \quad \ldots \quad \mathfrak{C}_s = \mathfrak{A}\mathfrak{B}_s,$$

so ist C durch A theilbar, und es existiren in C auch ebenso viele linear unabhängige Polygone

$$\mathfrak{C}_1' = \mathfrak{A}'\mathfrak{B}_1, \quad \mathfrak{C}_2' = \mathfrak{A}'\mathfrak{B}_2, \quad \ldots \quad \mathfrak{C}_s' = \mathfrak{A}'\mathfrak{B}_s,$$

welche durch ein beliebiges mit $\mathfrak{A}$ äquivalentes Polygon $\mathfrak{A}'$ theilbar sind. (§ 18, 8.; § 19, 4.). Diese Zahl s hängt daher nur von den beiden Classen A, C ab und kann füglich mit (A, C) bezeichnet werden. Der Werth des Symbols (A, C) ist gleich 0 zu setzen, wenn C nicht durch A theilbar ist. Die Dimension einer Classe A wird hiernach mit (O, A) bezeichnet, wo O die aus dem Nulleck $\mathfrak{O}$ bestehende Classe bedeutet. Ist (nach § 18, 8.)

$$C = AB,$$

so folgt:

$$(1.) \qquad (A, C) = (A, AB) = (O, B);$$

denn die Polygone $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots \mathfrak{B}_s$, die sämmtlich in B enthalten sind, sind linear unabhängig, daher (O, B) gewiss nicht kleiner als s. Ist umgekehrt $\mathfrak{B}$ ein beliebiges Polygon der Classe B, so ist $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ in C enthalten, also auch in der Schaar $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1, \mathfrak{A}\mathfrak{B}_2, \dots \mathfrak{A}\mathfrak{B}_s)$, mithin $\mathfrak{B}$ in der Schaar $(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots \mathfrak{B}_s)$ enthalten, d. h. $(O, B) = s$.

Ist a die Ordnung der Classe A, so ist nach § 20, 2. $(A, C) \gtreqless (O, C) - a$, und daraus folgt mittelst (1.) der allgemeine Satz

$$(2.) \qquad (O, B) \gtreqless (O, AB) - a.$$

3. Haben die sämmmtlichen Basis-Polygone einer Classe A den grössten gemeinschaftlichen Theiler $\mathfrak{M}$, so ist dieser auch Theiler sämmtlicher Polygone der Classe A. Ist $\mathfrak{M}$ gleich dem Nulleck $\mathfrak{O}$, so heisst die Classe eine ***eigentliche***, im entgegengesetzten Fall eine ***uneigentliche vom Theiler*** $\mathfrak{M}$.

Unterdrückt man in sämmtlichen Polygonen einer uneigentlichen Classe A den Theiler $\mathfrak{M}$, so erhält man eine eigentliche Classe A' von niedrigerer Ordnung, aber von derselben Dimension. Diese Beziehung von A zu A' soll durch das Zeichen ausgedrückt sein

$$A = \mathfrak{M}A'.$$

4. Der Theiler $\mathfrak{M}$ einer uneigentlichen Classe A ist stets ein isolirtes Polygon. Ist nämlich

$$A = \mathfrak{M}A',$$

so kann man in der eigentlichen Classe A' nach § 19, 2. ein Polygon $\mathfrak{A}'$ so wählen, dass es relativ prim zu $\mathfrak{M}$ ist. Ist also $\mathfrak{M}'$ äquivalent mit $\mathfrak{M}$, so ist $\mathfrak{M}'\mathfrak{A}'$ äquivalent mit $\mathfrak{M}\mathfrak{A}'$, also in A enthalten, mithin durch $\mathfrak{M}$ theilbar. Es ist also auch $\mathfrak{M}'$ durch $\mathfrak{M}$ theilbar, und da $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ von gleicher Ordnung sind,

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}'.$$

Hiernach bildet das einzige Polygon $\mathfrak{M}$ eine Classe M, und die Bezeichnung $\mathfrak{M}A'$ ist gleichbedeutend mit MA' (§ 18, 6.).

§ 22.

Die Normalbasen von $\mathfrak{o}$.

1. Wir betrachten im Folgenden das System $\mathfrak{o}$ der ganzen Functionen ω einer beliebigen Variablen z in Ω und zugleich das System $\mathfrak{o}'$ der ganzen Functionen ω' von $z' = \frac{1}{z}$. Aus der Definition der ganzen Func-

tionen erhellt sofort, dass die beiden Systeme $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{o}'$ *nur* die Constanten mit einander gemein haben, dass dagegen *jede* Function ω durch Multiplication mit einer bestimmten positiven Potenz von z' in eine Function ω' verwandelt werden kann. Ist $\omega z'^r$ in $\mathfrak{o}'$ enthalten, so gilt das Gleiche auch von $\omega z'^{r+1}$, $\omega z'^{r+2}$, ... In der Reihe der Functionen

$$\omega, \quad \frac{\omega}{z} = z'\omega, \quad \frac{\omega}{z^2} = z'^2\omega, \quad \ldots$$

werden also von einem bestimmten Gliede $\omega z'^r$ an alle folgenden Functionen in $\mathfrak{o}'$ enthalten sein, während alle vorangehenden nicht darin enthalten sind. Die kleinste Zahl r, für welche $z'^r\omega$ in $\mathfrak{o}'$ enthalten ist, soll der ***Exponent*** der Function ω in Bezug auf z genannt werden. Die Constanten, und nur diese, haben den Exponenten Null. Ist ω von Null verschieden, und r sein Exponent, so ist $r+1$ der Exponent von $(z-c)\omega$; denn ist $\omega = z^r\omega'$, so ist

$$\frac{(z-c)\omega}{z^{r+1}} = (1-cz')\omega' \quad \text{in } \mathfrak{o}' \text{ enthalten,}$$

$$\frac{(z-c)\omega}{z^r} = z\omega' - c\omega' \quad \text{nicht in } \mathfrak{o}' \text{ enthalten,}$$

da zwar $c\omega'$, nicht aber $z\omega' = \frac{\omega}{z^{r-1}}$ in $\mathfrak{o}'$ enthalten ist. Daraus folgt allgemein:

Ist x eine ganze rationale Function von z vom Grade s, und r der Exponent von ω, so ist $(r+s)$ der Exponent von $x\omega$.

2. Wir wählen nun ein Functionensystem $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ in $\mathfrak{o}$ nach folgender Regel aus:

Es sei λ_1 eine von Null verschiedene Constante, z. B. 1; λ_2 sei unter denjenigen Functionen in $\mathfrak{o}$, welche nicht einer Constanten nach dem Modul $\mathfrak{o}z$ congruent sind, eine von möglichst niedrigem Exponenten r_2 u. s. f.; allgemein sei λ_s unter denjenigen Functionen in $\mathfrak{o}$, welche nicht congruent sind einer Function der Schaar $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{s-1})(\text{mod.}\, \mathfrak{o}z)$, eine von möglichst niedrigem Exponenten r_s. Da $(\mathfrak{o}, \mathfrak{o}z) = N(z) = z^n$ vom n^{ten} Grade ist, so giebt es in $\mathfrak{o}$ n und nicht mehr nach dem Modul $\mathfrak{o}z$ linear unabhängige Functionen (§ 6), und daher kann die Reihe der Functionen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ nicht mehr und nicht weniger als n Glieder enthalten. Es ist dann (§ 5)

$$\mathfrak{o} \equiv (\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n)(\text{mod.}\, \mathfrak{o}z).$$

Die Exponenten $r_1, r_2, \ldots r_n$ der Functionen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ genügen der Forderung

$$r_1 = 0, \quad 1 \leqq r_2 \leqq r_3 \cdots \leqq r_n.$$

Jede Function in $\mathfrak{o}$, deren Exponent $< r_s$, ist nach dem Modul $\mathfrak{o}z$ congruent einer Function aus der $(s-1)$-fachen Schaar

$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{s-1}).$$

Diese Functionen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ bilden eine Basis von $\mathfrak{o}$, wie sich aus folgender Betrachtung ergiebt.

Wäre es nicht der Fall, so könnte man (§ 3, 7.) eine lineare Function $z-c$ und ein System nicht alle verschwindender Constanten $a_1, a_2, \ldots a_n$ so bestimmen, dass

$$a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + \cdots + a_n\lambda_n = (z-c)\omega$$

wäre. Ist unter den Constanten a die letzte nicht verschwindende a_s, so ist auch

$$a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + \cdots + a_s\lambda_s = (z-c)\omega,$$

und der Exponent von ω ist sicher kleiner als r_s (weil $\frac{(z-c)\omega}{z^{r_s}}$ in $\mathfrak{o}'$ enthalten ist). Es ist also ω, und mithin, da a_s von 0 verschieden ist, auch λ_s congruent einer Function der Schaar $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{s-1})$ (mod. $\mathfrak{o}z$), was gegen die Voraussetzung ist.

Die Functionen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ bilden daher eine Basis von $\mathfrak{o}$, und diese soll *Normalbasis* genannt werden. Die charakteristischen Eigenschaften der Normalbasis sind:

I. Die Functionen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ sind linear unabhängig nach dem Modul $\mathfrak{o}z$.

II. Jede Function in $\mathfrak{o}$, deren Exponent kleiner ist als der Exponent r_s von λ_s, ist in der Form enthalten

$$c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + \cdots + c_{s-1}\lambda_{s-1} + z\omega_s,$$

worin $c_1, c_2, \ldots c_{s-1}$ Constanten, ω_s eine Function in $\mathfrak{o}$.

3. Die in $\mathfrak{o}'$ enthaltenen Functionen

$$\lambda_1' = \frac{\lambda_1}{z^{r_1}}, \quad \lambda_2' = \frac{\lambda_2}{z^{r_2}}, \quad \ldots \quad \lambda_n' = \frac{\lambda_n}{z^{r_n}}$$

bilden eine *Normalbasis* von $\mathfrak{o}'$.

Ist nämlich ω eine *durch z nicht theilbare* Function in $\mathfrak{o}$ vom Exponenten r, so ist der Exponent von $\omega' = \frac{\omega}{z^r}$ in Bezug auf z' ebenfalls r; denn es ist zwar $\frac{\omega'}{z'^r} = \omega$, aber nicht $\frac{\omega'}{z'^{r-1}} = \frac{\omega}{z}$ in $\mathfrak{o}$ enthalten. Da die Functionen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ alle durch z nicht theilbar sind, so sind hiernach

die Exponenten von $\lambda'_1, \lambda'_2, \dots \lambda'_n$ in Bezug auf $\mathfrak{z}'$ resp. $r_1, r_2, \dots r_n$. Dies vorausgeschickt beweisen wir, dass das Functionensystem $\lambda'_1, \lambda'_2, \dots \lambda'_n$ die Eigenschaften I., II. besitzt, wenn dort $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{z}$ durch $\mathfrak{o}'$, $\mathfrak{z}'$ ersetzt werden.

Wäre die Bedingung I. nicht erfüllt, so liessen sich die Constanten $a_1, a_2, \dots a_s$, deren letzte nicht verschwindet, so bestimmen, dass

$$a_1\lambda'_1 + a_2\lambda'_2 + \dots + a_s\lambda'_s = \mathfrak{z}'\omega',$$

also auch (durch Multiplication mit $\mathfrak{z}^{r_s}$)

$$a_1\mathfrak{z}^{r_s - r_1}\lambda_1 + a_2\mathfrak{z}^{r_s - r_2}\lambda_2 + \dots + a_s\lambda_s = \omega,$$

worin

$$\omega = \mathfrak{z}^{r_s - 1}\omega',$$

also eine Function in $\mathfrak{o}$, deren Exponent kleiner als r_s wäre. Dies ist aber, da a_s von Null verschieden, wegen der Voraussetzung über die λ unmöglich, und folglich die Bedingung I. erfüllt; daraus folgt:

$$\mathfrak{o}' \equiv (\lambda'_1, \lambda'_2, \dots \lambda'_n) \pmod{\mathfrak{o}'\mathfrak{z}'}.$$

Wäre die Bedingung II. nicht erfüllt, und λ' eine Function in $\mathfrak{o}'$, deren Exponent $r < r_s$, die nicht in der Form enthalten ist

$$a_1\lambda'_1 + a_2\lambda'_2 + \dots + a_{s-1}\lambda'_{s-1} + \mathfrak{z}'\omega',$$

so könnte man $e \geqq s$ so wählen, dass

$$\lambda' = a_1\lambda'_1 + a_2\lambda'_2 + \dots + a_e\lambda'_e + \mathfrak{z}'\omega'$$

mit constanten Coefficienten, deren letzter a_e nicht verschwindet. Es ist hiernach auch $r_e \geqq r_s > r$.

Demnach ist $\lambda = \mathfrak{z}^{r_e - 1}\lambda'$ eine Function in $\mathfrak{o}$, und es ergiebt sich durch Multiplication mit $\mathfrak{z}^{r_e}$

$$\mathfrak{z}\lambda = a_1\mathfrak{z}^{r_e - r_1}\lambda_1 + a_2\mathfrak{z}^{r_e - r_2}\lambda_2 + \dots + a_e\lambda_e + \mathfrak{z}^{r_e - 1}\omega'.$$

Es ist daher $\omega = \mathfrak{z}^{r_e - 1}\omega'$ eine Function in $\mathfrak{o}$, deren Exponent (nach 1.) $\leqq r_e - 1$, und welche der Congruenz genügt

$$\omega \equiv a'_1\lambda_1 + a'_2\lambda_2 + \dots + a'_e\lambda_e \pmod{\mathfrak{o}\mathfrak{z}},$$

worin $a'_e = -a_e$ von Null verschieden ist. Hiernach müsste aber wegen der Eigenschaft II. der Functionen λ der Exponent von $\omega \geqq r_e$ sein, woraus der Widerspruch erhellt.

Hiermit ist nachgewiesen, dass das Functionensystem $\lambda'_1, \lambda'_2, \dots \lambda'_n$ eine Normalbasis von $\mathfrak{o}'$ bildet.

4. Wir bilden nun die Discriminante von Ω in Bezug auf die Variable z und z' mit Hülfe der beiden Normalbasen λ, λ'; es ist:

$$\Delta_z(\Omega) = \text{const.}\,\Delta(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n),$$
$$\Delta_{z'}(\Omega) = \text{const.}\,\Delta(\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots \lambda'_n).$$

Setzt man aber für λ'_i die Ausdrücke $z'^{r_i}\lambda_i$, so folgt aus dem Satze § 2, (13.)

$$\Delta_{z'}(\Omega) = \text{const.}\,z'^{2(r_1+r_2+\cdots+r_n)}\Delta_z(\Omega).$$

Ist $\Delta_z(\Omega)$ vom Grade δ, so besitzt $\Delta_{z'}(\Omega)$ die Wurzel $z'=0$ $(2(r_1+r_2+\cdots+r_n)-\delta)$-mal, und daraus ergiebt sich nach § 16, 2. die *Verzweigungszahl*

$$w_z = 2(r_1+r_2+\cdots+r_n),$$

welche hiernach stets eine *gerade Zahl* ist.

§ 23.

Die Differentialquotienten.

1. Da eine jede von Null verschiedene Function des Körpers Ω nur in einer endlichen Anzahl von Punkten den Werth Null hat, so folgt, dass eine Function in Ω, von der sich unendlich viele Nullpunkte nachweisen lassen, nothwendig identisch Null ist, oder dass zwei Functionen in Ω, welche in unendlich vielen Punkten denselben Werth haben, identisch sein müssen.

2. Sind α, β irgend zwei Variable des Körpers Ω, so existirt in Ω eine mit $\left(\frac{d\alpha}{d\beta}\right)$ zu bezeichnende Function, welche in unendlich vielen Punkten $\mathfrak{P}$ der Bedingung genügt:

$$\left(\frac{d\alpha}{d\beta}\right)_0 = \left(\frac{\alpha-\alpha_0}{\beta-\beta_0}\right)_0,$$

welche der *Differentialquotient* von α nach β genannt wird. Ist nämlich $F(\alpha, \beta) = 0$ die zwischen α, β bestehende irreductible Gleichung, so ist, wenn wir zunächst diejenigen (in endlicher Zahl vorhandenen) Punkte ausschliessen, in welchen α_0 oder $\beta_0 = \infty$ oder $F'(\alpha_0) = 0$ oder $F'(\beta_0) = 0$ ist,

$$0 = F(\alpha, \beta) = F(\alpha_0, \beta_0) + (\alpha-\alpha_0)F'(\alpha_0) + (\beta-\beta_0)F'(\beta_0)$$
$$+\tfrac{1}{2}\{(\alpha-\alpha_0)^2F''(\alpha_0, \alpha_0) + 2(\alpha-\alpha_0)(\beta-\beta_0)F''(\alpha_0, \beta_0) + (\beta-\beta_0)^2F''(\beta_0, \beta_0)\} + \cdots$$

Von den beiden Quotienten $\left(\frac{\alpha-\alpha_0}{\beta-\beta_0}\right)_0$, $\left(\frac{\beta-\beta_0}{\alpha-\alpha_0}\right)_0$ ist gewiss der eine endlich; ist es der erstere, so ziehen wir aus der letzten Gleichung die folgende:

$$0 = \frac{\alpha-\alpha_0}{\beta-\beta_0}F'(\alpha_0)+F'(\beta_0)$$
$$+(\beta-\beta_0)\tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{\alpha-\alpha_0}{\beta-\beta_0}\right)^2F''(\alpha_0,\alpha_0)+2\left(\frac{\alpha-\alpha_0}{\beta-\beta_0}\right)F''(\alpha_0,\beta_0)+F''(\beta_0,\beta_0)\right\}+\cdots,$$

woraus für den Punkt $\mathfrak{P}$ folgt:

$$\left(\frac{\alpha-\alpha_0}{\beta-\beta_0}\right)_0=-\frac{F'(\beta_0)}{F'(\alpha_0)}=-\left(\frac{F'(\beta)}{F'(\alpha)}\right)_0.$$

Wäre $\left(\frac{\alpha-\alpha_0}{\beta-\beta_0}\right)_0$ unendlich, so würden wir ebenso in Bezug auf $\frac{\beta-\beta_0}{\alpha-\alpha_0}$ schliessen.

Es hat also

$$(1.)\quad \left(\frac{d\alpha}{d\beta}\right)=-\frac{F'(\beta)}{F'(\alpha)}$$

die verlangte Eigenschaft. Dies bleibt auch noch richtig, wenn von den beiden Functionen α, β eine constant ist; denn ist z. B. α constant, so ist $F(\alpha,\beta)=\alpha-\alpha_0$ von β unabhängig, also $F'(\alpha)=1$, $F'(\beta)=0$.

3. Aus Vorstehendem folgt, dass, falls β nicht constant ist, abgesehen von einer *endlichen* Anzahl von Punkten $\left(\frac{\alpha-\alpha_0}{\beta-\beta_0}\right)_0$ ein endlicher Werth ist. Ist daher γ eine dritte Variable in Ω, so ist in unendlich vielen Punkten

$$\left(\frac{\alpha-\alpha_0}{\beta-\beta_0}\right)_0=\left(\frac{\alpha-\alpha_0}{\gamma-\gamma_0}\right)_0\left(\frac{\gamma-\gamma_0}{\beta-\beta_0}\right)_0,$$

also auch

$$\left(\frac{d\alpha}{d\beta}\right)_0=\left(\frac{d\alpha}{d\gamma}\right)_0\left(\frac{d\gamma}{d\beta}\right)_0.$$

Hiernach und nach 1. ist aber die Identität erfüllt:

$$(2.)\quad \left(\frac{d\alpha}{d\beta}\right)=\left(\frac{d\alpha}{d\gamma}\right)\left(\frac{d\gamma}{d\beta}\right)^{*)}.$$

4. In Folge dieses letzten Satzes können wir jeder der Functionen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ des Körpers Ω eine Function $d\alpha, d\beta, d\gamma, \ldots$ (Differential) in

---

*) Man kann auch den Differentialquotienten durch die Gleichung

$$\left(\frac{d\alpha}{d\beta}\right)=-\frac{F'(\beta)}{F'(\alpha)}$$

definiren und durch algebraische Division zum Beweis des Satzes

$$\left(\frac{d\alpha}{d\beta}\right)=\left(\frac{d\alpha}{d\gamma}\right)\left(\frac{d\gamma}{d\beta}\right)$$

gelangen.

der Weise zuordnen, dass allgemein

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = \left(\frac{d\alpha}{d\beta}\right)$$

wird. Die Differentiale der Constanten, und *nur* diese sind Null zu setzen; die übrigen sind völlig bestimmt, sobald eines derselben willkürlich angenommen ist. Besteht zwischen den Variablen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ eine rationale Gleichung

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) = 0,$$

so folgt aus derselben

$$(3.) \quad F'(\alpha)\,d\alpha + F'(\beta)\,d\beta + F'(\gamma)\,d\gamma + \cdots = 0;$$

denn auf dieselbe Weise wie in 2. schliesst man, dass diese Gleichung für unendlich viele Punkte befriedigt ist.

Unmittelbare Folgen des letzten Satzes sind die bekannten Regeln für die Differentiation von Summen, Differenzen, Producten und Quotienten:

$$(4.) \quad d(\alpha \pm \beta) = d\alpha \pm d\beta,$$

$$(5.) \quad d(\alpha\beta) = \alpha\,d\beta + \beta\,d\alpha,$$

$$(6.) \quad d\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \frac{\beta\,d\alpha - \alpha\,d\beta}{\beta^2}.$$

5. Ist ω eine *ganze* Function von z, so wird im Allgemeinen $\frac{d\omega}{dz}$ keine ganze Function von z sein. Es ist aber aus dem Ausdruck (§ 3, 7.)

$$\omega = x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + \cdots + x_n\omega_n$$

ersichtlich, da die Differentialquotienten der ganzen rationalen Functionen $x_1, x_2, \ldots x_n$ wieder ganze rationale Functionen sind, dass die Unterideale der sämmtlichen Functionen $\frac{d\omega}{dz}$ in einem bestimmten Ideal aufgehen müssen, nämlich in dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen der Unterideale von $\frac{d\omega_1}{dz}, \frac{d\omega_2}{dz}, \ldots \frac{d\omega_n}{dz}$. Es soll untersucht werden, welches dies Ideal ist. Zu dem Ende sei $z-c$ eine beliebige lineare Function von z und

$$\mathfrak{o}(z-c) = \mathfrak{p}^e \mathfrak{p}_1^{e_1} \mathfrak{p}_2^{e_2} \ldots,$$

worin die Primideale $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots$ von einander verschieden sind. Es sei nun ζ dieselbe Function wie in § 11, 2., d. h. eine ganze Function von z, welche in den durch die Primideale $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots$ erzeugten Punkten $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots$ lauter verschiedene Werthe hat und jeden derselben nur ein-

fach; dann lässt sich ω in der Form darstellen

$$\omega = y_0 + y_1\zeta + \cdots + y_{n-1}\zeta^{n-1},$$

worin die rationalen Functionen $y_0, y_1, \ldots y_{n-1}$ von z zwar gebrochen sein können, aber den Factor $z-c$ gewiss nicht im Nenner enthalten. Daraus folgt, dass das Unterideal von $\frac{d\omega}{dz}$ durch keine höheren Potenzen der Ideale $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots$ theilbar sein kann, als das Unterideal von $\frac{d\zeta}{dz}$. Ist aber

$$f(\zeta, z) = 0$$

die zwischen ζ und z bestehende irreductible Gleichung, so ist nach § 11, 2.

$$\mathfrak{o}f'(\zeta) = \mathfrak{m}\mathfrak{p}^{e-1}\mathfrak{p}_1^{e_1-1}\mathfrak{p}_2^{e_2-1}\ldots$$

und $\mathfrak{m}$ relativ prim zu $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots$ Da aber

$$\frac{d\zeta}{dz} = -\frac{f'(z)}{f'(\zeta)}$$

ist, so kann das Unterideal von $\frac{d\zeta}{dz}$, und mithin auch das von $\frac{d\omega}{dz}$ keinen der Factoren $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots$ öfter als $(e-1)$, (e_1-1), (e_2-1), ... mal enthalten. Da nun $z-c$ jede beliebige lineare Function sein kann, so folgt, dass $\frac{d\omega}{dz}$ kein anderes Unterideal haben kann, als ein solches, welches in dem Verzweigungsideal $\mathfrak{z} = \Pi\mathfrak{p}^{e-1}$ (§ 11) aufgeht. Es ist also, wenn $\mathfrak{a}$ ein Ideal bedeutet:

$$\mathfrak{z}\frac{d\omega}{dz} = \mathfrak{a},$$

also nach § 11, (7.)

$$\mathfrak{o}\frac{d\omega}{dz} = \mathfrak{e}\mathfrak{a},$$

woraus hervorgeht, dass die Functionen $\frac{d\omega}{dz}$ sämmtlich dem zu $\mathfrak{o}$ complementären Modul $\mathfrak{e}$ angehören.

6. Ist die irreductible Gleichung $F(\omega, z) = 0$ zwischen ω und z vom n^{ten} Grade in Bezug auf ω, also $1, \omega, \omega^2, \ldots \omega^{n-1}$ eine Basis von Ω, so ist nach § 11, (10.)

$$\mathfrak{o}F'(\omega) = \mathfrak{z}\mathfrak{k},$$

und daher muss wegen

$$\frac{d\omega}{dz} = -\frac{F'(z)}{F'(\omega)}$$

$\mathfrak{o}F'(z)$ durch das Ideal $\mathfrak{k}$ theilbar sein,

$$\mathfrak{o}F'(z) = \mathfrak{k}\mathfrak{a},$$

$\mathfrak{k}$ kann man daher das *Ideal der Doppelpunkte* in Bezug auf ω, z nennen.

7. Ist $\mathfrak{P}$ ein Punkt, in welchem $z-c$ unendlich klein in der ersten Ordnung ist (also kein Verzweigungspunkt in z), so sind nach 5. die Functionen $\frac{d\omega}{dz}$ in $\mathfrak{P}$ alle endlich. Ist also η irgend eine Function in Ω, welche in $\mathfrak{P}$ endlich ist, so kann man diese als Quotienten zweier ganzen Functionen $\frac{\alpha}{\beta}$ darstellen, von denen β in $\mathfrak{P}$ nicht verschwindet, und daher ist nach (6.) auch $\frac{d\eta}{dz}$ in $\mathfrak{P}$ endlich.

8. Es seien jetzt α, β irgend zwei Variable in Ω; es soll das Verhalten von $\frac{d\alpha}{d\beta}$ in irgend einem Punkt $\mathfrak{P}$ untersucht werden.

Man wähle eine Variable z in Ω, welche in $\mathfrak{P}$ unendlich klein in der ersten Ordnung ist. Hat α in $\mathfrak{P}$ einen endlichen Werth α_0, so kann man nach § 15, 1., 2. eine positive ganze Zahl r und eine in $\mathfrak{P}$ endliche und von Null verschiedene Function α' so bestimmen, dass

$$\alpha = \alpha_0 + z^r\alpha'$$

wird. Dies gilt auch noch, wenn α in $\mathfrak{P}$ unendlich ist; nur ist dann r eine negative ganze Zahl, und α_0 ist durch eine beliebige endliche Constante, z. B. 0 zu ersetzen. Ebenso kann man

$$\beta = \beta_0 + z^s\beta'$$

setzen; r und s sind dann die Ordnungszahlen von $\alpha-\alpha_0$, $\beta-\beta_0$ im Punkte $\mathfrak{P}$, die sowohl positiv als negativ, aber nicht 0 sein können. Aus (2.) ergiebt sich dann:

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = z^{r-s}\frac{r\alpha' + z\frac{d\alpha'}{dz}}{s\beta' + z\frac{d\beta'}{dz}}$$

oder

$$\frac{\beta-\beta_0}{\alpha-\alpha_0}\frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{r + z\frac{d\alpha'}{\alpha' dz}}{s + z\frac{d\beta'}{\beta' dz}}.$$

Bezeichnet man nun wieder durch den Index 0 den Werth einer Function im Punkte $\mathfrak{P}$, so ist, da

$$\left(\frac{d\alpha'}{\alpha' dz}\right)_0, \quad \left(\frac{d\beta'}{\beta' dz}\right)_0$$

nach 7. endlich sind,

$$(7.)\qquad \left(\frac{\beta-\beta_0}{\alpha-\alpha_0}\frac{d\alpha}{d\beta}\right)_0 = \frac{r}{s},$$

also endlich und von Null verschieden. Hieraus ergiebt sich, dass *die Ordnungszahl des Differentialquotienten* $\frac{d\alpha}{d\beta}$ *gleich ist der Differenz der Ordnungszahlen von* $\alpha-\alpha_0$ *und* $\beta-\beta_0$. Ist $r \gtrless s$, so ist $\left(\frac{\alpha-\alpha_0}{\beta-\beta_0}\right)_0$ und mithin $\left(\frac{d\alpha}{d\beta}\right)_0$ Null oder unendlich. Ist dagegen $r = s$, so sind beide Werthe endlich und von 0 verschieden, und wir haben daher in allen Fällen

$$(8.)\qquad \left(\frac{\alpha-\alpha_0}{\beta-\beta_0}\right)_0 = \left(\frac{d\alpha}{d\beta}\right)_0.$$

Hierin sind α_0, β_0 die Werthe von α, β in $\mathfrak{P}$, wenn diese Werthe endlich sind, sonst beliebige Constanten, z. B. 0.

9. Sind a, b die Ordnungszahlen von $\alpha-\alpha_0$, $\beta-\beta_0$ in $\mathfrak{P}$, so kommt, falls a, b positiv sind, der Punkt $\mathfrak{P}$ $(a-1)$-mal resp. $(b-1)$-mal in den Verzweigungspolygonen $\mathfrak{Z}_\alpha$, $\mathfrak{Z}_\beta$ in α, β vor. Ist aber a negativ, so enthält $\mathfrak{Z}_\alpha$ den Punkt $\mathfrak{P}$ $(-a-1)$-mal, und Entsprechendes gilt, wenn b negativ ist (§ 16, 1.). Bezeichnet man also mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ die Unterecke von α, β, so erhält man, weil die Ordnungszahl von $\frac{d\alpha}{d\beta}$ (wie eben bewiesen) immer gleich $a-b$ ist, für diese Function folgenden Ausdruck als Polygonquotienten

$$(9.)\qquad \frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{\mathfrak{Z}_\alpha\mathfrak{B}^2}{\mathfrak{Z}_\beta\mathfrak{A}^2}.$$

§ 24.

Das Geschlecht des Körpers Ω.

1. Bezeichnet man mit w_α, w_β die Verzweigungszahlen, mit n_α, n_β die Ordnungen der Variablen α, β, so folgt aus der Formel (9.) des vorigen §, da Zähler und Nenner von $\frac{d\alpha}{d\beta}$ gleichviel Punkte enthalten müssen, die wichtige Relation

$$\mathrm{w}_\alpha - 2n_\alpha = \mathrm{w}_\beta - 2n_\beta;$$

wenn man also

$$(1.)\qquad p = \tfrac{1}{2}\mathrm{w} - n + 1$$

setzt, welches nach § 22, 4. eine ganze Zahl ist, so ist diese von der Wahl der Variablen unabhängig und eine für den Körper Ω charakteristische Zahl,

welche das *Geschlecht* des Körpers Ω genannt wird. Dass diese Zahl niemals negativ ist, ergiebt sich, wenn man für $\frac{1}{2}\mathfrak{w}$ den Werth $r_1+r_2+\cdots+r_n$ aus § 22 einsetzt. Man erhält dann

$$(2.)\qquad p = (r_2-1)+(r_3-1)+\cdots+(r_n-1),$$

was, da $r_2, r_3, \ldots r_n \geqq 1$ sind, nicht negativ werden kann.

2. Es seien α, β zwei Functionen in Ω von den Ordnungen m, n, von der Beschaffenheit, dass *alle* Functionen in Ω rational durch α, β darstellbar sind. Es ist dann

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta) &= a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\alpha + a_n \\ &= b_0\beta^m + b_1\beta^{m-1} + \cdots + b_{m-1}\beta + b_m = 0 \end{aligned}$$

die zwischen α, β bestehende irreductible Gleichung, worin $a_0, a_1, \ldots a_n$ ganze rationale Functionen von β, ebenso $b_0, b_1, \ldots b_m$ ganze rationale Functionen von α sind.

Es sei ferner

$$\alpha = \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}}, \quad \beta = \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{B}}$$

und $\mathfrak{A}_1$ relativ prim zu $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}_1$ zu $\mathfrak{B}$, so dass $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1$ von der Ordnung m, $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1$ von der Ordnung n sind. Nun ist

$$\begin{aligned} F'(\alpha) &= n a_0\alpha^{n-1} + (n-1)a_1\alpha^{n-2} + \cdots + a_{n-1}, \\ \alpha F'(\alpha) &= -a_1\alpha^{n-1} - 2a_2\alpha^{n-2} - \cdots - n a_n, \end{aligned}$$

woraus hervorgeht, dass

$$F'(\alpha) = \frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{A}^{n-2}\mathfrak{B}^m}$$

und ebenso

$$F'(\beta) = \frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{A}^n\mathfrak{B}^{m-2}}$$

sein muss. Es ist nun nachzuweisen, dass das Polygon $\mathfrak{K}$ durch $\mathfrak{Z}_\beta$, $\mathfrak{L}$ durch $\mathfrak{Z}_\alpha$ theilbar ist.

Für $\mathfrak{K}$ ist dies leicht einzusehen unter der Voraussetzung, dass in sämmtlichen Punkten von $\mathfrak{Z}_\beta$ die Function β einen endlichen, und a_0 einen von Null verschiedenen Werth hat; denn es ist

$$\alpha' = a_0\alpha$$

eine ganze Function von β, und wenn man

$$f(\alpha') = a^{n-1}F(\alpha, \beta)$$

setzt, so ist

$$f'(\alpha') = a_0^{n-2}F'(\alpha).$$

Da nun nach § 11, 5. $\mathfrak{o}_\beta f'(\alpha')$ durch das von $\mathfrak{Z}_\beta$ erzeugte Verzweigungsideal in β theilbar ist, so folgt hieraus die Richtigkeit der Behauptung. Analoges gilt für $F'(\beta)$.

Macht man nun für α, β beliebige lineare Substitutionen:

$$\alpha = \frac{c+d\alpha'}{a+b\alpha'}; \quad \beta = \frac{c'+d'\beta'}{a'+b'\beta'},$$

$$(a+b\,\alpha')(d-b\,\alpha) = a\,d-b\,c,$$

$$(a'+b'\beta')(d'-b'\beta) = a'd'-b'c',$$

so ist nach § 16, 2.

$$\mathfrak{Z}_\alpha = \mathfrak{Z}_{\alpha'}; \quad \mathfrak{Z}_\beta = \mathfrak{Z}_{\beta'},$$

und die zwischen α', β' bestehende irreductible Gleichung lautet:

$$F_1(\alpha', \beta') = (a+b\alpha')^n(a'+b'\beta')^m F(\alpha, \beta) = 0.$$

Es lassen sich aber unter allen Umständen die Constanten $a, b, c, d;$ a', b', c', d' so wählen, dass die oben angegebenen Voraussetzungen sowohl für α' als für β' erfüllt sind.

Denn setzt man die Coefficienten a'_0, b'_0 von α'^n, β'^m in $F_1(\alpha', \beta')$ in die Form

$$a'_0 = (a'+b'\beta')^m(a_0 d^n + a_1 d^{n-1}\,b + \cdots + a_n\,b^n) = \left(\frac{a'd'-b'c'}{d'-b'\beta}\right)^m (a_0 d^n + a_1 d^{n-1}\,b + \cdots + a_n\,b^n),$$

$$b'_0 = (a+b\,\alpha')^n\,(b_0 d'^m + b_1 d'^{m-1} b' + \cdots + b_m b'^m) = \left(\frac{ad-bc}{d-b\alpha}\right)^n (b_0 d'^m + b_1 d'^{m-1} b' + \cdots + b_m b'^m),$$

so erkennt man leicht, dass nur für eine endliche Anzahl von Werthen der Verhältnisse $d:b$, $d':b'$ die Functionen a'_0, $d'-b'\beta$ in einem Punkt von $\mathfrak{Z}_\beta$, b'_0, $d-b\alpha$ in einem Punkt von $\mathfrak{Z}_\alpha$ verschwinden können.

Setzen wir nun

$$\alpha' = \frac{\mathfrak{A}'_1}{\mathfrak{A}'}, \quad \beta' = \frac{\mathfrak{B}'_1}{\mathfrak{B}'},$$

so folgt (§ 19, 1.)

$$d-b\alpha = \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}}, \quad a+b\alpha' = \frac{\mathfrak{A}'_2}{\mathfrak{A}'},$$

also:

$$\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}'_2 = \mathfrak{A}\mathfrak{A}'.$$

Ist aber, wie angenommen, b von Null verschieden, so ist $\mathfrak{A}_2$ relativ prim zu $\mathfrak{A}$, weil in einem Punkt von $\mathfrak{A}$ die Ordnungszahl von $d-b\alpha$ dieselbe ist, wie die von α (§ 15, 5.) und folglich

$$\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}', \quad \mathfrak{A}'_2 = \mathfrak{A},$$

also:

$$a+b\alpha' = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}'},$$

und ebenso:

$$a'+b'\beta' = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}'}.$$

Nun ist aber, da $F(\alpha,\beta)=0$ ist:

$$F_1'(\alpha') = (ad-bc)(a+b\alpha')^{n-2}(a'+b'\beta')^m F'(\alpha),$$

und wenn also, wie vorausgesetzt:

$$F_1'(\alpha') = \frac{\mathfrak{R}\mathfrak{Z}_\beta}{\mathfrak{A}'^{n-2}\mathfrak{B}'^m},$$

so folgt

$$F'(\alpha) = \frac{\mathfrak{R}\mathfrak{Z}_\beta}{\mathfrak{A}^{n-2}\mathfrak{B}^m}$$

und in gleicher Weise

$$F'(\beta) = \frac{\mathfrak{R}\mathfrak{Z}_\alpha}{\mathfrak{A}^n\mathfrak{B}^{m-2}}.$$

Dass das im Zähler dieser beiden Ausdrücke auftretende Polygon $\mathfrak{R}$ in beiden Ausdrücken dasselbe sein muss, ergiebt sich aus

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = -\frac{F'(\beta)}{F'(\alpha)} = \frac{\mathfrak{B}^2\mathfrak{Z}_\alpha}{\mathfrak{A}^2\mathfrak{Z}_\beta}.$$

Nun ist die Ordnung des Polygons $\mathfrak{A}^{n-2}\mathfrak{B}^m$

$$m(n-2)+mn = 2m(n-1),$$

also die Ordnung von $\mathfrak{R}$

$$2r = 2m(n-1)-\mathrm{w}_\beta$$

stets eine gerade Zahl, und daraus ergiebt sich

$$(3.)\qquad p = \tfrac{1}{2}\mathrm{w}_\beta - n+1 = (n-1)(m-1)-r.$$

Das Polygon $\mathfrak{R}$ wird das *Polygon der Doppelpunkte* in (α,β) genannt.

§ 25.

Die Differentiale in Ω.

Sind z, z_1 irgend zwei Variable in Ω von den Ordnungen n, n_1 und den Verzweigungszahlen w, w_1, ferner $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}_1$ die Verzweigungspolygone, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}_1$ die Unterecke von z, z_1, so ist (§ 23)

$$(1.)\qquad \frac{dz}{dz_1} = \frac{\mathfrak{Z}\mathfrak{U}_1^2}{\mathfrak{Z}_1\mathfrak{U}^2}.$$

Jede Function ω in Ω lässt sich in die Form setzen

$$(2.)\qquad \omega = \frac{\mathfrak{U}^2\mathfrak{A}}{\mathfrak{Z}\mathfrak{B}},$$

worin $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ Polygone bedeuten, deren Ordnungen a, b der Bedingung genügen

$$2n + a = \mathrm{w} + b$$

oder (§ 24)

$$(3.)\qquad a = b + 2p - 2.$$

Wenn man nun eine Function ω_1 durch die Gleichung erklärt

$$\omega\, dz = \omega_1\, dz_1,$$

so erhält nach (1.) ω_1 die Bezeichnung

$$\omega_1 = \frac{\mathfrak{U}_1^2\mathfrak{A}}{\mathfrak{Z}_1\mathfrak{B}}.$$

Wir nennen in der Folge solche Ausdrücke, wie

$$\omega\, dz = \omega_1\, dz_1$$

Differentiale in Ω, und bezeichnen dieselben in symbolischer Weise durch ein Zeichen wie $d\varpi$. Ein solches Differential ist hierdurch *invariant,* d. h. unabhängig von der Wahl der Veränderlichen z erklärt und ist durch die beiden Polygone $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ vollständig bestimmt.

Wir können ohne Gefahr eines Missverständnisses die symbolische Bezeichnung

$$d\varpi = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}},$$

also beispielsweise auch

$$dz = \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{U}^2}$$

anwenden. Diese Bezeichnung eines Differentials durch einen Polygonquotienten unterscheidet sich von der ähnlichen Bezeichnung der Functionen in Ω (§ 17) dadurch, dass bei letzterer Zähler und Nenner von gleicher Ordnung sind, während bei den Differentialen die Ordnung des Zählers die des Nenners um $2p - 2$ übertrifft. Wie bei der Bezeichnung in § 17, können auch hier gemeinschaftliche Theiler, welche $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ etwa enthalten, unterdrückt werden. Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ relativ prim, so heisst $\mathfrak{A}$ das Obereck, $\mathfrak{B}$ das Untereck des Differentials $d\varpi$.

Unter den hier aufgestellten allgemeinen Begriff des Differentials in Ω fallen als specielle Fälle auch die in § 23, 4. erklärten Differentiale der Functionen des Körpers Ω. Diese nennen wir *eigentliche Differentiale,*

während die anderen, welche nicht als Differentiale von in Ω existirenden Functionen dargestellt werden können, ***uneigentliche oder Abelsche Differentiale*** genannt werden.

Functionen von der Form (2.), die nach unserer jetzt getroffenen Festsetzung mit $\frac{d\varpi}{dz}$ bezeichnet werden können, nennen wir ***Differentialquotienten nach*** z und unterscheiden gleichfalls zwischen ***eigentlichen*** und ***uneigentlichen*** Differentialquotienten, je nachdem $d\varpi$ ein eigentliches oder uneigentliches Differential ist *).

Es entsteht nun die Aufgabe, den Umfang des Begriffs der Differentiale festzustellen, d. h. alle Polygone $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ zu finden, welche Ober- und Untereck eines Differentials sein können. Wir schicken darüber die folgenden allgemeinen Bemerkungen voraus:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$ ein Differential sei, ist die, dass für eine beliebige Variable z

$$\frac{\mathfrak{U}^2\mathfrak{A}}{\mathfrak{Z}\mathfrak{B}}$$

eine Function in Ω ist, also dass $\mathfrak{U}^2\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{Z}\mathfrak{B}$ äquivalent ist. Dies Verhältniss bleibt aber bestehen, wenn $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ selbst durch äquivalente Polygone $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ ersetzt werden. Halten wir $\mathfrak{B}$ fest, und ist $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$ ein Differential, so werden hiernach

$$\frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{B}}, \quad \frac{\mathfrak{A}''}{\mathfrak{B}}, \quad \ldots$$

dann und nur dann Differentiale darstellen, wenn die Polygone $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$, ... alle derselben Classe A angehören. Bilden die Polygone $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, ... eine Basis von A, ist also

$$A = (\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \ldots),$$

so bilden die zugehörigen Differentialquotienten in Bezug auf eine beliebige Variable z, $\frac{d\varpi_1}{dz}$, $\frac{d\varpi_2}{dz}$, $\frac{d\varpi_3}{dz}$, ... die Basis einer Functionenschaar von endlicher Dimension, und dem entsprechend werden wir auch $d\varpi_1$, $d\varpi_2$, $d\varpi_3$, ... die Basis einer ***Schaar von Differentialen***

$$(d\varpi_1, d\varpi_2, d\varpi_3, \ldots)$$

---

*) Der Quotient irgend zweier eigentlichen oder uneigentlichen Differentiale $\frac{d\varpi}{d\varpi'}$ hat stets die Bedeutung einer bestimmten Function in Ω. Wir beschränken uns im Folgenden aber auf die Betrachtung solcher Quotienten, bei denen wenigstens der Nenner ein eigentliches Differential ist.

von derselben Dimension nennen. Dies besagt, dass jedes Differential $d\varpi$, dessen Untereck $\mathfrak{B}$ oder ein Theiler von $\mathfrak{B}$ ist, in der Form dargestellt werden kann

$$d\varpi = c_1 d\varpi_1 + c_2 d\varpi_2 + c_3 d\varpi_3 + \cdots$$

mit constanten Coefficienten $c_1, c_2, c_3, \ldots$

§ 26.

Die Differentiale erster Gattung.

Wir betrachten zunächst die einfachsten unter den Differentialen in Ω, nämlich die, deren Untereck das Nulleck $\mathfrak{O}$ ist. Solche Differentiale (deren Existenz freilich erst noch nachzuweisen ist) heissen ***Differentiale erster Gattung***. Das Obereck $\mathfrak{W}$ eines solchen Differentials dw, dessen Ordnung $2p-2$ ist, wird als das ***Grundpolygon*** von dw bezeichnet und heisst ein ***vollständiges Polygon erster Gattung***, während jeder Theiler eines solchen ein ***Polygon erster Gattung*** schlechtweg genannt wird. Ist $\mathfrak{W} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$, so heissen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ ***Ergänzungspolygone*** von einander. Ein Polygon, welches nicht Theiler eines vollständigen Polygons erster Gattung ist, also ins Besondere jedes Polygon von mehr als $2p-2$ Punkten heisst ein ***Polygon zweiter Gattung***.

1. Nach dem oben Bemerkten bilden alle vollständigen Polygone erster Gattung eine Polygonclasse W, deren Dimension zu bestimmen ist; ergiebt sich diese Dimension > 0, so ist damit zugleich die Existenz der Polygone erster Gattung nachgewiesen. Diese Dimension ist aber dieselbe wie die Dimension der Schaar der Differentiale erster Gattung oder auch, für eine beliebige Variable z, der Schaar der ***Differentialquotienten erster Gattung***, wenn wir als Differentialquotienten erster Gattung nach z die Functionen

$$u = \frac{dw}{dz}$$

bezeichnen. Eine solche Function u hat nach § 25, (2.) den Ausdruck

$$u = \frac{\mathfrak{U}'\mathfrak{W}}{\mathfrak{Z}},$$

und man erkennt leicht aus der Betrachtung der Ordnungszahlen in den verschiedenen Punkten, dass ein solcher Differentialquotient erster Gattung durch folgende beiden Eigenschaften vollkommen definirt ist:

I. In jedem Punkt $\mathfrak{P}$, in welchem z einen endlichen Werth z_0 hat, ist

$$(u(z-z_0))_0 = 0.$$

II. In einem Punkt $\mathfrak{P}$, in welchem z unendlich ist, ist

$$(zu)_0 = 0.$$

Bedeutet wie in § 11, 4.

$$r = (z-c)(z-c_1)(z-c_2)\ldots$$

das Product sämmtlicher von einander verschiedenen Linearfactoren der Discriminante $\Delta_z(\Omega)$, $\mathfrak{r}$ das Product sämmtlicher von einander verschiedenen in r aufgehenden Primideale, so ist die Bedingung I. vollkommen gleichbedeutend mit der, dass ru eine Function in $\mathfrak{r}$, oder dass u eine Function des zu $\mathfrak{o}$ complementären Moduls $\mathfrak{e}$ sein muss (§ 11, 4. (6.)). Um also die Gesammtheit der Functionen u zu erhalten, hat man unter den Functionen in $\mathfrak{e}$ diejenigen aufzusuchen, welche der Bedingung II. genügen.

2. Zu diesem Zweck legen wir eine *Normalbasis* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ von $\mathfrak{o}$ zu Grunde (§ 22) und bezeichnen die dazu complementäre Basis mit $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$, so dass jede der Bedingung I. genügende Function, also auch jeder Differentialquotient erster Gattung, in der Form enthalten ist

$$(1.) \qquad u = y_1\mu_1 + y_2\mu_2 + \cdots + y_n\mu_n,$$

worin $y_1, y_2, \ldots y_n$ *ganze* rationale Functionen von z sind. Aus den Grundeigenschaften der complementären Basis ergiebt sich aber (§ 10, 3.)

$$y_s = S(u\lambda_s); \quad \frac{y_s}{z^{r_s-1}} = S\left(uz\cdot\frac{\lambda_s}{z^{r_s}}\right).$$

Da nun $\frac{\lambda_s}{z^{r_s}}$ in $\mathfrak{o}'$ enthalten, also für $z=\infty$ endlich ist, und uz nach II. in jedem solchen Punkt verschwindet, so folgt (§ 16, 5.), dass $\frac{y_s}{z^{r_s-1}}$ für $z=\infty$ verschwinden muss, d. h. dass die ganze rationale Function y_s den Grad r_s-2 nicht übersteigen kann.

Es muss daher, falls $r_s < 2$ ist, y_s verschwinden, also ist unter allen Umständen (§ 22, 2.)

$$y_1 = 0; \quad S(u) = 0$$

(Abelsches Theorem für Differentiale erster Gattung) und, falls $r_s \gtreqless 2$:

$$(2.) \qquad y_s = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_{r_s-2} z^{r_s-2}.$$

Es ist noch zu zeigen, dass diese Bedingungen auch hinreichend sind, d. h. dass jede Function von der Form (1.), in welcher die y_s den Ausdruck (2.) haben, der Forderung II. genügt, oder, was dasselbe ist, dass, wenn $r_s \gtreqless 2$ ist, $z^{r_s-1}\mu_s$ in allen Punkten, in welchen z unendlich wird, verschwindet.

Dies ergiebt sich sofort durch die Betrachtung des Systems $\mathfrak{o}'$ der ganzen Functionen von $z' = \frac{1}{z}$, für welches nach § 22, 3. die Functionen

$$\lambda_1' = \frac{\lambda_1}{z^{r_1}}, \quad \lambda_2' = \frac{\lambda_2}{z^{r_2}}, \quad \dots \quad \lambda_n' = \frac{\lambda_n}{z^{r_n}}$$

eine Normalbasis bilden. Die hierzu complementäre Basis ist nach § 10, 5.

$$\mu_1' = z^{r_1}\mu_1, \quad \mu_2' = z^{r_2}\mu_2, \quad \dots \quad \mu_n' = z^{r_n}\mu_n,$$

und da (wegen der Eigenschaft I., auf z', μ' angewandt)

$$z'\mu_s' = 0 \quad \text{für} \quad z' = 0,$$

so folgt

$$z^{r_s - 1}\mu_s = 0 \quad \text{für} \quad z = \infty$$

w. z. b. w.

Da aber die Functionen $z^h \mu_s$ linear unabhängig sind (wegen der rationalen Unabhängigkeit der Functionen μ_s), so ergiebt sich hieraus nach § 24, (2.) der ***Hauptsatz:***

Die Schaar der Differentiale erster Gattung ist von der Dimension

$$(r_2 - 1) + (r_3 - 1) + \cdots + (r_n - 1) = p,$$

und demnach ist auch p die Dimension der Classe W der vollständigen Polygone erster Gattung.

Als Basis der Schaar der Differentialquotienten erster Gattung nach z kann man die p Functionen $z^h \mu_s$ ($h \overline{\overline{<}} r_s - 2$) wählen, und die Grundpolygone $\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_2, \dots \mathfrak{W}_p$ der zugehörigen Differentiale dw bilden eine Basis der Classe W.

3. Wegen einer späteren Anwendung soll hier noch eine besondere Art von Differentialquotienten erster Gattung u' betrachtet werden, nämlich die, bei welchen die Bedingung II. ersetzt ist durch die dieselbe einschliessende Bedingung.

III. In jedem Punkte $\mathfrak{P}$, in welchem z unendlich ist, sei

$$(z^k u')_0 = 0,$$

wo k eine gegebene positive ganze Zahl.

Die Functionen u' lassen sich darstellen durch

$$u' = \frac{\mathfrak{U}^{k+1}\mathfrak{W}'}{\mathfrak{Z}}$$

und bilden ebenfalls eine Schaar; desgleichen bilden die Polygone $\mathfrak{W}'$ eine Classe W', deren Ordnung ist

$$\mathrm{w} - n(k+1) = 2p - 2 - n(k-1).$$

Die Polygone $\mathfrak{W}'$ sind jedoch von der Wahl der Variablen z *nicht* unab-

hängig. Die Dimension der Classe W' lässt sich nach derselben Methode bestimmen, wie die der Classe W. Da nämlich die Bedingung I. erfüllt ist, so sind die Functionen u' gleichfalls in der Form (1.) enthalten; jedoch muss jetzt

$$\frac{y_s}{z^{r_s-k}} = S\left(u'z^k \frac{\lambda_s}{z^{r_s}}\right)$$

für $z = \infty$ verschwinden, und daher kann der Grad der ganzen rationalen Function y_s die Zahl $r_s - k - 1$ nicht übersteigen. Es verschwindet also y_s identisch, sobald $r_s < k+1$; andernfalls ist

$$(3.) \qquad y_s = c_0 + c_1 z + \cdots + c_{r_s-k-1} z^{r_s-k-1}.$$

Hat umgekehrt y_s diese Form, so wird durch die Function

$$u' = \overset{s}{\Sigma} y_s \mu_s$$

der Bedingung III. genügt, denn es hat, wie in 2. bewiesen,

$$z^k(z^{r_s-k-1}\mu_s) = z^{r_s-1}\mu_s$$

für $z = \infty$ den Werth 0.

Daraus ergiebt sich, dass die Dimension der Schaar der Functionen u' und folglich auch der Classe W'

$$= \overset{s}{\Sigma}(r_s - k)$$

ist, wobei jedoch in der Summe nur diejenigen Glieder beizubehalten sind, die einen positiven Werth haben. Sind alle $r_s - k \overline{\overline{<}} 0$, so existiren die gesuchten Functionen überhaupt nicht.

§ 27.

Polygonclassen erster und zweiter Gattung.

Ist $\mathfrak{A}$ ein Polygon erster Gattung, so sind alle mit $\mathfrak{A}$ äquivalenten Polygone gleichfalls von der ersten Gattung. Denn wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Ergänzungspolygone sind und

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{W},$$

so ist, wenn A, B die Classen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind:

$$AB = W,$$

und, wenn $\mathfrak{A}'$ mit $\mathfrak{A}$ äquivalent ist, auch $\mathfrak{A}'\mathfrak{B} = \mathfrak{W}'$ äquivalent mit $\mathfrak{W}$ (§ 18, 5.).

Wir nennen daher solche Classen, welche Polygone erster Gattung enthalten, ***Polygonclassen erster Gattung,*** die übrigen ***Polygonclassen zweiter***

Gattung. Die Classe W der vollständigen Polygone erster Gattung heisst die *Hauptclasse,* und zwei Classen A, B, die der Bedingung genügen

$$AB = W,$$

Ergänzungsclassen.

Ist

$$\eta = \frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{A}}$$

eine Function in Ω, und $\mathfrak{A}'$ relativ prim zu $\mathfrak{A}$, also die Classe A von $\mathfrak{A}$ eine eigentliche, so nennen wir η eine Function *erster* oder *zweiter Gattung,* je nachdem die Classe A von der ersten oder von der zweiten Gattung ist.

Ist A eine beliebige Classe erster Gattung und q die Anzahl der von einander unabhängigen Polygone $\mathfrak{W}$, die durch irgend ein Polygon $\mathfrak{A}$ der Classe A theilbar sind, so ist nach § 21, 2.

$$q = (A, W) = (O, B)$$

d. h. gleich der Dimension der Ergänzungsclasse B von A. Ebenso ist (B, W) gleich der Dimension der Classe A. Ist A eine Classe zweiter Gattung, so ist $(A, W) = 0$. Da p die Dimension von W ist, so ist nach § 20, 2., 3. jede Classe, deren Ordnung $\overline{\overline{<}}\, p-1$ ist, von der ersten Gattung, und es giebt ins Besondere Classen A von der Ordnung $p-k$ der Art, dass $(A, W) = (O, B) = k$ ist. Aus den gleichen Sätzen folgt, dass es Classen von der Ordnung p giebt, welche von der zweiten Gattung sind.

§ 28.

Der *Riemann-Roch*sche Satz für eigentliche Classen.

Der *Riemann-Roch*sche Satz, der nach seiner gewöhnlichen Ausdrucksweise die Anzahl der willkürlichen Constanten kennen lehrt, welche eine Function enthält, die in einer gewissen Anzahl gegebener Punkte unendlich wird, enthält nach unserer Darstellungsweise eine Beziehung zwischen der Dimension und der Ordnung einer Classe, resp. einer Classe und ihrer Ergänzungsclasse. Indem wir uns zunächst auf *eigentliche* Classen beschränken, schicken wir der Ableitung dieser fundamentalen Relation die folgenden Bemerkungen voraus.

1. In einer eigentlichen Classe A kann man nach § 19, 2. stets zwei zu einander relativ prime Polygone $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ auswählen (eines derselben kann in der Classe beliebig angenommen werden). Setzt man also

$$z = \frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{A}}$$

und, wenn $\mathfrak{A}''$ ein beliebiges drittes Polygon der Classe A bedeutet:

$$\omega = \frac{\mathfrak{A}''}{\mathfrak{A}}, \quad \frac{\omega}{z} = \frac{\mathfrak{A}''}{\mathfrak{A}'},$$

so ist nach § 17 ω eine *ganze* Function von z, $\frac{\omega}{z}$ eine ganze Function von $\frac{1}{z}$. Es ist daher (§ 22) der Exponent von $\omega \overline{\gtrless} 1$.

Ist umgekehrt ω eine ganze Function von z, deren Exponent $\overline{\gtrless} 1$ ist, so hat es die Form

$$\omega = \frac{\mathfrak{A}''}{\mathfrak{A}},$$

wo $\mathfrak{A}''$ ein Polygon der Classe A ist. Wenn nämlich

$$\omega = \frac{\mathfrak{A}_1''}{\mathfrak{A}_1}, \quad \frac{\omega}{z} = \frac{\mathfrak{A}_1''\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}'}$$

und $\mathfrak{A}_1''$ relativ prim zu $\mathfrak{A}_1$ angenommen wird, so kann zunächst, da ω eine ganze Function von z sein soll, $\mathfrak{A}_1$ keinen Punkt enthalten, der nicht auch in $\mathfrak{A}$ enthalten wäre. Es kann aber auch $\mathfrak{A}_1$ keinen Punkt öfter als $\mathfrak{A}$ enthalten, weil sonst $\frac{\omega}{z}$ in einem solchen Punkt (der nicht in $\mathfrak{A}'$ vorkommen kann) unendlich, also keine ganze Function von $\frac{1}{z}$ wäre. Daher ist $\mathfrak{A}$ theilbar durch $\mathfrak{A}_1$, und ω kann in die Form $\frac{\mathfrak{A}''}{\mathfrak{A}}$ gesetzt werden.

2. Um also die Gesammtheit der Polygone der Classe A zu erhalten, haben wir nur diejenigen ganzen Functionen von z aufzusuchen, deren Exponent $\overline{\gtrless} 1$ ist.

Ist n die Ordnung der Classe A, also auch die Ordnung der Variablen z, und bilden $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ eine Normalbasis von $\mathfrak{o}$ mit den Exponenten $r_1, r_2, \dots r_n$, darunter r_s der letzte, welcher $\overline{\gtrless} 1$ ist, so kann jede Function ω, deren Exponent $\overline{\gtrless} 1$ ist, nach § 22, 2. in der Form dargestellt werden

$$\omega = c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + \cdots + c_s\lambda_s + z\omega_1.$$

Da der Exponent von $z\omega_1$ aber nicht grösser als 1 sein kann, so muss ω_1 eine Constante sein, und daher

$$\omega = c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + \cdots + c_s\lambda_s + c_{s+1}z.$$

Umgekehrt genügt jede Function von dieser Form der gestellten Forderung. Es ist also $s+1$ die Dimension der Classe A, welche hiernach, in Uebereinstimmung mit § 21, 1., stets $\overline{\gtrless} n+1$ ist. Die obere Grenze $n+1$ kann aber nur in dem Falle $p=0$ erreicht werden und wird auch wirklich erreicht, weil in diesem Falle $r_2, r_3, \dots r_n = 1$ sind. Daraus ergiebt sich,

dass ein ***einzelner Punkt*** $\mathfrak{P}$ ***nur***, falls $p=0$ ist, zu einer eigentlichen Classe gehören kann.

3. Wenn von den Exponenten $r_{s+1}, r_{s+2}, \ldots r_n$ einer grösser als 2 ist, so ist sicher auch $r_n > 2$, und es sind nach § 26, 2., wenn $\mathfrak{Z}$ das Verzweigungspolygon in z bedeutet,

$$\mu_n = \frac{\mathfrak{A}'^2\mathfrak{W}}{\mathfrak{Z}}, \quad \mu_n z = \frac{\mathfrak{A}'^2\mathfrak{W}_1}{\mathfrak{Z}} = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\mathfrak{W}}{\mathfrak{Z}}$$

Differentialquotienten erster Gattung nach z, also

$$\mathfrak{A}\mathfrak{W}_1 = \mathfrak{A}'\mathfrak{W}$$

oder, da $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ relativ prim sind,

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}, \quad \mathfrak{W}_1 = \mathfrak{A}'\mathfrak{B},$$

d. h. die Classe A ist von der ***ersten*** Gattung (z eine Variable erster Gattung). Machen wir daher zunächst die Annahme, es sei A eine Classe ***zweiter*** Gattung, so folgt

$$r_{s+1} = 2, \quad r_{s+2} = 2, \quad \ldots \quad r_n = 2$$

und

$$p = (r_2 - 1) + \cdots + (r_s - 1) + (r_{s+1} - 1) + \cdots + (r_n - 1) = n - s.$$

Die Dimension $s+1$ der Classe A ist daher

$$(O, A) = n - p + 1.$$

4. Machen wir zweitens die Annahme, es sei A von der ***ersten*** Gattung und wie in § 27

$$q = (A, W),$$

so existiren q linear unabhängige, durch $\mathfrak{A}$ theilbare vollständige Polygone erster Gattung, und die diesen entsprechenden Differentialquotienten erster Gattung nach z, deren es ebenfalls q und nicht mehr linear unabhängige giebt, haben den Ausdruck

$$v = \frac{\mathfrak{A}'^2\mathfrak{B}}{\mathfrak{Z}},$$

worin $\mathfrak{B}$ ein Polygon von $2p-2-n$ Punkten bedeutet; die Classe B von $\mathfrak{B}$ ist die Ergänzungsclasse von A, und daher ihre Dimension gleich q (§ 27).

Diese Functionen v haben aber die Eigenschaft, dass in den Eckpunkten von $\mathfrak{A}$, d. h. für $z=\infty$ nicht nur zv, sondern auch

$$z^2 v = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{A}'^2\mathfrak{B}}{\mathfrak{Z}}$$

verschwindet, und sind hierdurch und durch die Forderung, Differential-

quotienten erster Gattung zu sein, völlig bestimmt. Denn ist

$$v = \frac{\mathfrak{A}^2\mathfrak{W}}{\mathfrak{Z}}, \quad vz^2 = \frac{\mathfrak{A}'^2\mathfrak{W}}{\mathfrak{Z}},$$

so muss, wenn $z^2 v$ in allen Punkten von $\mathfrak{A}$ verschwinden soll, $\mathfrak{W}$ durch $\mathfrak{A}$ theilbar sein, da $\mathfrak{A}'$ relativ prim zu $\mathfrak{A}$ vorausgesetzt ist. Es ist daher nach § 26, 3:

$$q = (r_{s+1}-2)+(r_{s+2}-2)+\cdots+(r_n-2),$$

andererseits

$$p = (r_{s+1}-1)+(r_{s+2}-1)+\cdots+(r_n-1),$$

folglich:

$$p-q = n-s, \quad s = n-p+q.$$

Hierin ist der *Riemann-Roch*sche *Satz* enthalten, dem wir, mit Rücksicht auf § 27, für diesen Fall folgenden Ausdruck geben können: *Sind A, B Ergänzungsclassen erster Gattung, von denen wenigstens die eine eine eigentliche ist, und a, b ihre Ordnungen, also*

$$a+b = 2p-2,$$

so ist

$$(O, A)-\tfrac{1}{2}a = (O, B)-\tfrac{1}{2}b.$$

5. Wir können, wenn wir den Fall $(A, W) = 0$ nicht ausschliessen, den *Riemann-Roch*schen Satz für beide Fälle dahin zusammenfassen:

Ist A eine eigentliche Classe von der Ordnung n, so ist ihre Dimension

$$(O, A) = n-p+1+(A, W).$$

Da die Dimension einer eigentlichen Classe (wenn sie nicht aus dem einzigen Nulleck besteht) mindestens $= 2$ sein muss, so folgt noch, wenn $(A, W) = 0$ ist,

$$n \geqq p+1,$$

und daraus der von *Riemann* herrührende Satz:

Jede Function, deren Ordnung $\leqq p$ ist, ist eine Function erster Gattung.

6. Es lässt sich mit Hülfe dieser Sätze leicht beweisen, *dass die Hauptclasse W der vollständigen Polygone erster Gattung stets eine eigentliche ist.*

Ist nämlich $\mathfrak{M}$ der Theiler von W, so lässt sich nach § 19, 2. in W ein Polygon $\mathfrak{A}\mathfrak{M}$ der Art finden, dass $\mathfrak{A}$ relativ prim zu $\mathfrak{M}$ ist. Die Classe A von $\mathfrak{A}$ ist eine eigentliche (§ 21, 3.), und zugleich ist $\mathfrak{A}\mathfrak{M}$ das einzige durch $\mathfrak{A}$ theilbare Polygon der Classe W (weil jedes Polygon in W den Theiler $\mathfrak{M}$ hat). Also ist

$$(A, W) = 1.$$

Nun ist p die Dimension von W, also auch die von A, und mithin nach dem *Riemann-Roch*schen Satze die Ordnung von A gleich $2p-2$, d. h. ebenso gross wie die von W. Mithin ist $\mathfrak{M} = \mathfrak{O}$.

§ 29.

Der *Riemann-Roch*sche Satz für uneigentliche Classen erster Gattung.

Ist A eine Classe erster Gattung vom Theiler $\mathfrak{M}$ und

$$A = \mathfrak{M} A',$$

so ist A' eine eigentliche Classe erster Gattung. Es sei B die Ergänzungsclasse von A; B' die von A'; a, b die Ordnungen der Classen A, B; m die Ordnung von $\mathfrak{M}$. Die gesammte Classe B erhält man, wenn man in sämmtlichen durch $\mathfrak{M}$ theilbaren Polygonen der Classe B' den Factor $\mathfrak{M}$ unterdrückt; denn ist

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{A}'\mathfrak{M}\mathfrak{B} = \mathfrak{W},$$

so gehört $\mathfrak{M}\mathfrak{B}$ in die Classe B', und umgekehrt, wenn

$$\mathfrak{A}'\mathfrak{B}' = \mathfrak{A}'\mathfrak{M}\mathfrak{B} = \mathfrak{W}$$

ist, so gehört $\mathfrak{B}$ in die Classe B.

Hieraus ergiebt sich aber nach § 21, 2.

$$(O,\ B) \geqq (O,\ B') - m.$$

Nun ist A' eine eigentliche Classe von derselben Dimension wie A und von der Ordnung $a-m$, also (§ 28, 5.)

$$(O,\ A) = (O,\ A') = a - m - p + 1 + (A',\ W),$$

oder

$$(O,\ A) = (O,\ B') - m + a - p + 1;$$

daher

$$(O,\ A) \overline{\overline{<}} (O,\ B) + a - p + 1 = (O,\ B) + \tfrac{1}{2}(a-b),$$

also

$$(O,\ A) - \tfrac{1}{2}a \overline{\overline{<}} (O,\ B) - \tfrac{1}{2}b.$$

Da aber die Classen A, B mit einander vertauscht werden können, so folgt in gleicher Weise

$$(O,\ B) - \tfrac{1}{2}b \overline{\overline{<}} (O,\ A) - \tfrac{1}{2}a,$$

d. h.

$$(O,\ A) - \tfrac{1}{2}a = (O,\ B) - \tfrac{1}{2}b,$$

wodurch der Riemann-Rochsche Satz in derselben Form wie in § 28, 4. *für Polygonclassen erster Gattung allgemein nachgewiesen ist* *).

§ 30.

Uneigentliche Classen zweiter Gattung.

Es soll nun die Bedingung aufgesucht werden, unter der eine Polygonclasse zweiter Gattung A von der Ordnung n überhaupt eine uneigentliche sein kann, wobei sich die allgemeine Gültigkeit des *Riemann-Roch*schen Satzes von selbst ergeben wird.

1. Jede Classe A kann stets durch Multiplication mit einer andern Classe N von der Ordnung ν in eine eigentliche Classe AN verwandelt werden. Denn ist $\mathfrak{A}$ ein beliebiges Polygon in A, so wähle man eine Variable z, welche in sämmtlichen Punkten von $\mathfrak{A}$ endlich bleibt (§ 15, 6.). Ist dann η eine beliebige Function des durch $\mathfrak{A}$ erzeugten Ideals in z, so ist das Obereck von η durch $\mathfrak{A}$ theilbar, also von der Form $\mathfrak{A}\mathfrak{N}$, und die Classe von $\mathfrak{A}\mathfrak{N}$ ist eine eigentliche.

2. Die Dimension der eigentlichen Classe AN zweiter Gattung ist nach § 28, 3.

$$(O, AN) = n+\nu-p+1,$$

und hieraus folgt nach § 21, 2.

$$(O, A) \geqq n-p+1.$$

Ist nun der Theiler $\mathfrak{M}$ der Classe A von der Ordnung m, und

$$A = \mathfrak{M}A',$$

so ist A' eine eigentliche Classe von derselben Dimension wie A, und mithin (§ 28, 5.)

$$(O, A) = (O, A') = n-m-p+1+(A', W),$$

also

$$(A', W) \geqq m,$$

d. h. A' muss gewiss von der ersten Gattung sein, wenn A eine uneigentliche Classe ist. Ist also B' die Ergänzungsclasse von A', so ist auch

$$(O, B') \geqq m.$$

*) Nach der Ausdrucksweise von *Christoffel* (Ueber die canonische Form der *Riemann*schen Integrale erster Gattung, Annali di Matematica pura ed applicata, Serie II, Tomo IX) ist

$$(A, W)+a-p = (O, B)+a-p = (O, A)-1$$

der „Ueberschuss“,

$$(A, W)-1 = (O, B)-1$$

der „Defect“ des Punktsystems $\mathfrak{A}$.

Wäre aber $(O, B') > m$, so würde sich nach § 20, 2. in B' ein durch $\mathfrak{M}$ theilbares Polygon $\mathfrak{M}\mathfrak{B}$ finden lassen und es wäre

$$\mathfrak{A}'\mathfrak{M}\mathfrak{B} = \mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{W},$$

also A von der ersten Gattung, gegen die Voraussetzung. Es ist also

$$(A', W) = m$$

und folglich

$$(O, A) = n - p + 1,$$

worin wieder der *Riemann-Roch*sche Satz für diesen Fall, genau in der Form von § 28, 3. enthalten ist.

3. Enthält die Classe A nur ein einziges isolirtes Polygon, so ist $(O, A) = n - p + 1 = 1$, mithin $n = p$, d. h. ein isolirtes Polygon zweiter Gattung hat stets die Ordnung p. Umgekehrt ist nach 2. jedes Polygon zweiter Gattung von der Ordnung p ein isolirtes.

4. Unter Beibehaltung der Bezeichnung von 2. ist $(O, B') = m$, und daher lässt sich nach dem oft angewandten Satze (§ 20, 2.) in B' ein durch ein beliebiges $(m-1)$-Eck theilbares Polygon finden. Setzt man also, indem man einen beliebigen Punkt $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{M}$ absondert,

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{P}\mathfrak{M}',$$

so ist ein Polygon $\mathfrak{M}'\mathfrak{B}$ in B' enthalten und also

$$\mathfrak{A}'\mathfrak{M}'\mathfrak{B} = \mathfrak{W}.$$

Das Polygon $\mathfrak{A}'\mathfrak{M}' = \mathfrak{A}''$ und seine Classe A'' sind daher von der ***ersten Gattung,*** und A hat, wenn P die Classe von $\mathfrak{P}$ bedeutet, die Form

$$A = PA''.$$

Zugleich muss $(A'', W) = (O, B'') = 1$ sein, d. h. die Ergänzungsclasse B'' von A'' enthält nur ein einziges isolirtes Polygon $\mathfrak{B}''$, da sonst in B'' ein durch $\mathfrak{P}$ theilbares Polygon existiren würde, und also auch A gegen die Voraussetzung von der ersten Gattung wäre.

5. Ist umgekehrt A'' eine Classe erster Gattung, für welche $(A'', W) = 1$, so dass die Ergänzungsclasse B'' von A'' aus einem isolirten Polygon $\mathfrak{B}''$ besteht; ist ferner $\mathfrak{P}$ ein in $\mathfrak{B}''$ nicht aufgehender Punkt, und seine Classe P, so ist $A = PA''$ eine uneigentliche Classe zweiter Gattung von der Ordnung n, in deren Theiler $\mathfrak{P}$ aufgeht.

Dass A von der zweiten Gattung ist, ergiebt sich zunächst aus der Annahme, dass $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{B}''$ nicht aufgeht. Die Dimension von A ist daher nach 2.

$$(O, A) = n - p + 1,$$

wo n die Ordnung von A bedeutet; andererseits ist die Dimension der Classe A'' nach §§ 28 und 29:

$$(O, A'') = n - p + (A'', W) = n - p + 1;$$

also sind A und A'' von derselben Dimension. Sämmtliche Polygone der Classe A'' gehen aber durch Multiplication mit $\mathfrak{P}$ in Polygone der Classe A über, und wegen der Gleichheit der Dimensionen wird hierdurch auch die letzte Classe vollständig erschöpft. Es enthalten daher sämmtliche Polygone der Classe A den Factor $\mathfrak{P}$, der sonach auch im Theiler von A aufgeht.

6. In dem besonderen Fall, wo das Geschlecht p des Körpers Ω den Werth 0 hat, kommen Polygone und Classen erster Gattung überhaupt nicht vor. Es existiren also in diesem Falle auch keine uneigentlichen Classen. Die Dimension einer jeden Classe ist um 1 grösser als ihre Ordnung. Insbesondere gehört also auch jeder Punkt $\mathfrak{P}$ zu einer eigentlichen Classe von der Dimension 2, und daher existiren in diesem Fall in Ω Functionen z, welche von der ersten Ordnung sind. Durch eine solche lässt sich jede andere Function des Körpers *rational* ausdrücken, denn die zwischen z und einer andern Variabeln des Körpers bestehende irreductible Gleichung ist in Bezug auf letztere vom ersten Grad (§ 15, 7.).

§ 31.

Die Differentiale zweiter und dritter Gattung.

1. Ist jetzt nach der in § 25 eingeführten Bezeichnung

$$d\varpi = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$$

ein beliebiges Differential in Ω, also, wenn a, b die Ordnungen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind,

$$a = b + 2p - 2,$$

und werden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ als relativ prim vorausgesetzt, so muss, wenn $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{Z}$ Untereck und Verzweigungspolygon für eine beliebige Variable z bedeuten, $\mathfrak{U}^2\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{Z}\mathfrak{B}$ äquivalent sein (§ 25). Bezeichnet man also mit U, Z, A, B die Classen der Polygone $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, so muss

$$U^2 A = ZB$$

sein. Andererseits ist aber, wenn W die Hauptclasse erster Gattung ist,

$$U^2 W = Z,$$

woraus sich die Relation

$$A = BW$$

ergiebt. Ist umgekehrt $\mathfrak{A}$ ein beliebiges Polygon der Classe BW, so folgt daraus die Aequivalenz von $\mathfrak{U}^2\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{Z}\mathfrak{B}$, also die Existenz eines Differentials von der Bezeichnung $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$. Daraus ergiebt sich, dass $\mathfrak{B}$ dann und nur dann Untereck eines Differentials $d\varpi$ sein kann, wenn in BW ein zu $\mathfrak{B}$ relativ primes Polygon existirt, d. h. wenn der Theiler der Classe BW relativ prim zu $\mathfrak{B}$ ist. Die Dimension der Classe BW giebt dann zugleich die Dimension der zum Untereck $\mathfrak{B}$ gehörigen Schaar von Differentialen $d\varpi$ (§ 25). Die Sätze § 30, 4., 5. ergeben daher, da $(W, W) = 1$ ist, das folgende Resultat.

a) Besteht $\mathfrak{B}$ aus einem einzigen Punkt (ist $b = 1$), so ist die Classe BW eine uneigentliche mit dem Theiler $\mathfrak{B}$; ***also kann die Ordnung b des Unterecks eines Differentials $d\varpi$ nicht gleich Eins sein.***

b) Ist $b \geqq 2$, so ist BW stets eine eigentliche Classe zweiter Gattung und daher ihre Dimension

$$b+p-1.$$

Untereck eines Differentials kann also jedes beliebige Polygon von mehr als einem Punkt sein, und es existiren unter den zu einem Untereck von der Ordnung b gehörigen Differentialen $b+p-1$ linear unabhängige.

2. Wir suchen jetzt unter der Voraussetzung, dass $b \gtreqless 2$ ist, für die Classe A eine Basis der Art auf, dass jedes Element $\mathfrak{A}_r$ dieser Basis ein Differential $d\varpi_r$ von möglichst einfacher Beschaffenheit liefert, nämlich ein solches, dessen Untereck eine Potenz eines einzelnen Punktes oder das Product aus nur zwei verschiedenen Punkten ist.

Angenommen, es sei für die Classe BW eine solche Basis bereits gefunden

$$(1.) \quad \mathfrak{A}_1, \ \mathfrak{A}_2, \ \mathfrak{A}_3, \ \ldots \ \mathfrak{A}_{b+p-1},$$

so bilden wir daraus, wenn P die Classe eines beliebigen Punktes $\mathfrak{P}$ bedeutet, eine ebensolche Basis für die Classe BPW von der Dimension $b+p$, nämlich

$$(2.) \quad \mathfrak{P}\mathfrak{A}_1, \ \mathfrak{P}\mathfrak{A}_2, \ \ldots \ \mathfrak{P}\mathfrak{A}_{b+p-1}, \ \mathfrak{A}'.$$

Die ersten $b+p-1$ dieser Polygone gehören wirklich der Classe BPW an und sind von einander unabhängig, weil es die Polygone (1.) sind; zugleich

sind die aus ihnen gebildeten Differentiale

$$d\varpi_r = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{A}_r}{\mathfrak{P}\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{A}_r}{\mathfrak{B}}$$

mit den aus (1.) gebildeten identisch. Es kommt also nur noch auf die Bildung von $\mathfrak{A}'$ an, wobei zwei Fälle zu unterscheiden sind.

a) Geht $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{B}$ auf und ist $\mathfrak{B} = \mathfrak{M}\mathfrak{P}^m$, $\mathfrak{M}$ nicht durch $\mathfrak{P}$ theilbar, so ist $P^{m+1}W$ eine eigentliche Classe (weil $m+1 \geqq 2$, § 30, 4.), in welcher folglich ein durch $\mathfrak{P}$ nicht theilbares Polygon $\mathfrak{N}$ existirt; setzt man nun $\mathfrak{A}' = \mathfrak{M}\mathfrak{N}$, so gehört $\mathfrak{A}'$ der Classe BPW an und ist durch $\mathfrak{P}$ nicht theilbar, folglich auch nicht in der Schaar $(\mathfrak{P}\mathfrak{A}_1, \mathfrak{P}\mathfrak{A}_2, \ldots \mathfrak{P}\mathfrak{A}_{b+p-1})$, deren Theiler $\mathfrak{P}$ ist, enthalten; mithin sind die Polygone (2.) unabhängig von einander, und da ihre Anzahl $b+p$ ist, so bilden sie eine Basis der Classe BPW. Das aus $\mathfrak{A}'$ gebildete Differential

$$d\varpi' = \frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{P}\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{P}^{m+1}}$$

hat die geforderte Form, da sein Untereck eine Potenz eines einzelnen Punktes ist.

b) Geht $\mathfrak{P}$ nicht in $\mathfrak{B}$ auf, so wähle man ein für allemal einen in $\mathfrak{B}$ aufgehenden Punkt $\mathfrak{P}_1$ und setze $\mathfrak{B} = \mathfrak{M}\mathfrak{P}_1$ (gleichgültig ob $\mathfrak{M}$ durch $\mathfrak{P}_1$ theilbar ist oder nicht). Man wähle sodann in der eigentlichen Classe PP_1W ein durch $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ nicht theilbares Polygon $\mathfrak{N}$, so gehört $\mathfrak{A}' = \mathfrak{M}\mathfrak{N}$ wieder in die Classe PBW, und da $\mathfrak{A}'$ nicht durch $\mathfrak{P}$ theilbar ist, so folgt wie oben, dass die Polygone (2.) eine Basis von BPW bilden. Zugleich ist

$$d\varpi' = \frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{P}\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1},$$

also von der verlangten Form.

Es bleibt noch übrig, den Anfang dieser Operation zu beschreiben. Ist $b = 0$, also $\mathfrak{B} = \mathfrak{O}$, so ist

$$BW = W = (\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_2, \ldots \mathfrak{W}_p)$$

(die Hauptclasse erster Gattung).

Ist $b = 2$, so wähle man aus der eigentlichen Classe BW ein Polygon $\mathfrak{N}$, welches relativ prim zu $\mathfrak{B}$ ist; dann ist

$$BW = (\mathfrak{B}\mathfrak{W}_1, \mathfrak{B}\mathfrak{W}_2, \ldots \mathfrak{B}\mathfrak{W}_p, \mathfrak{N}).$$

Geht man von dieser Basis aus, um in der oben beschriebenen Weise eine Basis (1.) zu bestimmen, die dem beliebig gegebenen Polygon

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{P}_1^{m_1}\mathfrak{P}_2^{m_2}\mathfrak{P}_3^{m_3}\ldots$$

entspricht, und bestimmt die beiden Polygone $\mathfrak{A}'_r$, $\mathfrak{B}'_r$ aus der Bedingung

$$d\varpi_r = \frac{\mathfrak{A}_r}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{A}'_r}{\mathfrak{B}'_r},$$

so dass sie keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, so sind die Polygone $\mathfrak{B}'_r$, die als Unterecke der Differentiale $d\varpi_r$ auftreten, folgende:

a) p-mal tritt der Nenner $\mathfrak{O}$ auf, und die zugehörigen Differentiale $d\varpi_r$ sind die ***Differentiale erster Gattung.***

b) Je einmal treten die Unterecke $\mathfrak{P}_1^2, \mathfrak{P}_1^3, \ldots \mathfrak{P}_1^{m_1}$ (wenn $m_1 \gtreqless 2$), $\mathfrak{P}_2^2, \mathfrak{P}_2^3, \ldots \mathfrak{P}_2^{m_2}$; $\mathfrak{P}_3^2, \mathfrak{P}_3^3, \ldots \mathfrak{P}_3^{m_3}, \ldots$ auf.

Die zu den Unterecken $\mathfrak{P}^r$ gehörigen Differentiale $d\varpi_r$ werden, wenn eine genauere Unterscheidung nöthig ist, mit $dt_{(\mathfrak{P}^{r-1})}$ bezeichnet und heissen ***Differentiale zweiter Gattung.***

c) Endlich treten die Producte $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_3, \ldots$ (bei festgehaltenem $\mathfrak{P}_1$) je einmal auf. Die zugehörigen Differentiale $d\varpi_r$ werden mit $d\pi_{(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_r)}$ bezeichnet und heissen ***Differentiale dritter Gattung.***

Jedes Differential $d\varpi$, dessen Untereck $\mathfrak{B}$ ist, kann in der Form dargestellt werden

$$(3.) \qquad d\varpi = \sum^r c_r \, d\varpi_r$$

mit constanten Coefficienten c_r, welche die *Normalform* des Differentials $d\varpi$ genannt wird. Hat man jedes der einzelnen Differentiale $d\varpi_r$ auf eine bestimmte Art gewählt, so lässt sich die Normalform auch ***nur auf eine einzige Weise*** herstellen, was unmittelbar aus der linearen Unabhängigkeit der Differentiale $d\varpi_r$ folgt.

§ 32.

Die Residuen.

1. Ist $d\varpi$ ein beliebiges Differential in Ω und $\mathfrak{P}$ ein Punkt, der m-mal im Untereck $\mathfrak{B}$ desselben vorkommt ($m \gtreqless 0$), so wähle man eine Variable z so, dass sie in $\mathfrak{P}$ ∞^1 wird. Es lässt sich dann (nach § 15, 4.), und zwar nur auf eine Weise, setzen

$$(1.) \qquad \frac{d\varpi}{dz} = a_{m-2} z^{m-2} + a_{m-3} z^{m-3} + \cdots + a_1 z + a_0 + a_{-1} z^{-1} + \eta z^{-2},$$

worin die a Constanten, η eine Function in Ω, die in $\mathfrak{P}$ endlich ist. Der Coefficient $-a_{-1}$ von $-z^{-1}$ in diesem Ausdruck heisst das ***Residuum des Differentials $d\varpi$ in Bezug auf den Punkt $\mathfrak{P}$.*** Aus dieser Definition ergeben sich die folgenden Sätze:

2. Das Residuum in Bezug auf einen Punkt $\mathfrak{P}$ kann nur dann von Null verschieden sein, wenn $m > 0$, d. h. wenn der Punkt $\mathfrak{P}$ im Untereck von $d\varpi$ wirklich vorkommt, und ist daher für die Differentiale erster Gattung immer gleich 0.

3. Das Residuum einer Summe von Differentialen ist gleich der Summe der Residuen der einzelnen Differentiale.

4. Das Residuum eines *eigentlichen* Differentials ist stets gleich 0. Ist nämlich σ eine Function in Ω, und wenn die b Constanten, σ' eine in $\mathfrak{P}$ endliche Function bedeuten,

$$\sigma = b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + \sigma',$$

so ergiebt sich durch Differentiation dieses Ausdruckes nach z, da $\frac{d\sigma'}{dz}$ in $\mathfrak{P}$ unendlich klein von mindestens zweiter Ordnung ist (§ 23, 10.), dass in dem Ausdruck für $\frac{d\sigma}{dz}$ ein Glied mit z^{-1} gar nicht vorkommt, womit die Behauptung erwiesen ist.

5. Das Residuum eines Differentials $d\varpi$ ist unabhängig von der Wahl der Veränderlichen z. Ist nämlich z_1 eine zweite Veränderliche von derselben Beschaffenheit wie z, also, wenn a constant, ζ in $\mathfrak{P}$ endlich ist:

$$(2.)\qquad z = a z_1 + \zeta,$$

so ergiebt sich, wenn zur Abkürzung

$$\alpha = \frac{a_{m-2} z^{m-1}}{m-1} + \frac{a_{m-3} z^{m-2}}{m-2} + \cdots + a_0 z$$

gesetzt wird:

$$\frac{d\varpi}{dz_1} = \frac{d\varpi}{dz}\frac{dz}{dz_1} = \frac{d\alpha}{dz_1} + a_{-1} z^{-1}\frac{dz}{dz_1} - \eta\frac{dz^{-1}}{dz_1}.$$

Nun ist, wenn ζ', ζ'' in $\mathfrak{P}$ endliche Functionen sind, wie sich nach § 23 und § 15, 4. leicht ergiebt:

$$z^{-1}\frac{dz}{dz_1} = z_1^{-1} + z_1^{-2}\zeta', \quad \frac{dz^{-1}}{dz_1} = z_1^{-2}\zeta'',$$

und daraus folgt nach 3., 4. die Richtigkeit der aufgestellten Behauptung*).

6. ***Die Summe der Residuen eines jeden Differentials $d\varpi$ in Bezug auf alle Punkte $\mathfrak{P}$ ist stets gleich Null.***

---

*) Man kann bei der Definition des Residuums auch eine Veränderliche r zu Grunde legen, die in $\mathfrak{P}$ unendlich *klein* in der ersten Ordnung ist. Ist dann

$$\frac{d\varpi}{dr} = a_m r^{-m} + \cdots + a_1 r^{-1} + \eta$$

und η in $\mathfrak{P}$ endlich, so ist a_1 das Residuum von $d\varpi$ in Bezug auf $\mathfrak{P}$.

Beim Beweise dieses wichtigen Satzes können wir uns auf die Betrachtung der Residuen beschränken, welche zu den sämmtlichen im Untereck $\mathfrak{B}$ von $d\varpi$ aufgehenden von einander verschiedenen Punkten gehören; wir fügen jedoch zu diesen noch so viele von einander verschiedene willkürliche Punkte mit verschwindenden Residuen hinzu, bis wir ein aus lauter einfachen Punkten bestehendes einer eigentlichen Classe angehöriges Polygon $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\ldots\mathfrak{P}_n$ erhalten. Dann wählen wir eine Variable z von der Ordnung n, deren Untereck eben dies Polygon ist, welche also in jedem der Punkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_n$ und nur in diesen ∞^1 wird. Unter diesen finden sich dann sämmtliche von einander verschiedene in $\mathfrak{B}$ aufgehende Punkte. Es ergiebt sich unter dieser Voraussetzung für $\iota = 1, 2, \ldots n$

$$(3.)\qquad \frac{d\varpi}{dz} = a^{(\iota)}_{m-2}z^{m-2} + a^{(\iota)}_{m-3}z^{m-3} + \cdots + a^{(\iota)}_0 + a^{(\iota)}_{-1}z^{-1} + \eta^{(\iota)}z^{-2},$$

wo $\eta^{(\iota)}$ eine in $\mathfrak{P}_\iota$ endliche Function bedeutet. Lassen wir für die Constanten $a^{(\iota)}$ auch den Werth 0 zu, so kann der Exponent m unabhängig von ι angenommen werden (m ist dann, wenn nicht alle $a^{(\iota)}_{m-2}$ verschwinden, der Exponent der höchsten Potenz eines einzelnen Punktes, welche in $\mathfrak{B}$ vorkommt). Der zu beweisende Satz besteht dann darin, dass $\sum\limits^{\iota} a^{(\iota)}_{-1} = 0$ ist. Um ihn zu beweisen, bilden wir die Spur der Function $\frac{d\varpi}{dz}$ für die Variable z (§ 2) und bedienen uns dabei einer Erweiterung des Verfahrens § 16, 4. Wir wählen ein Functionensystem $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$ in Ω folgendermassen: Es sei

$\varrho_1 = 0^m$ in $\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3, \ldots \mathfrak{P}_n$, endlich und von Null verschieden in $\mathfrak{P}_1$,
$\varrho_2 = 0^m$ in $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_3, \ldots \mathfrak{P}_n$, „ „ „ „ „ „ $\mathfrak{P}_2$,
. . . .
$\varrho_n = 0^m$ in $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_{n-1}$, „ „ „ „ „ „ $\mathfrak{P}_n$.

Sind nun $x_1, x_2, \ldots x_n$ rationale Functionen von z, und ist

$$\eta = x_1\varrho_1 + x_2\varrho_2 + \cdots + x_n\varrho_n$$

eine Function in Ω, welche für $z = \infty$, d. h. in $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_n$ endlich ist, so müssen $x_1, x_2, \ldots x_n$ ebenfalls für $z = \infty$ endlich sein. Sind nämlich die $x_1, x_2, \ldots x_n$ für $z = \infty$ *nicht* alle endlich, so existirt ein positiver Exponent r von der Beschaffenheit, dass die Producte $x_1 z^{-r}, x_2 z^{-r}, \ldots x_n z^{-r}$ für $z = \infty$ alle endlich sind, und mindestens eines von ihnen, etwa $x_1 z^{-r}$ von Null verschieden; dann enthält aber die Gleichung

$$\eta z^{-r} = x_1 z^{-r}\varrho_1 + \cdots + x_n z^{-r}\varrho_n$$

den Widerspruch, dass im Punkte $\mathfrak{P}_1$ die linke Seite und alle Glieder der rechten Seite mit Ausnahme des ersten verschwinden.

Hieraus ergiebt sich zugleich, wenn man $\eta = 0$ setzt, dass die Functionen $\varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_n$ eine Basis von Ω bilden. Setzt man daher, indem man mit $x_{\iota,\iota'}$ rationale Functionen von s bezeichnet,

$$(4.) \quad \frac{d\varpi}{dz}\varrho_\iota = x_{\iota,1}\varrho_1 + x_{\iota,2}\varrho_2 + \cdots + x_{\iota,n}\varrho_n, \qquad (\iota = 1, 2, \dots n)$$

so ist (§ 2)

$$(5.) \quad S\left(\frac{d\varpi}{dz}\right) = x_{1,1} + x_{2,2} + \cdots + x_{n,n}.$$

Nun ist, wie aus (3.) hervorgeht, $z^{-m+2}\frac{d\varpi}{dz}\varrho_\iota$ für $z = \infty$ endlich und daraus ergiebt sich nach der soeben bewiesenen Eigenschaft der Functionen ϱ, dass auch

$$z^{-m+2}x_{\iota,\iota'}$$

für $z = \infty$ endlich sind. Nun sind z. B. in dem Punkt $\mathfrak{P}_2$ die Functionen $\varrho_1, \varrho_3, \dots \varrho_n$ unendlich klein in der m^{ten} Ordnung, während ϱ_2 dort endlich und von Null verschieden ist. Daher werden in $\mathfrak{P}_2$ die Functionen

$$z\frac{d\varpi}{dz}\varrho_1, \quad z x_{1,1}\varrho_1, \quad z x_{1,3}\varrho_3, \quad \dots \quad z x_{1,n}\varrho_n$$

alle verschwinden, und es muss mithin auch $z x_{1,2}$ für $z = \infty$ verschwinden. Das Gleiche folgt für $z x_{1,3}, \dots z x_{1,n}$ und allgemein für $z x_{\iota,\iota'}$, sobald ι, ι' von einander verschieden sind. Daher wird $z^2 x_{\iota,\iota'}$ für $z = \infty$ endlich sein.

Setzt man nun, indem man x_ι eine neue rationale Function bedeuten lässt,

$$(6.) \quad x_{\iota,\iota} = a_{m-2}^{(\iota)} z^{m-2} + a_{m-3}^{(\iota)} z^{m-3} + \cdots + a_{-1}^{(\iota)} z^{-1} + x_\iota z^{-2},$$

so folgt aus (3.)

$$x_{\iota,\iota} - \frac{d\varpi}{dz} = z^{-2}(x_\iota - \eta^{(\iota)}),$$

und aus (4.)

$$(\eta^{(\iota)} - x_\iota)\varrho_\iota = z^2 x_{\iota,1}\varrho_1 + \cdots + z^2 x_{\iota,\iota-1}\varrho_{\iota-1} + z^2 x_{\iota,\iota+1}\varrho_{\iota+1} + \cdots + z^2 x_{\iota,n}\varrho_n.$$

Da nun in $\mathfrak{P}_\iota$ $\eta^{(\iota)}$ endlich und ϱ_ι von Null verschieden, ferner alle Glieder der rechten Seite Null sind, so folgt, dass auch x_ι im Punkte $\mathfrak{P}_\iota$, und mithin, da es rational ist, für $z = \infty$ endlich ist. Aus (5.) und (6.) ergiebt sich dann

$$(7.) \quad S\left(\frac{d\varpi}{dz}\right) = \sum^\iota a_{m-2}^{(\iota)} z^{m-2} + \sum^\iota a_{m-3}^{(\iota)} z^{m-3} + \cdots + \sum^\iota a_{-1}^{(\iota)} z^{-1} + \sum^\iota x_\iota z^{-2}.$$

Nun ist aber andererseits, wenn wieder $\mathfrak{U}$ das Untereck, $\mathfrak{Z}$ das Verzweigungspolygon von z ist:

$$\frac{d\varpi}{dz} = \frac{\mathfrak{U}^2\mathfrak{A}}{\mathfrak{Z}\mathfrak{B}},$$

und $\mathfrak{B}$ enthält keinen Punkt, der nicht auch in $\mathfrak{U}$ enthalten ist. Daraus ergiebt sich wie in § 26, dass $\frac{d\varpi}{dz}$, als Function von z aufgefasst, eine Function des zu $\mathfrak{o}$ complementären Moduls $\mathfrak{e}$ ist, und mithin ist

$$S\left(\frac{d\varpi}{dz}\right)$$

eine *ganze* rationale Function von z (§ 11, 4.). Beachtet man dies, so folgt aus (7.) $\overset{\iota}{\Sigma} x_\iota = 0$ und ferner der zu beweisende Satz

$$\overset{(\iota)}{\Sigma} a_{-1}^{(\iota)} = 0.$$

Wir können diesem Satze auch den folgenden Ausdruck geben: Das Residuum eines Differentials zweiter Gattung $dt_{(\mathfrak{P}')}$ in Bezug auf den Punkt $\mathfrak{P}$ ist Null.

Die Residuen eines Integrals dritter Gattung $d\pi_{(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2)}$ in Bezug auf $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ sind einander gleich und entgegengesetzt, und sicher von Null verschieden, da sonst $d\pi$ ein Differential erster Gattung sein würde.

Aus diesen Bemerkungen ergiebt sich noch mittelst 4., dass ein eigentliches Differential $d\sigma$, in der Normalform dargestellt, kein Differential dritter Gattung enthalten kann. Es verdient ferner erwähnt zu werden, dass die Residuen des *logarithmischen* Differentials $\frac{d\sigma}{\sigma}$ ganze Zahlen, nämlich die Ordnungszahlen der Function σ sind (zufolge § 23).

§ 33.

Relationen zwischen Differentialen erster und zweiter Gattung.

1. Es sei σ eine Function in Ω mit dem Untereck

$$\mathfrak{B}' = \mathfrak{P}_1^{m_1-1}\mathfrak{P}_2^{m_2-1}\ldots \qquad (m_1, m_2, \ldots \geqq 2)$$

und dem Verzweigungspolygon (§ 16)

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}'\mathfrak{P}_1^{m_1-2}\mathfrak{P}_2^{m_2-2}\ldots,$$

worin $\mathfrak{S}'$ durch die als verschieden vorausgesetzten Punkte $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, ... nicht theilbar ist. Demnach ist in der symbolischen Bezeichnung von § 25 das eigentliche Differential

$$d\sigma = \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{B}'^2} = \frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{P}_1^{m_1}\mathfrak{P}_2^{m_2}\ldots},$$

woraus zunächst hervorgeht, *dass ein eigentliches Differential niemals von der ersten Gattung sein kann.*

2. Das eigentliche Differential $d\sigma$, welches in seiner Darstellung durch die Normalform nur Differentiale erster und zweiter Gattung enthalten kann, gehört zu der Schaar derjenigen Differentiale, deren Untereck

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{P}_1^{m_1} \mathfrak{P}_2^{m_2} \cdots = \mathfrak{B}' \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \ldots$$

ist. Umgekehrt wird man also auch in einer solchen Schaar, vorausgesetzt dass $m_1, m_2, \ldots \geqq 2$ sind, und dass $\mathfrak{B}'$ zu einer *eigentlichen Polygonclasse* gehört, stets mindestens ein eigentliches Differential $d\sigma$ finden. Denn dazu ist nach 1. nur erforderlich, dass in Ω eine Function σ mit dem Untereck $\mathfrak{B}'$ existirt.

3. Hieraus ergiebt sich nun der folgende wichtige Satz. ***Alle Differentiale zweiter Gattung lassen sich linear mit constanten Coefficienten darstellen durch p besondere passend gewählte Differentiale zweiter Gattung, durch Differentiale erster Gattung und durch eigentliche Differentiale.***

Um dies einzusehen, wähle man ein beliebiges Polygon zweiter Gattung $\mathfrak{A}$ von der Ordnung p. Ist nun $\mathfrak{P}$ ein beliebiger Punkt, r ein positiver Exponent, so ist das Polygon $\mathfrak{A}\mathfrak{P}^r$ gleichfalls von der zweiten Gattung, und folglich kann der Theiler $\mathfrak{M}$ der zugehörigen Classe nicht durch $\mathfrak{P}$ theilbar sein, weil sonst $\mathfrak{A}\mathfrak{P}^{r-1}$, also auch $\mathfrak{A}$ ein Polygon erster Gattung wäre (§ 30, 4.). Setzt man daher

$$\mathfrak{A}\mathfrak{P}^r = \mathfrak{M}\mathfrak{B}',$$

so wird $\mathfrak{P}$ nicht in $\mathfrak{M}$ aufgehen, und folglich enthält $\mathfrak{B}'$ den Factor $\mathfrak{P}$ genau r-mal öfter als $\mathfrak{A}$. Zugleich gehört $\mathfrak{B}'$ in eine eigentliche Classe. Ist nun

$$\mathfrak{B}' = \mathfrak{P}^{m+r} \mathfrak{P}'^{m'} \mathfrak{P}''^{m''} \ldots,$$

so gehen die Punktpotenzen $\mathfrak{P}^m$, $\mathfrak{P}'^{m'}$, $\mathfrak{P}''^{m''}$, ... alle in $\mathfrak{A}$ auf. Setzen wir also

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{P}^{m+r+1} \mathfrak{P}'^{m'+1} \mathfrak{P}''^{m''+1} \ldots = \mathfrak{B}' \mathfrak{P} \mathfrak{P}' \mathfrak{P}'' \ldots,$$

so existirt nach 2. in der zu dem Untereck $\mathfrak{B}$ gehörigen Differentialschaar gewiss ein eigentliches Differential $d\sigma$. Die Darstellung desselben durch die Normalform enthält sicher das Differential

$$(1.) \qquad dt_{(\mathfrak{P}^{m+r})}$$

und ausserdem alle oder einige der Differentiale

$$(2.) \qquad \begin{cases} dt_{(\mathfrak{P})}, & dt_{(\mathfrak{P}^2)}, & \ldots & dt_{(\mathfrak{P}^m)} \ldots dt_{(\mathfrak{P}^{m+r-1})}, \\ dt_{(\mathfrak{P}')}, & dt_{(\mathfrak{P}'^2)}, & \ldots & dt_{(\mathfrak{P}'^{m'})}, \\ dt_{(\mathfrak{P}'')}, & dt_{(\mathfrak{P}''^2)}, & \ldots & dt_{(\mathfrak{P}''^{m''})} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases}$$

nebst Differentialen erster Gattung. Es lässt sich also das Differential (1.) linear und mit constanten Coefficienten durch (2.), durch Differentiale erster Gattung und durch $d\sigma$ ausdrücken.

Ist daher das p-Eck zweiter Gattung

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{P}_1^{m_1} \mathfrak{P}_2^{m_2} \dots$$

so erkennt man durch wiederholte Anwendung des hier beschriebenen Verfahrens, dass alle Differentiale zweiter Gattung in der Weise, wie unser Satz es ausspricht, darstellbar sind durch die p Differentiale

$$(3.) \quad \begin{cases} dt_{(\mathfrak{P}_1)} \cdots dt_{(\mathfrak{P}_1^{m_1})}, \\ dt_{(\mathfrak{P}_2)} \cdots dt_{(\mathfrak{P}_2^{m_2})}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases}$$

Braunschweig und Königsberg i. Pr., im October 1880.

Ueber die Irreductibilität von Differentialgleichungen.

(Von Herrn *L. Königsberger* in Wien.)

Eine algebraische Differentialgleichung von der Form

$$(1.)\quad \begin{cases} y^{(m)^k}+f_1(x,y,y',\dots y^{(m-1)})y^{(m)^{k-1}}+\cdots \\ \qquad \cdots+f_{k-1}(x,y,y',\dots y^{(m-1)})y^{(m)}+f_k(x,y,y',\dots y^{(m-1)})=0 \end{cases}$$

wurde in meiner Arbeit*) „Allgemeine Bemerkungen zum *Abel*schen Theorem" irreductibel genannt, wenn

1. die linke Seite derselben, als algebraisches ganzes Polynom von $y^{(m)}$ aufgefasst, sich für kein Integral der Differentialgleichung in Factoren von einem in dieser Grösse niedrigeren Grade zerlegen lässt, deren Coefficienten ebenso wie die f_α-Functionen rational aus $x, y, y', \dots y^{(m-1)}$ zusammengesetzt sind, und

2. die Differentialgleichung kein Integral mit einer Differentialgleichung von einer niederen Ordnung μ als der m^{ten} gemein hat, deren linke Seite wiederum rational aus $x, y, y', \dots y^{(\mu)}$ zusammengesetzt ist.

Diese Irreductibilitätsbedingungen lassen sich noch in eine andere äquivalente Form bringen, die für manche Untersuchungen brauchbarer ist. Es werde zunächst angenommen, dass die Differentialgleichung (1.) dadurch reductibel sei, dass sie mit einer Differentialgleichung derselben Ordnung, aber niedrigeren Grades δ in Bezug auf $y^{(m)}$

$$(2.)\quad y^{(m)^\delta}+\varphi_1(x,y,y',\dots y^{(m-1)})y^{(m)^{\delta-1}}+\cdots+\varphi_\delta(x,y,y',\dots y^{(m-1)})=0$$

ein Integral y_1 gemein hat. Fasst man (1.) und (2.) als algebraische Gleichungen in der Grösse $y_1^{(m)}$ auf, nachdem für $y, y', \dots y^{(m-1)}$ die Grössen $y_1, y_1', \dots y_1^{(m-1)}$ substituirt sind, so wird, wenn man annimmt, dass δ der niedrigste Grad einer solchen Gleichung (2.) ist, welche mit (1.) das Inte-

---

*) Dieses Journal Bd. 90, Heft 2.

gral y_1 gemein hat, das Verfahren der Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers zwischen den Polynomen der Gleichungen (1.) und (2.) nothwendig einen Rest von der Form

$$(3.)\quad \begin{cases} \psi_0(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m-1)}) y_1^{(m)\alpha} + \psi_1(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m-1)}) y_1^{(m)\alpha-1} + \cdots \\ \qquad\qquad \cdots + \psi_\alpha(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m-1)}) \end{cases}$$

ergeben, welcher, da δ der kleinste Grad war, dadurch verschwinden muss, dass

$$(4.)\quad \psi_0(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m-1)}) = 0, \quad \dots \quad \psi_\alpha'(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m-1)}) = 0$$

wird. Nimmt man nun an, jenes gemeinsame Integral y_1 von (1.) und (2.) sei nicht ein Integral einer Differentialgleichung niederer Ordnung als der m^{ten}, so müssen die ψ-Functionen (4.) für jedes Werthsystem $x, y, y', \dots y^{(m-1)}$ verschwinden; ist dies jedoch der Fall, so muss die linke Seite von (2.) als ganzes Polynom von $y^{(m)}$ aufgefasst in dem durch die linke Seite von (1.) dargestellten Polynome enthalten sein, d. h. die Differentialgleichung (1.) muss dann im algebraischen Sinne in Bezug auf $y^{(m)}$ reductibel sein.

So hat z. B. die Differentialgleichung erster Ordnung und zweiten Grades in Bezug auf y'

$$y'^2 - y' - (y-x)^2 - (y-x) = 0$$

mit der in Bezug auf y' linearen Differentialgleichung

$$y' - y + x - 1 = 0$$

das transcendente Integral $y = x + e^x$ gemein; verfährt man zwischen diesen beiden Gleichungen nach der Methode des grössten gemeinschaftlichen Theilers, so ergiebt sich der Rest $(y-x)^2 + y - x - (y-x)^2 - (y-x)$ identisch Null, während der Quotient $y' + y - x$ wird; es muss die gegebene in y' quadratische Differentialgleichung in Bezug auf diese Grösse algebraisch reductibel sein, und in der That ist

$$y'^2 - y' - (y-x)^2 - (y-x) = [y' - y + x - 1][y' + y - x].$$

Eine algebraische Differentialgleichung kann somit nur dann reductibel sein, wenn sie entweder mit einer Differentialgleichung niederer Ordnung ein Integral gemein hat oder wenn dieselbe in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten im algebraischen Sinne reductibel ist, und wir dürfen daher auch sagen, *die Gleichung* (1.) *ist irreductibel, wenn sie weder in Bezug auf $y^{(m)}$ im algebraischen Sinne reductibel ist, noch mit einer algebraischen Differentialgleichung niederer Ordnung und derselben Form ein Integral gemein hat.*

Aber dieser Definition der Irreductibilität kann noch eine andere Form gegeben werden. Habe nämlich die Differentialgleichung (1.) ein Integral y_1 mit einer Differentialgleichung niederer Ordnung gemein, so wollen wir annehmen, dass die Differentialgleichung niedrigster Ordnung, welche y_1 zu einem Integral hat,

$$(5.)\qquad F(x,\ y,\ y',\ y'',\ \dots\ y^{(\varrho)}) = 0$$

sei, worin $\varrho \leqq m-1$ und wobei wir voraussetzen, dass die Gleichung (5.) in Bezug auf $y^{(\varrho)}$ im algebraischen Sinne irreductibel sei, so dass sie also auch nach dem Vorigen nicht für $y_1,\ y_1',\ \dots\ y_1^{(\varrho)}$ algebraisch reductibel ist. Setzt man dieselbe in die Form

$$(6.)\quad \varphi_0(x, y, y', \dots y^{(\varrho-1)})y^{(\varrho)p}+\varphi_1(x, y, \dots y^{(\varrho-1)})y^{(\varrho)p-1}+\dots+\varphi_p(x, y, \dots y^{(\varrho-1)})=0,$$

so folgt durch Differentiation

$$(7.)\quad [p\varphi_0 y^{(\varrho)p-1}+(p-1)\varphi_1 y^{(\varrho)p-2}+\dots+\varphi_{p-1}]y^{(\varrho+1)}+\Phi_1(x,\ y,\ y',\ \dots\ y^{(\varrho)})=0,$$

durch nochmalige Differentiation mit Benutzung von (7.)

$$[p\varphi_0 y^{(\varrho)p-1}+(p-1)\varphi_1 y^{(\varrho)p-2}+\dots+\varphi_{p-1}]y^{(\varrho+2)}+\Phi_2(x,\ y,\ y',\ \dots\ y^{(\varrho)}) = 0$$

u. s. w., bis

$$[p\varphi_0 y^{(\varrho)p-1}+(p-1)\varphi_1 y^{(\varrho)p-2}+\dots+\varphi_{p-1}]y^{(m)}+\Phi_{m-\varrho}(x,\ y,\ y',\ \dots\ y^{(\varrho)}) = 0$$

oder

$$(8.)\qquad y^{(m)}-\psi(x,\ y,\ y',\ \dots\ y^{(\varrho)}) = 0,$$

in welcher ψ eine rationale Function bedeutet und welche ebenfalls durch das Integral y_1 befriedigt wird. Beachtet man, dass der Ausdruck

$$p\varphi_0 y^{(\varrho)p-1}+(p-1)\varphi_1 y^{(\varrho)p-2}+\dots+\varphi_{p-1}$$

wegen der für die Gleichung (5.) gemachten Voraussetzung für $y=y_1$ nicht verschwinden kann, denken wir uns ferner die aus (7.) und den folgenden durch Differentiation abgeleiteten Gleichungen sich ergebenden Werthe von

$$y_1^{(\varrho+1)},\quad y_1^{(\varrho+2)},\quad \dots\quad y_1^{(m)}$$

in die Gleichung (1.) eingesetzt, so ergiebt sich eine Gleichung

$$(9.)\qquad F_1(x,\ y_1,\ y_1',\ \dots\ y_1^{(\varrho)}) = 0,$$

welche, mit

$$(10.)\qquad F(x,\ y_1,\ y_1',\ \dots\ y_1^{(\varrho)}) = 0$$

zusammengestellt, gegen die Voraussetzung eine algebraische Differentialgleichung $(\varrho-1)^{\text{ter}}$ Ordnung liefern würde, welche y_1 zum Integral hat; es

muss daher, da auch eine Gleichung ϱ^{ter} Ordnung in y_1 und von niedrigerem Grade in $y_1^{(\varrho)}$ als in (10.) nicht existiren soll,

$$(11.)\qquad F_1(x,\, y,\, y',\, \dots\, y^{(\varrho)}) = F(x,\, y,\, y',\, \dots\, y^{(\varrho)})\, \Psi(x,\, y,\, y',\, \dots\, y^{(\varrho)})$$

sein. Ist somit y_2 irgend ein anderes Integral der Gleichung (5.), welches somit auch die Gleichungen (7.) und (8.) befriedigt, so wird dasselbe der Gleichung (11.) zufolge auch der Gleichung

$$F_1(x,\, y_2,\, y_2',\, \dots\, y^{(\varrho)}) = 0$$

genügen, d. h. ein Integral von (1.) sein. Da dies nun von jedem Integrale der Gleichung (5.) gilt, so wird also (5.) selbst in bekannter Ausdrucksweise ein algebraisches Integral der Gleichung (1.) sein, und wir erhalten somit den folgenden Satz:

Hat eine algebraische Differentialgleichung mit einer algebraischen Differentialgleichung niederer Ordnung, welche in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten in algebraischem Sinne irreductibel ist, ein Integral gemein, welches keiner Differentialgleichung noch niederer Ordnung genügt, so werden sämmtliche Integrale der zweiten Differentialgleichung auch der ersten genügen, oder die Differentialgleichung niederer Ordnung wird ein algebraisches Integral der ersten sein.

So hat z. B. die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(\alpha.)\qquad y''^2 - (y-x)y' + y - x = 0$$

mit der in Bezug auf y' algebraisch irreductibeln Gleichung

$$(\beta.)\qquad y' - y + x - 1 = 0$$

das transcendente Integral

$$y_1 = e^x + x$$

gemein, desshalb muss (β.) ein Integral von (α.) sein; in der That folgt aus (β.):

$$y' = y - x + 1,\quad y'' = y' - 1 = y - x,$$

und diese Ausdrücke genügen (α.) identisch.

Mit Hülfe dieses Satzes können wir aber die Definition der Irreductibilität einer algebraischen Differentialgleichung, wenn wir beachten, dass sie reductibel nur sein kann, wenn sie in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten im algebraischen Sinne reductibel ist oder die sämmtlichen Integrale einer algebraischen Differentialgleichung niederer Ordnung besitzt, in einfachster Weise folgendermassen definiren:

von niederer als der n^{ten} Ordnung zu genügen — und einer Reihe von Ableitungen desselben eine algebraische Relation

$$\varphi(x,\ y_1,\ y_1',\ \dots\ z_1,\ z_1',\ \dots) = 0,$$

so bleibt diese unverändert, wenn man für y_1 und dessen Ableitungen irgend ein Integral der Differentialgleichung (a.) und die Ableitungen desselben setzt, wenn man nur für z_1 und dessen Ableitungen ein passendes Integral der Differentialgleichung (A.) und dessen Ableitungen substituirt *).

Ich will zum Schlusse dieser Bemerkungen noch eine Anwendung von der oben gegebenen Vereinfachung der Irreductibilitätsdefinition anfügen.

Sei die lineare homogene Differentialgleichung

$$(12.)\qquad y^{(m)}+f_1 y^{(m-1)}+f_2 y^{(m-2)}+\dots+f_{m-1}y'+f_m y = 0$$

vorgelegt und ihre Reductibilität angenommen, so wird sie ein algebraisches Integral niederer Ordnung

$$(13.)\qquad F(x,\ y,\ y',\ \dots\ y^{(\varrho)}) = 0$$

besitzen, dessen Eigenschaft ermittelt werden soll **). Seien

$$y_1,\quad y_2,\quad \dots\quad y_m$$

m particuläre Fundamentalintegrale der Gleichung (12.), so lautet das allgemeine Integral von (12.)

$$(14.)\qquad y = c_1 y_1+c_2 y_2+\dots+c_m y_m,$$

und greift man unter der Voraussetzung, dass nicht je m particuläre Integrale der Gleichung (13.) in homogener linearer Relation stehen, m solcher Integrale $Y_1,\ Y_2,\ \dots\ Y_m$ heraus, so müssen diese, da sie auch Integrale der Gleichung (12.) sein müssen, in die Form gesetzt werden können

$$(\text{A.})\qquad \begin{cases} Y_1 = a_{11}y_1+a_{12}y_2+\dots+a_{1m}y_m, \\ Y_2 = a_{21}y_1+a_{22}y_2+\dots+a_{2m}y_m, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ Y_m = a_{m1}y_1+a_{m2}y_2+\dots+a_{mm}y_m, \end{cases}$$

aus denen der gemachten Annahme zu Folge

$$\begin{aligned} y_1 &= b_{11}Y_1+b_{12}Y_2+\dots+b_{1m}Y_m, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_m &= b_{m1}Y_1+b_{m2}Y_2+\dots+b_{mm}Y_m \end{aligned}$$

---

*) Für den Fall, dass die unabhängigen Variabeln dieser beiden oder eines Systems von beliebig vielen Differentialgleichungen in irgend einem algebraischen Zusammenhange stehen, wird noch der Uebergang einer Lösung der algebraischen Gleichung in eine andere zu berücksichtigen sein, und alle diese Punkte beabsichtige ich nächstens in einer ausführlichen Darstellung aller hierher gehörigen Fragen zu besprechen.

**) Vergl. die Untersuchungen des Herrn *Frobenius* über die Irreductibilität linearer homogener Differentialgleichungen.

folgt. Da nun alle Integrale der Gleichung (13.) in dem allgemeinen Integrale (14.) der Gleichung (12.) enthalten sein müssen, so wird das allgemeine Integral von (13.) lauten

$$(15.)\qquad y = A_1 Y_1 + A_2 Y_2 + \cdots + A_m Y_m,$$

worin $A_1, A_2, \dots A_m$ ϱ willkürliche Constanten enthalten. Setzt man nun (13.) in die Form

$$(16.)\qquad y^{(\varrho)} = \varphi(x, y, y', y'', \dots y^{(\varrho-1)}),$$

so folgt, da

$$Y_\varepsilon^{(\varrho)} = \varphi(x, Y_\varepsilon, Y'_\varepsilon, \dots Y_\varepsilon^{(\varrho-1)})$$

ist, durch Einsetzen des allgemeinen Integrals (15.)

$$(17.)\qquad \begin{cases} \varphi(x, A_1 Y_1 + \cdots + A_m Y_m, A_1 Y'_1 + \cdots + A_m Y'_m, \dots A_1 Y_1^{(\varrho-1)} + \cdots + A_m Y_m^{(\varrho-1)}) \\ \qquad = A_1 \varphi(x, Y_1, Y'_1, \dots Y_1^{(\varrho-1)}) + A_2 \varphi(x, Y_2, Y'_2, \dots Y_2^{(\varrho-1)}) + \cdots \\ \qquad\qquad \cdots + A_m \varphi(x, Y_m, Y'_m, \dots Y_m^{(\varrho-1)}), \end{cases}$$

worin die ϱ willkürlichen Constanten in den A-Grössen vorkommen.

Nehmen wir nun an — und in wie weit sich diese Annahme mit der oben gemachten Voraussetzung deckt, werden wir nachher sehen — dass zwischen den m particulären Fundamentalintegralen $y_1, y_2, \dots y_m$ und deren Differentialquotienten bis zur $(\varrho-1)^{\text{ten}}$ Ordnung hin keine algebraische Beziehung stattfindet, dass also diese Annahme vermöge der Beziehungen (A.) auch für $Y_1, \dots Y_m$ und deren Ableitungen statthat, so muss die Gleichung (17.) für alle Werthe von

$$(\alpha.)\qquad Y_1, \;\dots\; Y_m, \;\; Y'_1, \;\dots\; Y'_m, \;\dots\; Y_1^{(\varrho-1)}, \;\dots\; Y_m^{(\varrho-1)}$$

identisch bestehen, und wir erhalten somit, wenn wir

$$A_1 Y_1 + \cdots + A_m Y_m = \mathrm{I},\;\; A_1 Y'_1 + \cdots + A_m Y'_m = \mathrm{II},\; \dots\; A_1 Y_1^{(\varrho-1)} + \cdots + A_m Y_m^{(\varrho-1)} = \mathrm{P}$$

setzen, durch Differentiation nach den einzelnen Grössen $(\alpha.)$

$$\frac{\partial \varphi(x, \mathrm{I}, \mathrm{II}, \dots \mathrm{P})}{\partial \mathrm{I}} = \frac{\partial \varphi(x, Y_1, Y'_1, \dots Y_1^{(\varrho-1)})}{\partial Y_1} = \frac{\partial \varphi(x, Y_2, Y'_2, \dots Y_2^{(\varrho-1)})}{\partial Y_2} = \cdots$$

$$\cdots = \frac{\partial \varphi(x, Y_m, Y'_m, \dots Y_m^{(\varrho-1)})}{\partial Y_m},$$

. . . .

$$\frac{\partial \varphi(x, \mathrm{I}, \mathrm{II}, \dots \mathrm{P})}{\partial \mathrm{P}} = \frac{\partial \varphi(x, Y_1, Y'_1, \dots Y_1^{(\varrho-1)})}{\partial Y_1^{(\varrho-1)}} = \cdots = \frac{\partial \varphi(x, Y_m, Y'_m, \dots Y_m^{(\varrho-1)})}{\partial Y_m^{(\varrho-1)}},$$

d. h. es ist für $\varepsilon = 1, 2, \dots m$

$$(18.)\qquad \varphi(x, Y_\varepsilon, Y'_\varepsilon, \dots Y_\varepsilon^{(\varrho-1)}) = L_0 Y_\varepsilon + L_1 Y'_\varepsilon + \cdots + L_{\varrho-1} Y_\varepsilon^{(\varrho-1)} + M,$$

worin $L_0, L_1, \dots L_{\varrho-1}, M$ Functionen von x bedeuten, oder nach (16.) die

Form der Differentialgleichung (13.)

$$(19.)\qquad N_0 y^{(\varrho)} + N_1 y^{(\varrho-1)} + \cdots + N_{\varrho-1} y' + N_\varrho y = P,$$

somit eine lineare, deren Coefficienten $N_0, N_1, \ldots N_\varrho, P$ Functionen von x sind. ***Unter den gemachten Voraussetzungen muss also ein algebraisches Integral ϱ^{ter} Ordnung einer linearen homogenen Differentialgleichung eine lineare Differentialgleichung ϱ^{ter} Ordnung sein.***

Es mag noch bemerkt werden, dass, wenn die ϱ particulären Fundamentalintegrale der reducirten Gleichung von (19.)

$$(20.)\qquad N_0 y^{(\varrho)} + N_1 y^{(\varrho-1)} + \cdots + N_\varrho y = 0$$

mit $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_\varrho$ bezeichnet werden, bekanntlich das allgemeine Integral von (19.) die Form hat

$$(21.)\qquad y = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_\varrho \eta_\varrho + \mathrm{H},$$

worin $k_1, k_2, \ldots k_\varrho$ willkürliche Constante und H eine bestimmte Function von x ist; da aber das allgemeine Integral von (19.) jedenfalls ein Integral der vorgelegten linearen homogenen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung (12.) sein muss, so folgt, dass auch H ein Integral von (12.) sein wird, und dass daher auch (20.) ein Integral der Differentialgleichung (12.) ist; somit stets eine ***homogene*** lineare Differentialgleichung ϱ^{ter} Ordnung auch ein Integral von (12.).

Es bleibt jetzt nur noch die Verträglichkeit und die Bedeutung der beiden Bedingungen zu prüfen, dass einerseits nicht je m particuläre Integrale der Gleichung (13.) in homogener linearer Relation stehen, andererseits zwischen den m particulären Integralen der gegebenen Differentialgleichung und deren Differentialquotienten bis zur $(\varrho-1)^{ten}$ Ordnung keine algebraische Beziehung stattfindet. Angenommen nun, es ständen je m particuläre Integrale der Differentialgleichung (13.) in homogener linearer Relation, so dass sich jedes Integral y in der Form ausdrücken lässt

$$y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + \cdots + c_{m-1} Y_{m-1},$$

worin $c_1, c_2, \ldots c_{m-1}$ Functionen von ϱ willkürlichen Constanten sind, so folgte aus (16.)

$$(22.)\qquad \begin{cases} \varphi(x,\, c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + \cdots + c_{m-1} Y_{m-1}, \ldots\, c_1 Y_1^{(\varrho-1)} + c_2 Y_2^{(\varrho-1)} + \cdots + c_{m-1} Y_{m-1}^{(\varrho-1)}) \\ = c_1 \varphi(x,\, Y_1,\, Y_1',\, \ldots\, Y_1^{(\varrho-1)}) + \cdots + c_{m-1}\varphi(x,\, Y_{m-1},\, Y_{m-1}',\, \ldots\, Y_{m-1}^{(\varrho-1)}), \end{cases}$$

und diese Gleichung gestattet unter der Voraussetzung, dass zwischen den $m-1$ particulären Integralen und deren Differentialquotienten bis zur $(\varrho-1)^{ten}$ Ordnung keine algebraische Beziehung stattfindet, dieselben Schlüsse wie

die Gleichung (17.) und führt also auch unter dieser Voraussetzung auf eine lineare Differentialgleichung ϱ^{ter} Ordnung; da aber die eben gemachte Annahme mit enthalten ist in der zweiten oben gemachten Annahme, dass zwischen den m particulären Fundamentalintegralen $y_1, y_2, \dots y_m$ und deren $\varrho-1$ ersten Ableitungen keine algebraische Relation existirt, so können wir jetzt allgemein den folgenden Satz aufstellen:

Wenn eine lineare homogene Differentialgleichung m^{ter} Ordnung reductibel ist, also ein algebraisches Integral ϱ^{ter} Ordnung hat, und zwischen den m particulären Fundamentalintegralen und deren $\varrho-1$ ersten Ableitungen besteht keine algebraische Beziehung, dann ist jenes algebraische Integral eine lineare Differentialgleichung ϱ^{ter} Ordnung;

oder anders ausgesprochen:

Hat eine lineare homogene Differentialgleichung mit einer algebraischen Differentialgleichung niederer Ordnung, welche in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten im algebraischen Sinne irreductibel ist, ein Integral gemein, welches nicht zugleich ein Integral einer Differentialgleichung noch niederer Ordnung ist, so ist unter der oben gemachten Voraussetzung jene algebraische Differentialgleichung eine lineare und zugleich eine Integralgleichung der vorgelegten Differentialgleichung, und die letztere hat noch die reducirte Differentialgleichung derselben Ordnung zum Integral.

Als specieller Fall folgt:

Wenn eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung ein transcendentes Integral mit einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung, welche in Bezug auf den ersten Differentialquotienten algebraisch irreductibel ist, gemein hat, und zwei Fundamentalintegrale der gegebenen Differentialgleichung stehen nicht in algebraischer Relation, so ist die Differentialgleichung erster Ordnung eine lineare, zugleich eine Integralgleichung der gegebenen, welche auch die reducirte lineare Differentialgleichung erster Ordnung zum Integral hat;

ein Satz, welcher sich zum Theil schon in meiner Arbeit „Ueber algebraische Beziehungen zwischen Integralen etc.“ (Bd. 91, Heft 3) vorfindet.

So hat z. B. die Differentialgleichung

$$(a.)\qquad (\tfrac{2}{3}x-\tfrac{4}{15}x^2)y''+(\tfrac{4}{15}x^2-1)y'+(1-\tfrac{2}{3}x)y = 0$$

das transcendente Integral $y=\frac{4}{15}x^{\frac{5}{2}}+e^x$ mit der linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$(b.)\qquad \frac{dy}{dx}-y = \tfrac{2}{3}cx^{\frac{3}{2}}(1-\tfrac{2}{5}x)$$

gemein, welche selbst, da die beiden Fundamentalintegrale von (α.)

$$x^{\frac{5}{3}} \quad \text{und} \quad e^x$$

nicht in algebraischer Beziehung stehen, ein Integral erster Ordnung von (α.) sein muss; ausserdem muss (α.) auch das algebraische Integral erster Ordnung

$$(c.) \qquad \frac{dy}{dx} - y = 0$$

besitzen.

Es mag endlich noch bemerkt werden, dass sich das in meiner Arbeit „Allgemeine Bemerkungen zum *Abel*schen Theorem“ angegebene Kriterium für die Irreductibilität der Differentialgleichungen von der Form

$$(22.) \qquad \frac{d^2z}{dx^2} - f(x, y)\frac{dz}{dx} = 0$$

nach diesen Sätzen unmittelbar ergiebt; denn da dieselbe für den Fall der Reductibilität ein algebraisches Integral erster Ordnung von der Form

$$\frac{dz}{dx} - f_1 z = 0$$

haben muss, so folgt, dass

$$f_1' + f_1^2 = f f_1$$

sein muss, oder dass die Differentialgleichung

$$\frac{dt}{dx} + t^2 - tf = 0$$

ein algebraisches Integral hat; da aber die Substitution $t^{-1} = u$ dieselbe in

$$\frac{du}{dx} + fu = 1$$

überführt, so folgt als Bedingung der Irreductibilität, dass sich kein Werth für c angeben lässt, für den

$$ce^{-\int f dx} + e^{-\int f dx}\int e^{\int f dx} dx$$

algebraisch ausdrückbar ist.

Wien, im Februar 1881.

Ueber einen Satz aus der Theorie der algebraischen Functionen.

(Auszug eines Schreibens des Herrn *M. Nöther* in Erlangen an Herrn *L. Fuchs* in Heidelberg.)

Der von Ihnen erwähnte, von Herrn *Weierstrass* in seinen Vorlesungen behandelte Satz lautet: „dass es in der durch die algebraische *irreductible* Gleichung

$$(1.)\qquad f(s,z) = 0$$

definirten Functionsklasse, vom Geschlecht p, keine rationale Function von s, z giebt, welche in nur *einem*, aber *willkürlich* gewählten Punkte (s_0, z_0) unendlich wird in einer Ordnung $\mu < p+1$."

Zum Beweise benutze ich nur den bekannten Satz:

(*A.*) „μ ($< p+1$) Punkte von $f(s,z) = 0$, in welchen eine rationale Function von s, z unendlich in der ersten Ordnung wird, sind durch eine oder mehrere Functionen φ verknüpft; und zwar — wenn die Function noch $q+1$ (homogen eingehende) Constanten hat, verschwinden *genau* $p+q-\mu$ linear von einander unabhängige Functionen φ in der Gruppe von μ Punkten."

Dieser von Herrn *Brill* und mir (Math. Ann. VII) als *„Riemann-Roch*scher Satz" bezeichnete Satz ist von uns für *alle* Fälle — auch wenn die μ Punkte beliebig zusammenrücken, wie im obigen Falle — streng bewiesen.

Eine rationale Function F von s, z, welche in μ ($< p+1$) Punkten α unendlich wird, lässt sich also immer in die Form setzen:

$$(2.)\qquad F = \frac{\alpha_0\varphi_0 + \alpha_1\varphi_1 + \cdots + \alpha_q\varphi_q}{\varphi_0},$$

wo φ_0 in den Punkten α verschwindet, während $\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_q$ die $q+1$ linear von einander unabhängigen Functionen φ sind, die in den übrigen $2p-2-\mu$ Nullpunkten von φ_0 ebenfalls zu Null werden.

Es möge nun φ_0 in nur *einem, willkürlich gewählten* Punkte α, aber in der μ^{ten} Ordnung, unendlich werden, *und sei μ die kleinste Zahl* ($< p+1$), *für welche solches bei $f(s, z) = 0$ möglich ist.*

Dann folgt zunächst, *dass q nur gleich Eins sein kann.*

Denn wäre $q > 1$, so könnte man dem Zähler von F die eine Bedingung vorschreiben, in α ebenfalls zu Null zu werden; und man hätte dann in F eine Function, welche sich nicht auf eine Constante reducirte, und welche in nur *einem,* willkürlich gewählten Punkte α, in der $(\mu-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, unendlich würde. Dies existirt nicht nach der Annahme über μ. — Wäre aber $q < 1$, so würde F eine Constante. Also bleibt nur $q = 1$, oder:

$$(2'.)\qquad F = \frac{\alpha_0\varphi_0+\alpha_1\varphi_1}{\varphi_0}.$$

Nach Satz (*A.*) ergiebt sich hieraus, dass im Punkte α genau $p-\mu+1$ linear von einander unabhängige Functionen φ in der μ^{ten} Ordnung verschwinden; was also für die ganze Schaar der Functionen φ — oder

$$(3.)\qquad \Phi \equiv \beta_1\Phi_1+\beta_2\Phi_2+\cdots+\beta_p\Phi_p \text{ —}$$

nur $\mu-1$ von einander unabhängige lineare Bedingungen bedeutet.

Diese Bedingungen für Φ, in α in der μ^{ten} Ordnung zu verschwinden, schreiben sich

$$(4.)\qquad \begin{cases} 1')\ \Phi_{(0)} = 0,\ 2')\ \Phi_{(0)}+(d\Phi)_{(0)} = 0,\ 3')\ \Phi_{(0)}+2(d\Phi)_{(0)}+(d^2\Phi)_{(0)} = 0,\ \ldots \\ \qquad\qquad \mu')\ \Phi_{(0)}+(\mu-1)(d\Phi)_{(0)}+\cdots+(d^{\mu-1}\Phi)_{(0)} = 0, \end{cases}$$

wo der Index (0) sich auf die Werthe (s_0, z_0) von α bezieht. Die Differentialquotienten $\left(\frac{ds}{dz}\right)_{(0)}$, $\left(\frac{d^2s}{dz^2}\right)_{(0)}$, ... sind natürlich aus $f(s, z) = 0$ zu entnehmen.

Diese μ Gleichungen 1'), 2'), ..., μ') stellen $\mu-1$ Bedingungen vor; und *ebensoviele von einander unabhängige Bedingungen sind schon in den $\mu-1$ ersten* 1'), 2'), ..., $(\mu-1)'$) *enthalten.* Denn sind nur diese $\mu-1$ Gleichungen, d. h.

$$(5.)\qquad \Phi_{(0)} = 0,\quad \left(\frac{d\Phi}{dz}\right)_{(0)} = 0,\quad \ldots\quad \left(\frac{d^{\mu-2}\Phi}{dz^{\mu-2}}\right)_{(0)} = 0$$

erfüllt, und wären das *weniger* als $\mu-1$ unabhängige Bedingungen, so würden in α mehr als $p-\mu+1$ linear von einander unabhängige Functionen φ in der $(\mu-1)^{\text{ten}}$ Ordnung verschwinden, und man erhielte nach Satz (*A.*) eine Function mit zwei oder mehr Constanten, welche in α in

der $(\mu-1)^{\text{ten}}$ Ordnung unendlich würde und sonst nicht; — was wieder wegen der Annahme über μ unmöglich ist. Also:

Die $\mu-1$ ersten der μ Gleichungen** 1′), 2′), ..., μ') **sind von einander unabhängig, und aus ihnen folgt die μ^{te} Gleichung μ') von selbst.

In unserer Betrachtung war, nach Voraussetzung, α ein *beliebiger* Punkt von $f(s, z)=0$. Sie gilt also auch, wenn man α *beliebig variirt*. D. h., indem man das zuletzt Bewiesene auf einen α benachbarten Punkt anwendet:

Die μ Gleichungen

$$(6.)\quad \begin{cases} 2') \ \Phi_{(0)}+(d\Phi)_{(0)}=0, \quad 3') \ \Phi_{(0)}+2(d\Phi)_{(0)}+(d^2\Phi)_{(0)}=0, \quad \dots \\ \mu') \ \Phi_{(0)}+(\mu-1)(d\Phi)_{(0)}+\cdots+(d^{\mu-1}\Phi)_{(0)}=0, \\ (\mu+1)') \ \Phi_{(0)}+\mu(d\Phi)_{(0)}+\cdots+(d^{\mu}\Phi)_{(0)}=0 \end{cases}$$

haben ebenfalls die Eigenschaft, nur $\mu-1$ von einander unabhängige lineare Bedingungen für Φ vorzustellen, und aus den $\mu-1$ ersten derselben, ***welche von einander unabhängig werden,*** folgt die letzte von selbst.

Da hiernach auch 2′), 3′), ..., μ') $\mu-1$ von einander unabhängige lineare Gleichungen vorstellen, folgt im System (4.) auch die erste 1′) aus ihnen; und man findet:

Sobald

$$(\Phi)_{(0)}=0, \ \left(\frac{d\Phi}{dz}\right)_{(0)}=0, \ \dots \ \left(\frac{d^{\mu-2}\Phi}{dz^{\mu-2}}\right)_{(0)}=0,$$

wird auch

$$\left(\frac{d^{\mu-1}\Phi}{dz^{\mu-1}}\right)_{(0)}=0, \quad \left(\frac{d^{\mu}\Phi}{dz^{\mu}}\right)_{(0)}=0.$$

Variirt man nochmals, so folgt aus (6.) ebenso, dass dann auch nothwendig $\left(\frac{d^{\mu+1}\Phi}{dz^{\mu+1}}\right)_{(0)}=0$ werden muss, etc., d. h. es verschwinden dann *alle* Differentialquotienten von Φ bis zu beliebig hoher Ordnung hin. Dies würde aber aussagen, dass $f(s, z)=0$ *reductibel* wäre — ein Fall, der ausgeschlossen ist.

Demnach ist die Annahme $\mu<p+1$ überhaupt unmöglich, q. e. d.

Wiesbaden, October 1881.

Ueber den geometrischen Ort der Kegelspitzen der durch sechs Punkte gehenden Kegelflächen zweiten Grades.

(Von Herrn *Eugen Hunyady* in Budapest.)

Die Gleichung des im Titel angeführten Ortes lässt sich nach Herrn *Cayley*, Comptes rendus der Pariser Akademie (1861, I. p. 1216), wie folgt schreiben:

$$(1.)\quad \Delta = \begin{vmatrix} x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & p_1^2 & x_1y_1 & x_1z_1 & x_1p_1 & y_1z_1 & y_1p_1 & z_1p_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_6^2 & y_6^2 & z_6^2 & p_6^2 & x_6y_6 & x_6z_6 & x_6p_6 & y_6z_6 & y_6p_6 & z_6p_6 \\ 2x & 0 & 0 & 0 & y & z & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2y & 0 & 0 & x & 0 & 0 & z & p & 0 \\ 0 & 0 & 2z & 0 & 0 & x & 0 & y & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 2p & 0 & 0 & x & 0 & y & z \end{vmatrix} = 0,$$

wenn x, y, z, p die Coordinaten der Kegelspitzen und

$$x_1,\ y_1,\ z_1,\ p_1,\ \ldots\ x_6,\ y_6,\ z_6,\ p_6$$

die der sechs gegebenen Punkte bedeuten. Die Gleichung desselben Ortes findet man bei *Hierholzer* (Ueber Kegelschnitte im Raume, *Clebsch* und *Neumann*, Math. Annalen Bd. II, p. 582) unter Benutzung der Bezeichnung

$$(a.)\quad (ikl0)$$

für die Determinante:

$$|x_\alpha,\ y_\alpha,\ z_\alpha,\ p_\alpha| \qquad (\alpha = i, k, l, 0)$$

in folgender Form angegeben:

$$(2.)\quad (1230)(2560)(1450)(3460) - (4560)(1340)(2360)(1250) = 0.$$

Der Gegenstand der folgenden Zeilen ist die algebraische Ableitung der Gleichung (2.) aus der Gleichung (1.), die ich mir hier mitzutheilen erlaube.

ist; man erhält also nach Hinweglassung der gleichen Factoren für π_{234} den Werth:

$$-p(2450)(3450).$$

In ähnlicher Weise ergeben sich auch die Werthe von π_{341}, π_{412}, π_{123}, indem man für dieselben der Reihe nach die folgenden Werthe erhält:

$$p(2350)(2450),$$
$$-p(2340)(2350),$$
$$p(2340)(3450).$$

Es ergiebt sich also aus (3.) nach Substitution der Grössen (*c.*) für die von (*b.*) die folgende identische Gleichung:

$$(4.)\quad \left\{\begin{array}{l} \left|\xi_{ik0}\xi_{lm0}\ \ \eta_{ik0}\eta_{lm0}\ \ \zeta_{ik0}\zeta_{lm0}\ \ \xi_{ik0}\eta_{lm0}+\xi_{lm0}\eta_{ik0}\ \ \xi_{ik0}\zeta_{lm0}+\xi_{lm0}\zeta_{ik0}\ \ \eta_{ik0}\zeta_{lm0}+\eta_{lm0}\zeta_{ik0}\right| \\ \qquad = p^4(2340)^2(2350)^2(2450)^2(3450)^2 \\ \qquad (ik,lm = 34,45;\ 45,52;\ 52,23;\ 23,34;\ 23,45;\ 34,52). \end{array}\right.$$

2. Mit Berücksichtigung der Gleichung (4.) multipliciren wir nun die Determinante Δ mit folgender Determinante zehnten Grades, deren erste sechs Zeilen aus

$$\xi_{ik0}\xi_{lm0},\ \ \eta_{ik0}\eta_{lm0},\ \ \zeta_{ik0}\zeta_{lm0},\ \ \pi_{ik0}\pi_{lm0},\ \ \xi_{ik0}\eta_{lm0}+\xi_{lm0}\eta_{ik0},\ \ \xi_{ik0}\zeta_{lm0}+\xi_{lm0}\zeta_{ik0},$$
$$\xi_{ik0}\pi_{lm0}+\xi_{lm0}\pi_{ik0},\ \ \eta_{ik0}\zeta_{lm0}+\eta_{lm0}\zeta_{ik0},\ \ \eta_{ik0}\pi_{lm0}+\eta_{lm0}\pi_{ik0},\ \ \zeta_{ik0}\pi_{lm0}+\zeta_{lm0}\pi_{ik0}$$

abgeleitet werden, indem man für ***ik***, ***lm*** dieselben Werthe wie in (4.) setzt. Die Elemente der letzten vier Zeilen sind hingegen sämmtlich Null, mit Ausnahme von 7, 7; 8, 9; 9, 10 und 10, 4*), die alle gleich Eins sind. Der Werth dieser Determinante ist nach (4.) gleich

$$-p^4(2340)^2(2350)^2(2450)^2(3450)^2.$$

Das Resultat der Multiplication ergiebt sich dann nach einigen leichten Reductionen in folgender Form:

$$2p^4(2340)^2(2350)^2(2450)^2(3450)^2.\begin{vmatrix}(2360)(4560) & (3460)(2560)\\ (1230)(1450) & (1340)(1250)\end{vmatrix},$$

so dass man nach Hinweglassung der gleichen Factoren schliesslich

$$(5.)\qquad \Delta = 2\,\{(1230)(2560)(1450)(3460)-(4560)(1340)(2360)(1250)\}$$

erhält, woraus der Zusammenhang von Δ und des ersten Gliedes der Gleichung (2.) hervorgeht, und zu ersehen ist, wie die Gleichung (2.) aus (1.) algebraisch abgeleitet werden kann.

---

*) Es ist unter *i*, *k* das Element der i^{ten} Zeile und k^{ten} Colonne zu verstehen.

Budapest, den 28. December 1881.

Zusatz zur Abhandlung: Ueber die verschiedenen Formen der Bedingungsgleichung, welche ausdrückt, dass sechs Punkte auf einem Kegelschnitte liegen.

(Dieses Journal, Band 83, Seite 76.)

(Von Herrn *Eugen Hunyady* in Budapest.)

Indem ich mir erlaube, nochmals auf diesen Gegenstand zurückzukommen, beabsichtige ich die a. a. O. angegebenen Gleichungen (1.)—(15.) aus der folgenden:

$$(1.)\qquad D=\begin{vmatrix} x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & y_1z_1 & x_1z_1 & x_1y_1\\ x_2^2 & y_2^2 & z_2^2 & y_2z_2 & x_2z_2 & x_2y_2\\ x_3^2 & y_3^2 & z_3^2 & y_3z_3 & x_3z_3 & x_3y_3\\ x_4^2 & y_4^2 & z_4^2 & y_4z_4 & x_4z_4 & x_4y_4\\ x_5^2 & y_5^2 & z_5^2 & y_5z_5 & x_5z_5 & x_5y_5\\ x_6^2 & y_6^2 & z_6^2 & y_6z_6 & x_6z_6 & x_6y_6 \end{vmatrix}=0$$

abzuleiten.

1. Mit Beibehaltung der a. a. O. eingeführten Bezeichnungen, soll ferner noch die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \xi_{kl}\xi_{lm} & \eta_{kl}\eta_{lm} & \zeta_{kl}\zeta_{lm} & \eta_{kl}\zeta_{lm}+\eta_{lm}\zeta_{kl} & \zeta_{kl}\xi_{lm}+\zeta_{lm}\xi_{kl} & \xi_{kl}\eta_{lm}+\xi_{lm}\eta_{kl}\\ \xi_{lm}\xi_{mi} & - & - & \eta_{lm}\zeta_{mi}+\eta_{mi}\zeta_{lm} & - & -\\ \xi_{mi}\xi_{ik} & - & - & \eta_{mi}\zeta_{ik}+\eta_{ik}\zeta_{mi} & - & -\\ \xi_{ik}\xi_{kl} & - & - & \eta_{ik}\zeta_{kl}+\eta_{kl}\zeta_{ik} & - & -\\ \xi_{ik}\xi_{lm} & - & - & \eta_{ik}\zeta_{lm}+\eta_{lm}\zeta_{ik} & - & -\\ \xi_{kl}\xi_{mi} & - & - & \eta_{kl}\zeta_{mi}+\eta_{mi}\zeta_{kl} & - & - \end{vmatrix}$$

durch:

$$(2.)\qquad \begin{vmatrix} kl, & lm\\ lm, & mi\\ mi, & ik\\ ik, & kl\\ ik, & lm\\ kl, & mi \end{vmatrix}$$

bezeichnet werden.

Da ferner im Laufe des hier Folgenden die Determinante D mit der Determinante (2.) ähnlichen Determinanten multiplicirt wird, so wollen wir das Product der h^{ten} Zeile in D mit einer beliebigen Zeile in (2.), welche die folgende sei:

$$\xi_{pq}\xi_{rs},\quad \eta_{pq}\eta_{rs},\quad \zeta_{pq}\zeta_{rs},\quad \eta_{pq}\zeta_{rs}+\eta_{rs}\zeta_{pq},\quad \zeta_{pq}\xi_{rs}+\zeta_{rs}\xi_{pq},\quad \xi_{pq}\eta_{rs}+\xi_{rs}\eta_{pq},$$

hier darstellen, indem wir für dasselbe finden:

$$(3.)\quad \begin{cases} x_h^2\xi_{pq}\xi_{rs}+y_h^2\eta_{pq}\eta_{rs}+z_h^2\zeta_{pq}\zeta_{rs}+y_h z_h(\eta_{pq}\zeta_{rs}+\eta_{rs}\zeta_{pq})+x_h z_h(\zeta_{pq}\xi_{rs}+\zeta_{rs}\xi_{pq}) \\ +x_h y_h(\xi_{pq}\eta_{rs}+\xi_{rs}\eta_{pq}) = (x_h\xi_{pq}+y_h\eta_{pq}+z_h\zeta_{pq})(x_h\xi_{rs}+y_h\eta_{rs}+z_h\zeta_{rs}) \\ \qquad = (hpq)(hrs). \end{cases}$$

2. Die Determinante (2.) erhalten wir in einer andern Form, wenn wir von Gleichung (3.) der vorhergehenden Note ausgehend, die drei letzten Colonnen derselben unserem Zweck entsprechend unter einander vertauschen und die Grössen

$$\begin{matrix} x_1, & y_1, & z_1; \\ x_2, & y_2, & z_2; \\ x_3, & y_3, & z_3; \\ x_4, & y_4, & z_4 \end{matrix}$$

durch die folgenden:

$$\begin{matrix} \xi_{ik}, & \eta_{ik}, & \zeta_{ik}; \\ \xi_{kl}, & \eta_{kl}, & \zeta_{kl}; \\ \xi_{lm}, & \eta_{lm}, & \zeta_{lm}; \\ \xi_{mi}, & \eta_{mi}, & \zeta_{mi} \end{matrix}$$

ersetzen; es ergiebt sich dann für (2.) der Werth:

$$(kl,\ lm,\ mi)(lm,\ mi,\ ik)(mi,\ ik,\ kl)(ik,\ kl,\ lm),$$

wobei unter (kl, lm, mi) die Determinante

$$\begin{vmatrix} \xi_{kl}, & \eta_{kl}, & \zeta_{kl} \\ \xi_{lm}, & \eta_{lm}, & \zeta_{lm} \\ \xi_{mi}, & \eta_{mi}, & \zeta_{mi} \end{vmatrix}$$

etc. etc. zu verstehen ist. Da man ferner leicht findet, dass

$$\begin{aligned} (kl,\ lm,\ mi) &= (klm)(lmi), \\ (lm,\ mi,\ ik) &= (lmi)(mik), \\ (mi,\ ik,\ kl) &= (mik)(ikl), \\ (ik,\ kl,\ lm) &= (ikl)(klm), \end{aligned}$$

so hat man schliesslich:

$$(4.)\quad \begin{vmatrix} kl, & lm \\ lm, & mi \\ mi, & ik \\ ik, & kl \\ ik, & lm \\ kl, & mi \end{vmatrix} = (klm)^2(lmi)^2(mik)^2(ikl)^2.$$

Mit Hülfe dieser Identität bestimmt sich der Werth der einer beliebigen quaternären Zahlencombination von 1, ... 6 entsprechenden Determinante (2.).

3. Es ist a. a. O. (S. 78) hervorgehoben worden, dass von den durch die Punkte 1, ... 6 bestimmten fünfundvierzig einfachen Vierecken, je drei auf ein und dieselbe *Pappus-Desargues-Chasles*sche Gleichung führen, und es finden sich, hierauf Bezug nehmend, daselbst die fünfundvierzig Vierecke in fünfzehn Gruppen zu dreien zusammengestellt vor.

Einem jeden der fünfundvierzig Vierecke entspricht eine der Determinante (2.) ähnliche Determinante, so z. B. entsprechen den a. a. O. unter I. (S. 78) angeführten Vierecken:

3546, 1625, 1324

die folgenden Determinanten:

$$(5.)\quad \begin{vmatrix} 54, & 46 \\ 46, & 63 \\ 63, & 35 \\ 35, & 54 \\ 35, & 46 \\ 54, & 63 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 62, & 25 \\ 25, & 51 \\ 51, & 16 \\ 16, & 62 \\ 16, & 25 \\ 62, & 51 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 32, & 24 \\ 24, & 41 \\ 41, & 13 \\ 13, & 32 \\ 13, & 24 \\ 32, & 41 \end{vmatrix}.$$

4. Die Ableitung der a. a. O. unter (1.)—(15.) vorkommenden *Pappus-Desargues-Chasles*schen Gleichungen aus (1.) ist identisch mit der folgenden Aufgabe: Mit welchen Factoren ist die Determinante D zu multipliciren, um ihr der Reihe nach die Formen zu geben, wie diese in den ersten Gliedern der Gleichungen (1.)—(15.) a. a. O. vorkommen.

Multiplicirt man die Determinante D mit der ersten der Determinanten in (5.), so erhält man das Resultat der Multiplication nach Berücksichtigung der Gleichung (3.) in folgender Form:

$$\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & (135)(146) & (136)(145) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & (235)(246) & (236)(245) \\ (354)(463) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (463)(354) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (546)(635) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (635)(546) & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(546)^2(463)^2(635)^2(354)^2 \begin{vmatrix} (135)(146) & (136)(145) \\ (235)(246) & (236)(245) \end{vmatrix}.$$

Bemerkt man schliesslich, dass die erste Determinante in (5.) nach Gleichung (4.) den folgenden Werth hat:

$$(546)^2(463)^2(635)^2(354)^2,$$

so erhält man nach Hinweglassung der gleichen Factoren für D den folgenden Werth:

$$(6.) \quad D = (136)(145)(235)(246)-(135)(146)(236)(245),$$

der mit dem ersten Gliede der a. a. O. vorkommenden Gleichung (1.) übereinstimmt.

Es ist noch zu bemerken, dass man D in derselben Form erhält, wenn man statt mit der ersten Determinante in (5.) mit der zweiten oder dritten Determinante multiplicirt.

Wie bereits erwähnt entsprechen den a. a. O. angegebenen fünfzehn Vierecksgruppen ebenfalls fünfzehn Determinantengruppen, die der in (5.) ähnlich sind; wird nun D mit je einer der den fünfzehn Determinantengruppen angehörigen Determinanten multiplicirt, so erhält man D in fünfzehn verschiedenen Formen, die die ersten Glieder der a. a. O. angegebenen Gleichungen (1.)—(15.) bilden.

Budapest, am 28. Dezember 1881.

Ueber die Differentiation der elliptischen Functionen nach den Perioden und Invarianten.

(Von den Herren *Frobenius* in Zürich und *Stickelberger* in Freiburg i. Br.)

Wir betrachten im Folgenden elliptische Functionen, in welchen nebst dem Argumente u auch die Perioden 2ω und $2\omega'$ unabhängig veränderlich sind und nur der Beschränkung unterliegen, dass sie weder unendlich gross noch unendlich klein werden dürfen, und ihr Verhältniss nicht durch reelle Werthe hindurchgehen darf. Dann sind auch die zugehörigen Invarianten g_2 und g_3 unabhängige Variabeln, die alle endlichen Werthe annehmen dürfen, für welche die Discriminante $g_2^3-27g_3^2$ von Null verschieden ist. Aus den Perioden findet man die Invarianten durch die Gleichungen

$$(1.)\qquad g_2 = 60\Sigma'\frac{1}{(2\nu\omega+2\nu'\omega')^4},\quad g_3 = 140\Sigma'\frac{1}{(2\nu\omega+2\nu'\omega')^6},$$

wo die Summationsbuchstaben ν, ν' alle Paare ganzer Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen, mit Ausschluss des Paares 0, 0, oder wenn man

$$(2.)\qquad \tau = \frac{\omega'}{\omega},\quad h = e^{i\pi\tau}$$

setzt, und annimmt, dass die Ordinate der complexen Grösse τ positiv ist, durch die Gleichungen

$$(3.)\qquad \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^4 12g_2 = 1+240\,\Sigma_1^\infty\frac{\lambda^3h^{2\lambda}}{1-h^{2\lambda}},\quad \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^6 216g_3 = 1-504\,\Sigma_1^\infty\frac{\lambda^5h^{2\lambda}}{1-h^{2\lambda}}.$$

Um die partiellen Differentialgleichungen zu finden, denen eine elliptische Function, als Function dreier Variabeln betrachtet, genügt, fassen wir sie zunächst als Function von u, ω, ω' auf, und transformiren dann die erhaltenen Differentialgleichungen durch Einführung der Variabeln g_2, g_3 für ω, ω'. Wir knüpfen daran eine Zusammenstellung der Differentialglei-

chungen, die zwischen den Perioden, den Invarianten, den Perioden der Integrale zweiter Gattung und den durch lineare Transformation der Perioden umgeformten Invarianten bestehen.

§ 1.

Die Perioden 2ω, $2\omega'$ als unabhängige Variabeln.

Ist $\varphi(u)$ eine elliptische Function mit den Perioden 2ω und $2\omega'$, und sind α und β zwei ganze Zahlen, so ist

$$\varphi(u+2\alpha\omega+2\beta\omega') = \varphi(u).$$

Setzt man

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\omega} = \varphi_1(u,\omega,\omega'), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\omega'} = \varphi_2(u,\omega,\omega'), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial u} = \varphi'(u,\omega,\omega'),$$

so ergeben sich durch Differentiation jener Gleichung nach ω, ω' und u die Relationen

$$\begin{aligned} \varphi_1(u+2\alpha\omega+2\beta\omega')+2\alpha\varphi'(u+2\alpha\omega+2\beta\omega') &= \varphi_1(u), \\ \varphi_2(u+2\alpha\omega+2\beta\omega')+2\beta\varphi'(u+2\alpha\omega+2\beta\omega') &= \varphi_2(u), \\ \varphi'(u+2\alpha\omega+2\beta\omega') &= \varphi'(u). \end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit ω, ω' und u, und addirt sie, so erhält man

$$\begin{aligned} \omega\varphi_1(u+2\alpha\omega+2\beta\omega')+\omega'\varphi_2(u+2\alpha\omega+2\beta\omega')+(u+2\alpha\omega+2\beta\omega')\varphi'(u+2\alpha\omega+2\beta\omega') \\ = \omega\varphi_1(u)+\omega'\varphi_2(u)+u\varphi'(u). \end{aligned}$$

Setzt man

$$(4.) \qquad \mathrm{r}(u) = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)},$$

und multiplicirt man jene Gleichungen mit

$$\eta = \mathrm{r}(\omega), \quad \eta' = \mathrm{r}(\omega') \quad \text{und} \quad \mathrm{r}(u),$$

und addirt sie, so erhält man mit Berücksichtigung der Formel

$$\mathrm{r}(u+2\alpha\omega+2\beta\omega') = \mathrm{r}(u)+2\alpha\eta+2\beta\eta'$$

die Gleichung

$$\begin{aligned} \eta\varphi_1(u+2\alpha\omega+2\beta\omega')+\eta'\varphi_2(u+2\alpha\omega+2\beta\omega')+\mathrm{r}(u+2\alpha\omega+2\beta\omega')\varphi'(u+2\alpha\omega+2\beta\omega') \\ = \eta\varphi_1(u)+\eta'\varphi_2(u)+\mathrm{r}(u)\varphi'(u). \end{aligned}$$

Es ergiebt sich also der Satz:

I. *Ist $\varphi(u,\omega,\omega')$ eine elliptische Function mit den Perioden 2ω und $2\omega'$, so sind*

Function wird nur für $u=0$ (und die congruenten Werthe) unendlich von der zweiten Ordnung, und ihre Entwicklung nach Potenzen von u beginnt mit

$$(9.)\qquad \wp(u) = \frac{1}{u^2}+\frac{g_2}{20}u^2+\frac{g_3}{28}u^4+\frac{g_2^2}{1200}u^6+\cdots.$$

Die Function $f(u)$ wird daher in diesem Falle nur für $u=0$ unendlich von der zweiten Ordnung, und die Anfangsglieder ihrer Entwicklung sind $-\frac{2}{u^2}+au^2+\cdots$. Sie ist also gleich $-2\wp(u)$. Da $\mathrm{r}(u)$ ebenfalls nur für $u=0$ unendlich wird, und seine Entwicklung nach Potenzen von u mit

$$(10.)\qquad \mathrm{r}(u) = \frac{1}{u}-\frac{g_2}{60}u^3-\frac{g_3}{140}u^5-\frac{g_2^2}{8400}u^7-\cdots$$

beginnt, so wird die Function $g(u)$ nur für $u=0$ unendlich von der vierten Ordnung, und die Anfangsglieder ihrer Entwicklung sind

$$-\frac{2}{u^4}+\tfrac{2}{15}g_2+bu^2+\cdots.$$

Sie ist daher gleich

$$-\tfrac{1}{3}\wp''(u)+\tfrac{1}{6}g_2 = -2\wp(u)^2+\tfrac{1}{3}g_2.$$

Demnach ist

$$(11.)\qquad \begin{cases} \omega\dfrac{\partial\wp}{\partial\omega}+\omega'\dfrac{\partial\wp}{\partial\omega'}+\quad u\,\dfrac{\partial\wp}{\partial u} = -2\wp, \\[2mm] \eta\dfrac{\partial\wp}{\partial\omega}+\eta'\dfrac{\partial\wp}{\partial\omega'}+\mathrm{r}(u)\dfrac{\partial\wp}{\partial u} = -2\wp^2+\tfrac{1}{3}g_2. \end{cases}$$

Die erste dieser beiden Formeln ist auch leicht daraus zu erhalten, dass

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2}+\Sigma'\left(\frac{1}{(u+2\nu\omega+2\nu'\omega')^2}-\frac{1}{(2\nu\omega+2\nu'\omega')^2}\right)$$

eine homogene Function $(-2)^{\text{ten}}$ Grades von u, ω, ω' ist.

Entwickelt man beide Seiten der Gleichungen (11.) nach Potenzen von u, so ergeben sich durch Vergleichung der Coefficienten der Anfangsglieder die Relationen

$$(12.)\qquad \begin{cases} \omega\dfrac{\partial g_2}{\partial\omega}+\omega'\dfrac{\partial g_2}{\partial\omega'} = -4g_2, \quad \omega\dfrac{\partial g_3}{\partial\omega}+\omega'\dfrac{\partial g_3}{\partial\omega'} = -6g_3, \\[2mm] \eta\dfrac{\partial g_2}{\partial\omega}+\eta'\dfrac{\partial g_2}{\partial\omega'} = -6g_3, \quad \eta\dfrac{\partial g_3}{\partial\omega}+\eta'\dfrac{\partial g_3}{\partial\omega'} = -\dfrac{g_2^2}{3}. \end{cases}$$

Ist also $\varphi(\omega,\omega')$ eine beliebige Function von ω und ω', so ist

$$(13.)\qquad \begin{cases} \omega\dfrac{\partial\varphi}{\partial\omega}+\omega'\dfrac{\partial\varphi}{\partial\omega'} = -\left(4g_2\dfrac{\partial\varphi}{\partial g_2}+6g_3\dfrac{\partial\varphi}{\partial g_3}\right), \\[2mm] \eta\dfrac{\partial\varphi}{\partial\omega}+\eta'\dfrac{\partial\varphi}{\partial\omega'} = -\tfrac{1}{3}\left(18g_3\dfrac{\partial\varphi}{\partial g_2}+g_2^2\dfrac{\partial\varphi}{\partial g_3}\right). \end{cases}$$

Demnach folgt aus Satz I:

III. *Ist $\varphi(u, g_2, g_3)$ eine elliptische Function mit den Invarianten g_2, g_3, so sind*

$$(14.)\quad \begin{cases} 4g_2\dfrac{\partial\varphi}{\partial g_2}+6g_3\dfrac{\partial\varphi}{\partial g_3}-u\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}, \\ 18g_3\dfrac{\partial\varphi}{\partial g_2}+\;g_2^2\dfrac{\partial\varphi}{\partial g_3}-3\mathrm{r}(u)\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} \end{cases}$$

elliptische Functionen mit denselben Invarianten.

Nimmt man in den Formeln (13.) für φ die Discriminante und die absolute Invariante

$$(15.)\quad g_6 = g_2^3-27g_3^2,\quad g = \frac{g_2^3}{g_6},$$

so erhält man

$$(16.)\quad \begin{cases} \omega\dfrac{\partial g_6}{\partial\omega}+\omega'\dfrac{\partial g_6}{\partial\omega'} = -12g_6,\quad \omega\dfrac{\partial g}{\partial\omega}+\omega'\dfrac{\partial g}{\partial\omega'} = 0, \\ \eta\dfrac{\partial g_6}{\partial\omega}+\eta'\dfrac{\partial g_6}{\partial\omega'} = \quad 0,\qquad \eta\dfrac{\partial g}{\partial\omega}+\eta'\dfrac{\partial g}{\partial\omega'} = -18\dfrac{g_2^2g_3}{g_6}. \end{cases}$$

Setzt man ferner

$$\varpi = \mu\omega+\mu'\omega',\quad \tilde{\eta} = \mu\eta+\mu'\eta',$$

wo μ und μ' zwei willkürliche Constanten bedeuten, und nimmt in den Formeln (13.) für φ die Grösse ϖ, so erhält man

$$(17.)\quad 4g_2\frac{\partial\varpi}{\partial g_2}+6g_3\frac{\partial\varpi}{\partial g_3} = -\varpi,\quad 18g_3\frac{\partial\varpi}{\partial g_2}+g_2^2\frac{\partial\varpi}{\partial g_3} = -3\tilde{\eta}.$$

Aus den Formeln (12.) folgt

$$\begin{vmatrix} \eta\dfrac{\partial g_2}{\partial\omega}+\eta'\dfrac{\partial g_2}{\partial\omega'} & \eta\dfrac{\partial g_3}{\partial\omega}+\eta'\dfrac{\partial g_3}{\partial\omega'} \\ \omega\dfrac{\partial g_2}{\partial\omega}+\omega'\dfrac{\partial g_2}{\partial\omega'} & \omega\dfrac{\partial g_3}{\partial\omega}+\omega'\dfrac{\partial g_3}{\partial\omega'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6g_3 & \dfrac{g_2^2}{3} \\ 4g_2 & 6g_3 \end{vmatrix}.$$

Wendet man auf die linke Seite das Multiplicationstheorem der Determinanten an, so ergiebt sich daraus bei Benutzung der üblichen Schreibweise für die Functionaldeterminanten

$$(18.)\quad \frac{\partial(g_2, g_3)}{\partial(\omega, \omega')} = -\frac{8}{3\pi i}g_6,\quad \frac{\partial(\omega, \omega')}{\partial(g_2, g_3)} = -\frac{3\pi i}{8}\frac{1}{g_6}.$$

Durch Auflösung der Gleichungen (12.), (16.) und (17.) erhält man die Formeln*)

---

*) Die Formel (20.) und die Formel (31.) im folgenden Paragraphen sind auf einem andern Wege gefunden von Herrn *Bruns, Ueber die Perioden der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung.* Dorpat 1875.

$$(19.)\quad \begin{cases} \dfrac{3\pi i}{2}\dfrac{\partial g_2}{\partial \omega} = 12 g_2 \eta' - 18 g_3 \omega', & \dfrac{3\pi i}{2}\dfrac{\partial g_3}{\partial \omega} = 18 g_3 \eta' - g_2^2 \omega', \\ -\dfrac{3\pi i}{2}\dfrac{\partial g_2}{\partial \omega'} = 12 g_2 \eta - 18 g_3 \omega, & -\dfrac{3\pi i}{2}\dfrac{\partial g_3}{\partial \omega'} = 18 g_3 \eta - g_2^2 \omega, \end{cases}$$

$$(20.)\quad 4 g_6 \frac{\partial \varpi}{\partial g_2} = 18 g_3 \tilde{\eta} - g_2^2 \varpi, \quad 4 g_6 \frac{\partial \varpi}{\partial g_3} = -12 g_2 \tilde{\eta} + 18 g_3 \varpi,$$

$$(21.)\quad \begin{cases} \dfrac{i\pi}{24}\dfrac{\partial \log(g_6)}{\partial \omega} = \eta', & \dfrac{i\pi}{24}\dfrac{\partial \log(g_6)}{\partial \omega'} = -\eta, \\ \dfrac{i\pi}{36}\dfrac{\partial g}{\partial \omega} = -\dfrac{g_2^2 g_3}{g_6}\omega', & \dfrac{i\pi}{36}\dfrac{\partial g}{\partial \omega'} = \dfrac{g_2^2 g_3}{g_6}\omega. \end{cases}$$

Daraus folgt in Verbindung mit der Gleichung (7.)

$$(22.)\quad \frac{i\pi}{24} d\log(g_6) = \eta' d\omega - \eta\, d\omega' = \omega' d\eta - \omega\, d\eta'.$$

Beiläufig ergiebt sich aus diesen Formeln

$$(23.)\quad \frac{\partial \eta}{\partial \omega} + \frac{\partial \eta'}{\partial \omega'} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial \eta} + \frac{\partial \omega'}{\partial \eta'} = 0.$$

Um auch den Satz II. durch ein Beispiel zu erläutern, wollen wir die partielle Differentialgleichung ableiten, der die Function

$$(24.)\quad \mathrm{q}(u) = \frac{\sigma(\mu\omega + \mu'\omega' - u)}{\sigma(\mu\omega + \mu'\omega')\sigma(u)} e^{(\mu\eta + \mu'\eta')u}$$

genügt, falls μ und μ' zwei von ω und ω' unabhängige Grössen sind, und $\mu\omega + \mu'\omega'$ nicht eine ganze Periode ist. Diese Function befriedigt die Gleichungen

$$(25.)\quad \mathrm{q}(u + 2\omega) = e^{-i\pi\mu'}\mathrm{q}(u), \quad \mathrm{q}(u + 2\omega') = e^{i\pi\mu}\mathrm{q}(u),$$

wird nur für $u = 0$ (und die congruenten Werthe) unendlich gross, und ihre Entwicklung nach Potenzen von u beginnt mit

$$\mathrm{q}(u) = \frac{1}{u} - r - \tfrac{1}{2}(s - r^2)u + \cdots,$$

wo

$$(26.)\quad r = \mathrm{r}(\mu\omega + \mu'\omega') - (\mu\eta + \mu'\eta'), \quad s = \wp(\mu\omega + \mu'\omega')$$

gesetzt ist. Nach Satz II. genügt daher die Function

$$\eta \frac{\partial \mathrm{q}}{\partial \omega} + \eta' \frac{\partial \mathrm{q}}{\partial \omega'} + \mathrm{r}(u) \frac{\partial \mathrm{q}}{\partial u}$$

denselben Gleichungen, sie wird ferner ebenfalls nur für $u = 0$ unendlich, und die Anfangsglieder ihrer Entwickelung nach Potenzen von u sind

$$-\frac{1}{u^3} - \tfrac{1}{2}(s - r^2)\frac{1}{u} + \cdots.$$

Einem bekannten Theorem von *Hermite* zufolge (Compt. Rend. Bd. 85, p. 693) ist daher

$$\eta \frac{\partial \mathrm{q}(u)}{\partial \omega} + \eta' \frac{\partial \mathrm{q}(u)}{\partial \omega'} + \mathrm{r}(u) \frac{\partial \mathrm{q}(u)}{\partial u} = -\tfrac{1}{2}(\mathrm{q}''(u) + (s - r^2)\,\mathrm{q}(u))$$

oder nach Formel (13.)

$$(27.)\qquad 18 g_3 \frac{\partial \mathrm{q}(u)}{\partial g_2} + g_2^2 \frac{\partial \mathrm{q}(u)}{\partial g_3} = \tfrac{3}{2}(\mathrm{q}''(u) + 2\mathrm{r}(u)\,\mathrm{q}'(u) + (s - r^2)\,\mathrm{q}(u)).$$

§ 3.

Die Perioden 2η, $2\eta'$.

Aus den Formeln (11.) und (13.) folgt*)

$$(28.)\qquad 18 g_3 \frac{\partial \wp(u)}{\partial g_2} + g_2^2 \frac{\partial \wp(u)}{\partial g_3} = 3\mathrm{r}(u)\wp'(u) + 6\wp(u)^2 - g_2.$$

Da $\wp(u) = -\mathrm{r}'(u)$, $\wp''(u) = 6\wp(u)^2 - \frac{1}{2}g_2$ ist, so ist die rechte Seite gleich

$$-3(\mathrm{r}\mathrm{r}'' + \mathrm{r}'^2) + \tfrac{3}{2}\wp'' + \tfrac{1}{4}g_2.$$

Durch Integration ergiebt sich daher aus der obigen Gleichung

$$(29.)\qquad 18 g_3 \frac{\partial \mathrm{r}(u)}{\partial g_2} + g_2^2 \frac{\partial \mathrm{r}(u)}{\partial g_3} = -3\mathrm{r}(u)\wp(u) - \tfrac{3}{2}\wp'(u) + \tfrac{1}{4}g_2 u.$$

Durch nochmalige Integration findet man daraus

$$18 g_3 \frac{\partial \log \sigma(u)}{\partial g_2} + g_2^2 \frac{\partial \log \sigma(u)}{\partial g_3} = \tfrac{3}{2}\mathrm{r}(u)^2 - \tfrac{3}{2}\wp(u) + \tfrac{1}{8}g_2 u^2$$

oder

$$(30.)\qquad 18 g_3 \frac{\partial \sigma(u)}{\partial g_2} + g_2^2 \frac{\partial \sigma(u)}{\partial g_3} = \tfrac{3}{2}\sigma''(u) + \tfrac{1}{8}g_2 u^2 \sigma(u).$$

Setzt man

$$\frac{\partial \mathrm{r}}{\partial \omega} = \mathrm{r}_1(u, \omega, \omega'), \quad \frac{\partial \mathrm{r}}{\partial \omega'} = \mathrm{r}_2(u, \omega, \omega'),$$

so ist den Formeln (13.), (29.) zufolge

$$\eta \mathrm{r}_1(u) + \eta' \mathrm{r}_2(u) + \mathrm{r}(u)\mathrm{r}'(u) = \tfrac{1}{2}\wp'(u) - \tfrac{1}{12}g_2 u.$$

Für $u = \omega$ erhält man daraus, weil $\wp'(\omega) = 0$, $\mathrm{r}(\omega) = \eta$ ist,

$$\eta(\mathrm{r}_1(\omega) + \mathrm{r}'(\omega)) + \eta' \mathrm{r}_2(\omega) = -\tfrac{1}{12}g_2\omega$$

oder

$$\eta \frac{\partial \eta}{\partial \omega} + \eta' \frac{\partial \eta}{\partial \omega'} = -\tfrac{1}{12}g_2\omega.$$

*) Die Art, wie Herr *Weierstrass* in seinen Vorlesungen diese Differentialgleichungen ableitet, findet man von Herrn *Simon*, dieses Journal Bd. 81, S. 311 auseinandergesetzt. Vgl. *Weierstrass*, dieses Journal Bd. 52, S. 352.

Aus dieser Gleichung und der analogen für η' ergiebt sich die zweite der Formeln

$$(31.)\quad \begin{cases} \omega\dfrac{\partial\bar\eta}{\partial\omega}+\omega'\dfrac{\partial\bar\eta}{\partial\omega'}=-\bar\eta, & 4g_2\dfrac{\partial\bar\eta}{\partial g_2}+6g_3\dfrac{\partial\bar\eta}{\partial g_3}=\bar\eta, \\ \eta\dfrac{\partial\bar\eta}{\partial\omega}+\eta'\dfrac{\partial\bar\eta}{\partial\omega'}=-\tfrac{1}{12}g_2\varpi, & 18g_3\dfrac{\partial\bar\eta}{\partial g_2}+\;g_2^2\dfrac{\partial\bar\eta}{\partial g_3}=\tfrac{1}{4}g_2\varpi. \end{cases}$$

Mithin ist

$$\begin{vmatrix} \eta\dfrac{\partial\eta}{\partial\omega}+\eta'\dfrac{\partial\eta}{\partial\omega'} & \eta\dfrac{\partial\eta'}{\partial\omega}+\eta'\dfrac{\partial\eta'}{\partial\omega'} \\ \omega\dfrac{\partial\eta}{\partial\omega}+\omega'\dfrac{\partial\eta}{\partial\omega'} & \omega\dfrac{\partial\eta'}{\partial\omega}+\omega'\dfrac{\partial\eta'}{\partial\omega'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tfrac{1}{12}g_2\omega & \tfrac{1}{12}g_2\omega' \\ \eta & \eta' \end{vmatrix}$$

oder nach (7.)

$$(32.)\quad \frac{\partial(\eta,\eta')}{\partial(\omega,\omega')}=-\tfrac{1}{12}g_2,\quad \frac{\partial(\omega,\omega')}{\partial(\eta,\eta')}=-\frac{12}{g_2},\quad \frac{\partial(\eta,\eta')}{\partial(g_2,g_3)}=\frac{i\pi}{32}\,\frac{g_2}{g_6}.$$

In Verbindung mit den Gleichungen (21.) folgt daraus (vgl. *Klein*, Math. Ann. Bd. XV S. 86.)

$$(33.)\quad \frac{\partial^2\log g_6}{\partial\omega^2}\,\frac{\partial^2\log g_6}{\partial\omega'^2}-\left(\frac{\partial^2\log g_6}{\partial\omega\,\partial\omega'}\right)^2=\frac{48}{\pi^2}\,g_2.$$

Ist $\varphi(\omega,\omega')$ eine Function von ω und ω', so ergiebt sich aus (21.)

$$\eta\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}+\eta'\frac{\partial\varphi}{\partial\omega'}=\frac{i\pi}{24}\,\frac{\partial(\log g_6,\varphi)}{\partial(\omega,\omega')}=\frac{i\pi}{24}\,\frac{\partial(\log g_6,\varphi)}{\partial(\eta,\eta')}\,\frac{\partial(\eta,\eta')}{\partial(\omega,\omega')},$$

also nach (22.) und (32.)

$$(34.)\quad \eta\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}+\eta'\frac{\partial\varphi}{\partial\omega'}=-\tfrac{1}{12}g_2\left(\omega\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+\omega'\frac{\partial\varphi}{\partial\eta'}\right)$$

und folglich nach (13.)

$$(35.)\quad \omega\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+\omega'\frac{\partial\varphi}{\partial\eta'}=\frac{4}{g_2}\left(18g_3\frac{\partial\varphi}{\partial g_2}+g_2^2\frac{\partial\varphi}{\partial g_3}\right).$$

Nimmt man für φ die Invarianten g_2 und g_3, so erhält man die zweite Reihe der Formeln

$$(36.)\quad \begin{cases} \eta\dfrac{\partial g_2}{\partial\eta}+\eta'\dfrac{\partial g_2}{\partial\eta'}=4g_2, & \eta\dfrac{\partial g_3}{\partial\eta}+\eta'\dfrac{\partial g_3}{\partial\eta'}=6g_3, \\ \omega\dfrac{\partial g_2}{\partial\eta}+\omega'\dfrac{\partial g_2}{\partial\eta'}=72\dfrac{g_3}{g_2}, & \omega\dfrac{\partial g_3}{\partial\eta}+\omega'\dfrac{\partial g_3}{\partial\eta'}=4g_2. \end{cases}$$

Berechnet man aus den Formeln (31.) die Werthe von $\dfrac{\partial\bar\eta}{\partial g_2}$ und $\dfrac{\partial\bar\eta}{\partial g_3}$, so findet man unter Berücksichtigung der Relationen (20.) die Gleichungen

$$(37.)\quad \frac{\partial\bar\eta}{\partial g_3}+\frac{\partial\varpi}{\partial g_2}=0,\quad 12\frac{\partial\bar\eta}{\partial g_2}+g_2\frac{\partial\varpi}{\partial g_3}=0.$$

Daraus erhält man durch Elimination von $\tilde{\eta}$ oder ϖ die Differentialgleichungen zweiter Ordnung (vgl. *Borchardt*, dieses Journal Bd. 58, S. 134.)

$$
(38.)\quad \begin{cases} 12\dfrac{\partial^2 \varpi}{\partial g_2^2} - g_2 \dfrac{\partial^2 \varpi}{\partial g_3^2} = 0, \\ 12\dfrac{\partial^2 \tilde{\eta}}{\partial g_2^2} - g_2 \dfrac{\partial^2 \tilde{\eta}}{\partial g_3^2} - \dfrac{12}{g_2}\dfrac{\partial \tilde{\eta}}{\partial g_2} = 0. \end{cases}
$$

Zu diesen Formeln gelangt man am bequemsten, indem man von der Darstellung von ω und η durch geschlossene Integrale

$$
(39.)\quad 2\omega = \int \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}}, \quad 2\eta = -\int \frac{s\,ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}}
$$

ausgeht.

Sei D das durch die Gleichungen

$$
(40.)\quad \begin{cases} D\varphi = 18 g_3 \dfrac{\partial \varphi}{\partial g_2} + g_2^2 \dfrac{\partial \varphi}{\partial g_3} = \frac{1}{8}\dfrac{\partial(g_6, \varphi)}{\partial(g_2, g_3)} \\ \qquad = -3\left(\eta \dfrac{\partial \varphi}{\partial \omega} + \eta' \dfrac{\partial \varphi}{\partial \omega'}\right) = -\dfrac{i\pi}{8}\dfrac{\partial(\log g_6, \varphi)}{\partial(\omega, \omega')} \end{cases}
$$

definirte Operationssymbol. Setzt man in den Gleichungen (28.), (29.), (30.) $u = \mu\omega + \mu'\omega'$, wo μ, μ' von ω, ω' unabhängig sind, und benutzt man ausser den Bezeichnungen (26.) noch die Abkürzungen

$$
(41.)\quad q = \sigma(\mu\omega + \mu'\omega')\, e^{-\frac{1}{2}(\mu\omega + \mu'\omega')(\mu\eta + \mu'\eta')}, \quad t = \wp'(\mu\omega + \mu'\omega'),
$$

so erhält man die Formeln

$$
(42.)\quad \begin{cases} D \log q = \frac{3}{2} r^2 - \frac{3}{2} s, & Dr = -3rs - \frac{3}{2} t, \\ \quad Ds = 3rt + 6s^2 - g_2, & Dt = 3r(6s^2 - \frac{1}{2} g_2) + 9st. \end{cases}
$$

§ 4.

Das Periodenverhältniss und die absolute Invariante.

Ist $\varphi(\omega, \omega')$ eine homogene Function nullten Grades von ω und ω', also eine Function der einen Variabeln $\tau = \dfrac{\omega'}{\omega}$, so ist

$$
(\alpha.)\quad \eta \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} + \eta' \frac{\partial \varphi}{\partial \omega'} = -\frac{d\varphi}{d\tau}\frac{\eta\omega' - \eta'\omega}{\omega^2} = \frac{\pi^2}{2\omega^2}\frac{d\varphi}{d i\pi\tau}.
$$

Z. B. ist nach Formel (16.)

$$
(43.)\quad \frac{dg}{d i\pi\tau} = -\frac{36\omega^2}{\pi^2}\frac{g_2^2 g_3}{g_6}.
$$

Daher ist

$$
(44.)\quad 18 g_3 \frac{\partial \varphi}{\partial g_2} + g_2^2 \frac{\partial \varphi}{\partial g_3} = 54 \frac{g_2^2 g_3}{g_6}\frac{d\varphi}{dg}.
$$

Die Function

$$(45.)\qquad f = g_6^{\frac{1}{12}}$$

ist eine eindeutige homogene Function $(-1)^{\text{ten}}$ Grades von ω und ω' und genügt nach (16.) der Gleichung

$$(46.)\qquad \eta\frac{\partial f}{\partial\omega}+\eta'\frac{\partial f}{\partial\omega'} = 0.$$

Ist daher φ eine homogene Function ν^{ten} Grades von ω und ω', so ist

$$(\beta.)\qquad f^{\nu}\Big(\eta\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}+\eta'\frac{\partial\varphi}{\partial\omega'}\Big) = \eta\frac{\partial(\varphi f^{\nu})}{\partial\omega}+\eta'\frac{\partial(\varphi f^{\nu})}{\partial\omega'} = \frac{\pi^2}{2\omega^2}\frac{d(\varphi f^{\nu})}{di\pi\tau}.$$

Nimmt man in dieser Formel $\varphi = \frac{1}{\omega}$ und setzt man

$$(47.)\qquad \psi(\tau) = \frac{\pi}{\omega f},$$

so erhält man

$$(48.)\qquad \frac{\eta\omega}{\pi^2} = -\tfrac{1}{2}\frac{d\log\psi(\tau)}{d(i\pi\tau)},\quad \frac{\eta}{\pi f} = -\tfrac{1}{2}\frac{d\psi(\tau)}{di\pi\tau}.$$

In den folgenden Formeln dieses Paragraphen wollen wir der Einfachheit halber $f=1$ voraussetzen, so dass ω, η, g_2, g_3 die Ausdrücke bedeuten, die bisher mit ωf, ηf^{-1}, $g_2 f^{-4}$, $g_3 f^{-6}$ bezeichnet worden sind. Dieselben sind also Functionen von τ oder g. Eine Function von ω und ω' oder von g_2 und g_3 kann nun zwar mittelst der Gleichung $f=1$ in verschiedene Formen gebracht werden. Aber zufolge der Relation (46.) ist der Ausdruck

$$\eta\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}+\eta'\frac{\partial\varphi}{\partial\omega'}\quad\text{oder}\quad 18g_3\frac{\partial\varphi}{\partial g_2}+g_2^2\frac{\partial\varphi}{\partial g_3}$$

unabhängig von der Art, auf die φ durch ω, ω' oder g_2, g_3 ausgedrückt ist.

Setzt man in der Formel (44.) $\varphi = \varpi$ oder $\tilde{\eta}$, so erhält man nach (17.) und (31.)

$$(49.)\qquad 18g_2^2g_3\frac{d\varpi}{dg} = -\tilde{\eta},\quad 216g_2g_3\frac{d\tilde{\eta}}{dg} = \varpi.$$

Durch Elimination von $\tilde{\eta}$ oder ϖ ergiebt sich daraus (vgl. ***Bruns***, l. c. S. 5; ***Dedekind*** dieses Journal Bd. 83, S. 280)

$$(50.)\qquad \begin{cases} 6g(g-1)\frac{d^2\varpi}{dg^2}+(7g-4)\frac{d\varpi}{dg}+\frac{1}{24}\varpi = 0,\\ 6g(g-1)\frac{d^2\tilde{\eta}}{dg^2}+(5g-2)\frac{d\tilde{\eta}}{dg}+\frac{1}{24}\tilde{\eta} = 0.\end{cases}$$

Nimmt man in der Formel (β.) $\varphi = g_2$ oder g_3, so findet man nach (12.)

$$(51.)\qquad \psi(\tau)^2\frac{dg_2}{di\pi\tau} = -12g_3,\quad \psi(\tau)^2\frac{dg_3}{di\pi\tau} = -\tfrac{2}{3}g_2^2.$$

Nimmt man ferner $\varphi = \eta$, so erhält man nach (31.)

$$\frac{\pi^2}{2\omega^2}\frac{d\eta}{di\pi\tau} = \eta\frac{\partial\eta}{\partial\omega} + \eta'\frac{\partial\eta}{\partial\omega'} = -\frac{g_2}{12}\omega.$$

Daher ist

$$\frac{g_2}{12} = -\frac{\pi^2}{2\omega^2}\frac{d\eta}{d(i\pi\tau)},$$

oder, wenn man für ω und $\eta\omega$ ihre Werthe aus (47.) und (48.) einsetzt,

$$(52.) \qquad \tfrac{1}{3}g_2 = \psi(\tau)^3\frac{d^2\psi(\tau)}{(di\pi\tau)^2}.$$

Nimmt man endlich der Reihe nach $\varphi = g_2,\ g_3,\ g_2^2,\ g_2 g_3$, u. s. w., so ergiebt sich nach analogen Umformungen

$$(53.) \qquad \begin{cases} 4g_3 = -\frac{1}{2}\psi(\tau)^4\dfrac{d^3(\psi(\tau)^2)}{(di\pi\tau)^3}, \\[2ex] 3g_2^2 = \frac{1}{3}\psi(\tau)^5\dfrac{d^4(\psi(\tau)^3)}{(di\pi\tau)^4}, \\[2ex] \frac{1}{3}\cdot 2^8 g_2 g_3 = -\frac{1}{4}\psi(\tau)^6\dfrac{d^5(\psi(\tau)^4)}{(di\pi\tau)^5}, \\[2ex] \frac{647}{9}g_2^3 + 32.37 g_3^2 = \frac{1}{5}\psi(\tau)^7\dfrac{d^6(\psi(\tau)^5)}{(di\pi\tau)^6}, \\[2ex] 2^6.3^4 g_2^2 g_3 = -\frac{1}{6}\psi(\tau)^8\dfrac{d^7(\psi(\tau)^6)}{(di\pi\tau)^7}. \end{cases}$$

Allgemein ergiebt sich

$$\psi_n = \frac{(-1)^n}{n-1}\psi(\tau)^{n+1}\frac{d^n(\psi(\tau)^{n-1})}{(di\pi\tau)^n} = (-1)^n\psi(\tau)^{n+1}\frac{d^{n-1}(\psi(\tau)^{n-2}\psi'(\tau))}{i\pi(di\pi\tau)^{n-1}}$$

als eine ganze Function von $\frac{g_2}{3}$ und $4g_3$, deren Coefficienten positive ganze Zahlen sind, mit Hülfe der Recursionsformel

$$(54.) \qquad 2\psi_n = -2\psi^2\frac{d\psi_{n-1}}{di\pi\tau} + \binom{n}{2}\psi_2\psi_{n-2} + \binom{n}{3}\psi_3\psi_{n-3} + \cdots + \binom{n}{2}\psi_{n-2}\psi_2,$$

welche aus der *Lagrange*schen Umkehrungsformel leicht abzuleiten ist*).
In dieser Gleichung ist

$$-\psi^2\frac{d\psi_{n-1}}{di\pi\tau} = +\tfrac{2}{3}\left(18g_3\frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial g_2} + g_2^2\frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial g_3}\right).$$

---

*) Allgemeiner ergeben sich aus dieser Formel, wenn u und v zwei Functionen von x sind, die Identitäten

$$\sum_\lambda{}_0^n\binom{n}{\lambda}\frac{1}{\lambda+1}D_x^\lambda(u^{\lambda+1})D_x^{n-\lambda}(u^{-\lambda-1}v) = D_x^n(v),$$

$$\sum_\lambda{}_0^n(-1)^\lambda\binom{n}{\lambda}\frac{1}{\lambda+1}u^{-\lambda-1}D_x^{n-\lambda}(vD_x^\lambda u^{\lambda+1}) = D_x^n(v).$$

Ist y eine Function der Variabeln x, sind α, β, γ, δ Constanten, und ist $\alpha\delta-\beta\gamma$ von Null verschieden, so ist

$$(73.)\qquad (\alpha\delta-\beta\gamma)^n \frac{d^n y}{\left(d\frac{\gamma+\delta x}{\alpha+\beta x}\right)^n} = (\alpha+\beta x)^{n+1}\frac{d^n(\alpha+\beta x)^{n-1}y}{dx^n}.$$

Mit Hülfe dieser Identität kann man in den Formeln, die sich aus (52.), (53.) durch Ersetzung von ω, ω' durch Ω, Ω' ergeben, die Ableitungen nach T auf solche nach τ zurückführen. Setzt man

$$(74.)\qquad \Psi(\tau) = \frac{\pi}{\omega F} = (d-b\tau)\psi\left(\frac{-c+a\tau}{d-b\tau}\right),$$

so erhält man auf diese Weise die Gleichungen

$$(75.)\qquad \begin{cases} \frac{1}{3}\frac{G_2}{F^4} = \Psi(\tau)^3 \frac{d^2\Psi(\tau)}{(di\pi\tau)^2}, \\ 4\frac{G_3}{F^6} = -\frac{1}{2}\Psi(\tau)^4\frac{d^3(\Psi(\tau)^2)}{(di\pi\tau)^3}, \\ 3\frac{G_2^2}{F^8} = \frac{1}{3}\Psi(\tau)^5\frac{d^4(\Psi(\tau)^3)}{(di\pi\tau)^4}, \\ \frac{2^8}{3}\frac{G_2G_3}{F^{10}} = -\frac{1}{4}\Psi(\tau)^6\frac{d^5(\Psi(\tau)^4)}{(di\pi\tau)^5}, \quad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Diese Relationen so wie auch die der Gleichung (48.) entsprechende Beziehung

$$(76.)\qquad \frac{aH+bH'}{\pi F} = -\frac{1}{2}\frac{d\Psi(\tau)}{di\pi\tau}$$

lassen sich direct herleiten mit Hülfe der Bemerkung, dass, wenn φ eine homogene Function nullten Grades von ω und ω' ist, nach (59.)

$$(77.)\qquad \eta\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}+\eta'\frac{\partial\varphi}{\partial\omega'} = H\frac{\partial\varphi}{\partial\Omega}+H'\frac{\partial\varphi}{\partial\Omega'}$$

ist. Aus den beiden ersten Gleichungen (75.) folgt beiläufig, dass die Function $\Psi(\tau)$, welche drei willkürliche Constanten enthält, das allgemeine Integral der Differentialgleichung (55.) ist.

Aus den Formeln (44.) und (77.) ergiebt sich, wenn φ eine Function von τ oder g ist, die Relation

$$(78.)\qquad D\varphi = 54\frac{g_2^2 g_3}{g_6}\frac{d\varphi}{dg} = 54\frac{G_2^2G_3}{G_6}\frac{d\varphi}{dG}.$$

Setzt man in derselben $\varphi = G$, so erhält man

$$(79.)\qquad DG = \frac{54G_2^2G_3}{G_6},\quad \frac{dG}{dg} = \frac{g_6G_2^2G_3}{g_2^2g_3G_6},$$

und mithin

$$(80.)\quad G_2=\frac{(DG)^2}{2^2 3^4 G(G-1)},\quad \frac{G_2}{g_2}=\frac{g(g-1)}{G(G-1)}\Big(\frac{dG}{dg}\Big)^2,$$

$$(81.)\quad G_3=\frac{(DG)^3}{2^3 3^6 G^2(G-1)},\quad \frac{G_3}{g_3}=\frac{g^2(g-1)}{G^2(G-1)}\Big(\frac{dG}{dg}\Big)^3,$$

$$(82.)\quad F^2=\frac{DG}{6\sqrt{3}G^{\frac{2}{3}}(G-1)^{\frac{1}{2}}},\quad \frac{F^2}{f^2}=\frac{g^{\frac{2}{3}}(g-1)^{\frac{1}{2}}}{G^{\frac{2}{3}}(G-1)^{\frac{1}{2}}}\frac{dG}{dg}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$r=6\sqrt{3}g^{\frac{2}{3}}(g-1)^{\frac{1}{2}},\quad R=6\sqrt{3}G^{\frac{2}{3}}(G-1)^{\frac{1}{2}},$$

so ist nach (78.)

$$D\varphi=f^2 r\frac{d\varphi}{dg}=F^2 R\frac{d\varphi}{dG},$$

also wenn man eine beliebige Function von g zur unabhängigen Variabeln wählt,

$$\frac{F^2}{f^2}=\frac{dG}{R}:\frac{dg}{r}.$$

Da $D\varphi=0$ ist, falls φ eine Function von f ist, so ist nach (67.)

$$G_1=-\tfrac{1}{6}D\log\Big(\frac{F^2}{f^2}\Big)=\tfrac{1}{6}\Big(D\Big(\log\frac{dg}{r}\Big)-D\Big(\log\frac{dG}{R}\Big)\Big)$$

$$=\tfrac{1}{6}\Big(f^2 r\frac{d}{dg}\Big(\log\frac{dg}{r}\Big)-F^2 R\frac{d}{dG}\Big(\log\frac{dG}{R}\Big)\Big),$$

oder wenn man

$$p=r\frac{d^2g}{dg^2}-\frac{dr}{dg},\quad P=R\frac{d^2G}{dG^2}-\frac{dR}{dG}$$

setzt,

$$6G_1=-D\log\frac{F^2}{f^2}=f^2p-F^2P.$$

Folglich ist

$$6DG_1 = f^2Dp-F^2DP-PF^2D\log\Big(\frac{F^2}{f^2}\Big)$$

$$= f^2Dp-F^2DP+PF^2(f^2p-F^2P).$$

Setzt man diese Ausdrücke für G_1 und DG_1 in die Formel (61.) ein, so findet man nach leichten Reductionen

$$3g_2+2f^2Dp+f^4p^2 = 3G_2+2F^2DP+F^4P^2,$$

oder weil

$$g_2=\frac{f^4r^2}{3.36g(g-1)}$$

ist,

$$f^4r^2\Big(\frac{1}{36g(g-1)}+\frac{p^2}{r^2}+\frac{2}{r}\frac{dp}{dg}\Big)=F^4R^2\Big(\frac{1}{36G(G-1)}+\frac{P^2}{R^2}+\frac{2}{R}\frac{dP}{dG}\Big).$$

Setzt man also

$$\begin{aligned}[][g] &= \frac{1}{36g(g-1)}+\frac{p^2}{r^2}+\frac{2}{r}\frac{dp}{dg}\\ &= \frac{1}{36g(g-1)}+\left(\frac{d\log dg}{dg}\right)^2+2\frac{d^2\log dg}{dg^2}-\left(\frac{d\log r}{dg}\right)^2-2\frac{d^2\log r}{dg^2}\\ &= 2\frac{d^3g}{dg^3}-3\left(\frac{d^2g}{dg^2}\right)^2+\frac{8}{9g^2}-\frac{23}{36g(g-1)}+\frac{3}{4(g-1)^2},\end{aligned}$$

so findet man mittelst der Relation

$$f^4r^2 : F^4R^2 = dg^2 : dG^2$$

die Differentialgleichung dritter Ordnung (*Dedekind*, dieses Journal, Bd. 83, S. 280.)

$$(83.)\qquad [g]\,dg^2 = [G]\,dG^2.$$

Sind die Verhältnisse der Constanten a, b, c, d rational, so ist G_1 (oder F oder G) Wurzel einer algebraischen Gleichung, deren Coefficienten rationale Functionen von g_2, g_3 (oder g_2, g_3, f oder g) sind. Mittelst dieser Gleichung kann man DG_1 und D^2G_1, und folglich mit Hülfe der Formeln (61.), (62.) die Grössen G_2 und G_3 rational durch G_1, g_2, g_3 ausdrücken.

Nach Formel (30.) befriedigt die Function

$$\bar{\sigma}(u) = \sigma(u, \Omega, \Omega')$$

die Differentialgleichung

$$18G_3\frac{\partial\bar{\sigma}(u)}{\partial G_2}+G_2^2\frac{\partial\bar{\sigma}(u)}{\partial G_3} = \tfrac{3}{2}\bar{\sigma}''(u)+\tfrac{1}{8}G_2u^2\bar{\sigma}(u).$$

Nach (59.) folgt daraus die Relation

$$D\bar{\sigma}(u) = \tfrac{3}{2}\bar{\sigma}''(u)-3G_1u\bar{\sigma}'(u)+\tfrac{1}{8}G_2u^2\bar{\sigma}(u)+3G_1\bar{\sigma}(u),$$

welche durch die Substitution

$$\bar{\sigma}(u) = e^{\frac{1}{2}G_1u^2}\varphi(u)$$

in

$$D\varphi(u) = \tfrac{3}{2}\varphi''(u)+\tfrac{9}{2}G_1\varphi(u)+\tfrac{1}{8}g_2u^2\varphi(u)$$

übergeht. Wir machen jetzt die specielle Annahme, dass

$$a=\frac{\alpha}{\sqrt{n}},\quad b=\frac{\beta}{\sqrt{n}},\quad c=\frac{\gamma}{\sqrt{n}},\quad d=\frac{\delta}{\sqrt{n}},$$

also

$$(84.)\qquad \alpha\delta-\beta\gamma = n$$

ist, wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen sind und n eine positive ganze Zahl. Für diesen Fall wollen wir die oben eingeführte Bezeichnung dahin abändern, dass wir an Stelle von

$$\Omega,\quad \Omega',\quad u,\quad \varphi(u),\quad G_1,\quad G_2,\quad G_3$$

durchgängig

$$\sqrt{n}\Omega,\quad \sqrt{n}\Omega',\quad \sqrt{n}u,\quad \sqrt{n}\varphi(u),\quad \frac{1}{n}G_1,\quad \frac{1}{n^2}G_2,\quad \frac{1}{n^3}G_3$$

schreiben. Dann ist

$$nD\varphi(u) = \tfrac{3}{2}\varphi''(u)+\tfrac{3}{2}G_1\varphi(u)+\tfrac{1}{8}n^2g_2u^2\varphi(u),$$

oder wenn man

$$\varphi(u) = \sigma(u)^n\chi(u)$$

setzt,

$$nD\chi(u) = \tfrac{3}{2}\chi''(u)+3n\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}\chi'(u)+\tfrac{3}{2}n(n-1)\frac{\sigma'(u)^2-\sigma(u)\sigma''(u)}{\sigma(u)^2}\chi(u)+\tfrac{3}{2}G_1\chi(u).$$

Führt man jetzt an Stelle von u die Grösse $s=\wp(u,\omega,\omega')$ als unabhängige Variable ein, und geht dadurch $\chi(u,\omega,\omega')$ in $B(s,g_2,g_3)$ über, so erhält man (*Kiepert*, dieses Journal Bd. 88, S. 209):

$$(85.)\quad \begin{cases} 4nDB = 6(4s^3-g_2s-g_3)\dfrac{\partial^2 B}{\partial s^2} \\ -(12(2n-3)s^2-(4n-3)g_2)\dfrac{\partial B}{\partial s}+6(n(n-1)s+3G_1)B. \end{cases}$$

Ist $n=2m+1$ eine ungerade Zahl, so ist bekanntlich B eine ganze Function m^{ten} Grades von s

$$B = s^m+B_1s^{m-1}+B_2s^{m-2}+\cdots+B_m.$$

Zwischen den Coefficienten dieser Function ergiebt sich aus der entwickelten Differentialgleichung die Recursionsformel

$$(86.)\quad \begin{cases} 6(2\mu+2)(2\mu+3)B_{\mu+1} = 4nDB_\mu-18G_1B_\mu \\ -\tfrac{1}{2}(n-2\mu+1)(n+6\mu)g_2B_{\mu-1}+\tfrac{3}{2}(n-2\mu+1)(n-2\mu+3)g_3B_{\mu-2}. \end{cases}$$

Insbesondere findet man mittelst der Formeln

$$G_2-n^2g_2 = 12G_1^2+4nDG_1,\quad 18G_3 = 12G_1G_2+nDG_2,$$

welche an die Stelle von (61.), (62.) treten, die Werthe

$$2B_1 = -G_1,\quad 240B_2 = 30G_1^2-G_2-(5n-6)g_2,$$

$$3360B_3 = -70G_1^3+7G_1G_2+7(5n-18)G_1g_2-4G_3-4(14n-15)g_3.$$

Zürich, April 1881.

Ueber die Kugeln, welche ein räumliches Vierseit berühren.

(Hierzu eine Figurentafel.)

(Von Herrn *Heinrich Vogt* in Breslau.)

---

§ 1.

Es seien a_1 und a_2 zwei beliebige Tangenten einer Kugel mit dem Mittelpunkt $\mathfrak{M}$, ihre Berührungspunkte $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$; die Tangentenebenen in $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ α_1 und α_2 schneiden sich in der zu $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$ conjugirten Geraden $\alpha_1\alpha_2$; die Schnittpunkte von a_1 und a_2 mit $\alpha_2\alpha_1$ seien $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{e}_2$. Alsdann sind von einem Punkt $\mathfrak{x}_1$ der Geraden a_1 zwei Tangenten an die Kugel möglich, welche a_2 schneiden; nämlich die von $\mathfrak{x}_1$ ausgehenden Tangenten des Kreises, in welchem die Ebene $\mathfrak{x}_1 a_2$ die Kugel schneidet. Es seien $b_1 \equiv \mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2$, $c_1 \equiv \mathfrak{x}_1\mathfrak{x}'_2$ diese Tangenten, $\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1$ ihre Berührungspunkte. Um die Vorstellungen zu fixiren, wähle ich $\mathfrak{x}_1$ auf der Strecke $\mathfrak{A}_1\mathfrak{f}_1$; mit $\mathfrak{x}_2$ bezeichne ich denjenigen Punkt, welcher auf der Strecke $\mathfrak{A}_2\mathfrak{e}_2$ liegt, mit $\mathfrak{x}'_2$ den Schnittpunkt, welcher ausserhalb der Strecke $\mathfrak{A}_2\mathfrak{e}_2$ liegt.

Da $\mathfrak{x}_1\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{x}_1\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{x}_2\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{x}_2\mathfrak{B}_1$, so sind $\mathfrak{x}_1\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{x}_1\mathfrak{B}_1$ gegen jede durch $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ gehende Ebene, $\mathfrak{x}_2\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{x}_2\mathfrak{B}_1$ gegen jede durch $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1$ gehende Ebene gleich geneigt; mithin, da $\mathfrak{x}_1\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{x}_2\mathfrak{B}_1$ nur Theile derselben Geraden b_1 sind, so sind die Geraden $a_1 a_2 b_1$ gegen die Ebene $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1$, welche ich ebenso wie den in ihr liegenden Kugelkreis mit β bezeichnen will, gleich geneigt. Ebenso sind $a_1 a_2 c_1$ gegen die Ebene $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_1 \equiv \gamma$ gleich geneigt. β und γ sind offenbar verschiedene Ebenen; denn es giebt nur zwei Punkte $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}_1$ des Kreises β, welche von $\mathfrak{x}_1$ die Entfernung gleich $\mathfrak{x}_1\mathfrak{A}_1$ haben; da nun auch $\mathfrak{x}_1\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{x}_1\mathfrak{A}_1$, so kann $\mathfrak{C}_1$ nicht in der Ebene β liegen.

Hierdurch sind die Ebenen β und γ vollständig bestimmt; wir können den Satz aussprechen:

Diejenigen Tangenten einer Kugel, welche sich an zwei feste Tangenten $a_1 a_2$ derselben anlehnen, haben ihre Berührungspunkte auf zwei festen Kreisen $\beta\gamma$, gegen welche $a_1 a_2$ und alle beweglichen Tangenten gleich geneigt sind.

β und γ sind zunächst zu finden, indem man durch $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ zu a_2 und a_1 Parallele zieht, und die Winkel, welche diese Parallelen mit a_1 und a_2 bilden, halbirt. Bewegt man die $a_1 a_2$ schneidende Tangente b_1 an dem Kreise β herum, so kommt sie innerhalb der Ebenen $\alpha_1 \alpha_2$ in die Lagen $b_\mathfrak{e} \equiv \mathfrak{A}_1 \mathfrak{e}_2$, $b_\mathfrak{f} = \mathfrak{A}_2 \mathfrak{f}_1$. Diese Geraden gehören, da von $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2$ nur je eine sich an $a_1 a_2$ anlehnende Tangente möglich ist, auch der Schaar c an; sie haben demnach gegen β und γ dieselbe Neigung wie a_1 und a_2. Deshalb sind $\beta\gamma$ auch die Ebenen, welche die Winkel $a_1 b_\mathfrak{e}$, $a_2 b_\mathfrak{f}$ halbiren. Mithin schneiden sich die Kreise (nicht die Ebenen) $\beta\gamma$ rechtwinklig in $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$. Bezeichnen wir die Schnittpunkte der Geraden $\alpha_1 \alpha_2$ mit den Ebenen $\beta\gamma$ mit $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$, so ist die Strecke $\mathfrak{f}_1 \mathfrak{e}_2$ in $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ harmonisch getheilt und zwar im Verhältniss $\frac{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{f}_1}{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{e}_2} = \frac{\mathfrak{A}_2 \mathfrak{f}_1}{\mathfrak{A}_2 \mathfrak{e}_2} = \frac{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{f}_1}{\mathfrak{A}_2 \mathfrak{e}_2}$, d. h. im Verhältniss der Strecken, welche von $a_1 a_2$ durch $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2$ und die dazu conjugirte Gerade $\alpha_1 \alpha_2$ abgeschnitten werden.

Die Ebenen $\beta\gamma$ sind, weil die Kugelkreise $\beta\gamma$ einander rechtwinklig schneiden, conjugirt; demnach sind auch $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ conjugirte Punkte; $\mathfrak{b}$ ist der Pol von γ, $\mathfrak{c}$ von β.

Sämmtliche Tangenten b kann ich nach dem Obigen erhalten, indem ich eine von ihnen an den Punkten des Kreises β innerhalb der Tangentialebenen mit beständig gleicher Neigung gegen die Ebene β herumführe; oder mit anderen Worten, indem ich sie um die Gerade $\mathfrak{M}\mathfrak{m}_\mathfrak{b}$ (wo $\mathfrak{m}_\mathfrak{b}$ Mittelpunkt des Kreises β ist) rotiren lasse. Die Gerade b lehnt sich hierbei beständig nicht nur an $a_1 a_2$ an, sondern an jede Gerade, welche durch Rotation von a_1 oder a_2 um $\mathfrak{M}\mathfrak{m}_\mathfrak{b}$ als Axe entsteht. ***Mithin bilden die Tangenten b die eine Regelschaar eines Rotationshyperboloids B, dessen anderer Regelschaar $a_1 a_2$ angehören. Ebenso sind die Tangenten c die eine Regelschaar eines Rotationshyperboloids Γ mit der Axe*** $\mathfrak{M}\mathfrak{m}_\mathfrak{c}$ (wenn $\mathfrak{m}_\mathfrak{c}$ Mittelpunkt des Kreises γ ist). Beide Hyperboloide haben nicht nur die Erzeugenden $a_1 a_2$ sondern auch $b_\mathfrak{f} b_\mathfrak{e}$ gemeinsam, sind also demselben Vierseit umschrieben.

Die Gerade $\mathfrak{M}\mathfrak{m}_\mathfrak{b}$ ist normal zur Ebene β, mithin auch normal zu der in dieser Ebene enthaltenen Geraden $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1$, welche der Halbirungslinie des Nebenwinkels von $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{x}_1 \mathfrak{B}_1$ parallel ist. Die Gerade $\mathfrak{M}\mathfrak{x}_1$ gehört der Halbirungsebene des Winkels $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{x}_1 \mathfrak{B}_1$ an und ist deshalb ebenfalls normal zu $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1$; mithin ist die Ebene $\mathfrak{M}\mathfrak{m}_\mathfrak{b}\mathfrak{x}_1$ selbst die Halbirungsebene des Winkels $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{x}_1 \mathfrak{B}_1$. Demnach sind die von einem beliebigen Punkte $\mathfrak{n}$ der Geraden $\mathfrak{M}\mathfrak{m}_\mathfrak{b}$ auf a_1 und b_1 gefällten Lothe einander gleich. Da dasselbe

für die ganzen Schaaren a und b gilt, so ist $\mathfrak{n}$ Mittelpunkt einer Kugel, welche die Schaaren a und b berührt. Es giebt mithin eine ganze Schaar von Kugeln, welche a und b berühren; es ist leicht zu sehen, dass die Berührungsebenen immer parallel β oder, was dasselbe bedeutet, normal zur Axe $\mathfrak{M}\mathfrak{m}_6$ bleiben. Alle diese Kugeln haben zur Enveloppe das Hyperboloid B. Ebenso sind die Regelschaaren des Hyperboloids Γ zugleich Tangenten zu der Kugelschaar, deren Enveloppe Γ ist. Beide Kugelschaaren haben die einzige Kugel $\mathfrak{M}$ gemein.

§ 2.

Die Geraden $a_1 a_2$ sind durch die Regelschaaren bc in doppelter Weise projectivisch auf einander bezogen. Sind $\mathfrak{r}_{1\infty}$ und $\mathfrak{p}_{2\infty}$ die unendlich fernen Punkte von a_1 und a_2; $\mathfrak{r}_2$ und $\mathfrak{p}_1$ die ihnen im System b, $\mathfrak{r}'_2$ und $\mathfrak{p}'_1$ die im System c entsprechenden Punkte; $\mathfrak{R}\,\mathfrak{P}$ die Berührungspunkte der Tangenten $b_r \equiv \mathfrak{r}_{1\infty}\mathfrak{r}_2$, $b_p \equiv \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_{2\infty}$; $\mathfrak{R}'\,\mathfrak{P}'$ die Berührungspunkte von $c_r \equiv \mathfrak{r}_{1\infty}\mathfrak{r}'_2$, $c_p \equiv \mathfrak{p}'_1\mathfrak{p}_{2\infty}$, so ist zunächst zu beachten, dass $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{P}$ nicht, wie es bei der ebenen Figur der Fall sein würde, zu $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ Diametralpunkte des Kreises β sind (und ebensowenig $\mathfrak{R}'\,\mathfrak{P}'$ des Kreises γ). Denn die Tangentenebenen in $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{R}$ schneiden sich in einer durch $\mathfrak{c}$, den Pol von β gehenden, zu a_1 und b_r parallelen Geraden. Da diese Gerade aber der Ebene β nicht parallel ist, so sind $\mathfrak{A}_1\mathfrak{R}$ nicht Diametralpunkte des Kreises β. Dasselbe gilt für $\mathfrak{A}_2\mathfrak{P}$, $\mathfrak{A}_1\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{A}_2\mathfrak{P}'$. Es ist aber Bogen $\mathfrak{A}_1\mathfrak{R} = \mathfrak{A}_2\mathfrak{P}$, $\mathfrak{A}_1\mathfrak{R}' = \mathfrak{A}_2\mathfrak{P}'$.

Die dem Punkte $\mathfrak{r}_{1\infty}$ entsprechenden Punkte sind die Schnittpunkte der Geraden a_2 mit dem die Kugel berührenden Kreiscylinder, dessen Erzeugende parallel a_1 sind. Diese Schnittpunkte werden offenbar durch $\mathfrak{A}_2$ getrennt; der eine liegt zwischen $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{e}_2$, weil $\mathfrak{e}_2$ Schnitt von a_2 mit a_1 ist, welche Ebene als Tangentenebene des Cylinders (mit Ausnahme der in ihr enthaltenen Geraden a_1) ganz ausserhalb des Cylinders verläuft. Der andere Schnittpunkt liegt zwischen $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{p}_{2\infty}$. Da für die Schaar b die Strecke $\mathfrak{A}_1\mathfrak{f}_1$ der Strecke $\mathfrak{e}_2\mathfrak{A}_2$ ganz entsprechend gesetzt ist, so geht der Strahl b_r durch den ausserhalb von $\mathfrak{A}_2\mathfrak{e}_2$ liegenden Punkt $\mathfrak{r}_2$, der Strahl c_r durch den innerhalb von $\mathfrak{A}_2\mathfrak{e}_2$ liegenden Punkt $\mathfrak{r}'_2$. Ebenso liegt $\mathfrak{p}_2$ zwischen $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{r}_{1\infty}$, $\mathfrak{p}'_2$ zwischen $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{f}_1$. Die Reihenfolge der Berührungspunkte ist hiernach auf β $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{R}\,\mathfrak{P}$, auf γ $\mathfrak{A}_1\mathfrak{P}'\mathfrak{A}_2\mathfrak{R}'$.

Die Strecken auf den Geraden $a_1 a_2$ sind vermittelst der Schaar b einander zugeordnet durch die Punktfolgen

$$\mathfrak{r}_{1\infty} \quad \mathfrak{p}_1 \quad \mathfrak{A}_1 \quad \mathfrak{f}_1 \quad \mathfrak{r}_{1\infty},$$
$$\mathfrak{r}_2 \quad \mathfrak{p}_{2\infty} \quad \mathfrak{e}_2 \quad \mathfrak{A}_2 \quad \mathfrak{r}_2;$$

die entsprechenden Berührungspunkte sind

$$\mathfrak{R} \quad \mathfrak{P} \quad \mathfrak{A}_1 \quad \mathfrak{A}_2 \quad \mathfrak{R}.$$

Lassen wir den Punkt $\mathfrak{x}_1$ auf a_1 die vier durch jene Punkte gebildeten Strecken durchwandern, so erhalten wir folgende Möglichkeiten für die Lagen der Schnittpunkte $\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2$ der Tangente b_1 mit $a_1 a_2$ und ihres Berührungspunktes $\mathfrak{B}_1$:

$$\mathfrak{x}_1 \text{ auf } \mathfrak{r}_{1\infty}\mathfrak{p}_1, \quad \mathfrak{p}_1\mathfrak{A}_1, \quad \mathfrak{A}_1\mathfrak{f}_1, \quad \mathfrak{f}_1\mathfrak{r}_{1\infty},$$
$$\mathfrak{x}_2 \text{ auf } \mathfrak{r}_2\mathfrak{p}_{2\infty}, \quad \mathfrak{p}_{2\infty}\mathfrak{e}_2, \quad \mathfrak{e}_2\mathfrak{A}_2, \quad \mathfrak{A}_2\mathfrak{r}_2;$$

Reihenfolge der Punkte (auf den endlichen Strecken):

$$\mathfrak{x}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{x}_2, \quad \mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_1\mathfrak{B}_1, \quad \mathfrak{x}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{x}_2, \quad \mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2\mathfrak{B}_1.$$

Combiniren wir mit b_1 eine zweite Tangente b_2, welche a_1 und a_2 in $\mathfrak{y}_1$ und $\mathfrak{y}_2$ schneiden, die Kugel in $\mathfrak{B}_2$ berühren möge, so ergiebt sich, wenn b_1 und b_2 sämmtliche möglichen Lagenbeziehungen annehmen, dass die Berührungspunkte $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2$ des räumlichen Vierseits $a_1 b_1 a_2 b_2$ auf den Seiten desselben folgende Lagen haben können:

1) Alle vier Punkte liegen ausserhalb der Seitenstrecken, und zwar so, dass die Richtungen, in welchen je zwei Gegenseiten durchlaufen werden müssen, um von der Seitenstrecke an den Berührungspunkt zu gelangen, nicht demselben Umlaufssinne um das Vierseit angehören.

2) Zwei Punkte innerhalb auf zwei Gegenseiten, zwei ausserhalb auf den beiden andern so, dass, um von den Seitenstrecken zu den Berührungspunkten zu gelangen, diese beiden Seiten in demselben Umlaufssinne durchlaufen werden müssen.

3) Zwei Punkte innerhalb zweier anstossenden Seiten, zwei ausserhalb auf den beiden andern, benachbart deren nicht gemeinschaftlichen Eckpunkten.

4) Zwei Punkte innerhalb zweier anstossenden Seiten, zwei ausserhalb auf den beiden andern, benachbart ihrem gemeinschaftlichen Eckpunkt.

5) Alle vier Punkte innerhalb der Seitenstrecken.

Es sind dies dieselben Fälle, welche beim Kreise und dem ebenen Tangentenvierseit möglich sind*); nur mit dem Unterschied, dass das räum-

*) *Steiner,* dieses Journal Bd. 32. Gesammelte Werke Bd. II S. 381.

liche Vierseit nur in einer Weise, das ebene in drei Weisen als Viereck aufgefasst werden kann, und dass deshalb bei letzterem drei Fälle an einer Figur auftreten, die bei dem räumlichen auf drei Figuren vertheilt sind.

Für die Schaar c sind die Strecken der Geraden $a_1 a_2$ einander zugeordnet durch die Punktfolgen

$$\mathfrak{r}_{1\infty} \quad \mathfrak{A}_1 \quad \mathfrak{p}'_1 \quad \mathfrak{f}_1 \quad \mathfrak{r}_{1\infty},$$
$$\mathfrak{r}_2 \quad \mathfrak{e}_2 \quad \mathfrak{p}_{2\infty} \quad \mathfrak{A}_2 \quad \mathfrak{r}_2,$$

mit den entsprechenden Berührungspunkten

$$\mathfrak{R}' \quad \mathfrak{A}_1 \quad \mathfrak{P}' \quad \mathfrak{A}_2 \quad \mathfrak{R}'.$$

Durchwandert der Punkt $\mathfrak{x}_1$ die vier hierdurch auf a_1 begrenzten Strecken, so erhalten wir für die Lagen der Punkte $\mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}'_2 \mathfrak{C}_1$ auf c_1 folgende Möglichkeiten:

$$\mathfrak{x}_1 \text{ auf } \mathfrak{r}_{1\infty}\mathfrak{A}_1, \quad \mathfrak{A}_1\mathfrak{p}'_1, \quad \mathfrak{p}'_1\mathfrak{f}_1, \quad \mathfrak{f}_1\mathfrak{r}_{1\infty},$$
$$\mathfrak{x}'_2 \text{ auf } \mathfrak{r}'_2\mathfrak{e}_2, \quad \mathfrak{e}_2\mathfrak{p}_{2\infty}, \quad \mathfrak{p}_{2\infty}\mathfrak{A}_2, \quad \mathfrak{A}_2\mathfrak{r}'_2;$$

Reihenfolge der Punkte (auf den endlichen Strecken):

$$\mathfrak{x}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{x}'_2, \quad \mathfrak{x}'_2\mathfrak{x}_1\mathfrak{C}_1, \quad \mathfrak{x}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{x}'_2, \quad \mathfrak{x}_1\mathfrak{x}'_2\mathfrak{C}_1.$$

Combiniren wir mit c_1 eine zweite Tangente c_2 derselben Schaar und lassen beide alle möglichen Lagen annehmen, so ergeben sich für die Lage der Berührungspunkte $\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_2$ auf den Seitenstrecken des Vierseits $a_1 c_1 a_2 c_2$ dieselben fünf Möglichkeiten, welche wir für $a_1 b_1 a_2 b_2$ gefunden haben; ausserdem aber noch der Fall:

6) Alle vier Berührungspunkte liegen ausserhalb der Seitenstrecken, und zwar auf den Verlängerungen derselben über zwei nicht benachbarte Ecken hinaus*).

Combiniren wir zuletzt eine Gerade der Schaar b mit einer Geraden der Schaar c, so ergeben sich folgende Fälle:

7) Drei Berührungspunkte liegen auf den Seitenstrecken, einer auf der Verlängerung.

8) Ein Berührungspunkt liegt auf einer Seitenstrecke, drei auf den Verlängerungen**).

---

*) Dieser Fall kommt beim ebenen Tangentenvierseit nicht vor.

**) Die Sonderung dieses Falls nach der Lage der Aussenpunkte ist für den vorliegenden Zweck ohne Interesse.

Unabhängig von der Lage der Berührungspunkte gelten in allen Fällen die Beziehungen:

$$\mathfrak{x}_1\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{x}_1\mathfrak{B}_1, \quad \mathfrak{y}_1\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{y}_1\mathfrak{B}_2, \quad \mathfrak{y}_2\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{y}_2\mathfrak{B}_2, \quad \mathfrak{x}_2\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{x}_2\mathfrak{B}_1;$$
$$\mathfrak{x}_1\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{x}_1\mathfrak{C}_1, \quad \mathfrak{y}_1\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{y}_1\mathfrak{C}_2, \quad \mathfrak{y}'_2\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{y}'_2\mathfrak{C}_2, \quad \mathfrak{x}'_2\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{x}'_2\mathfrak{C}_1.$$

Fügen wir je vier dieser Gleichungen, welche die Theilstrecken der vier Seiten enthalten, mit geeigneten Vorzeichen zusammen, so ergiebt sich, wenn wir mit $a_1 a_2 b_1 b_2 c_1 c_2$ jetzt die Längen der Seiten des Vierseits bezeichnen,

in den Fällen 1, 2, 3 die Relation $a_1 - a_2 = b_1 - b_2 \quad (c_1 - c_2)$,

in den Fällen 4, 5, 6 $\qquad a_1 + a_2 = b_1 + b_2 \quad (c_1 + c_2)$.

Für die Fälle 7, 8 können sich Relationen für die Seitenstrecken offenbar nicht ergeben; denn im Fall 7 müsste man, um zwei Gegenseiten herzustellen, alle vier Theile addiren, um die beiden andern herzustellen, drei Theile addiren, einen subtrahiren; im Fall 8 müsste man für ein Gegenseitenpaar zwei Theilstrecken addiren, zwei subtrahiren, für das andere Paar aber drei addiren, eine subtrahiren*).

Wir erhalten somit das Resultat: ***In einem räumlichen Vierseit, welches von einer Kugel berührt wird, ist nur dann die Summe zweier Seiten gleich der Summe der beiden andern, wenn die vier Berührungspunkte in einer Ebene liegen. Ist dies nicht der Fall, so giebt es keine Relation zwischen den Seitenlängen; die Berührungspunkte liegen dann so, dass je zwei der vier durch drei Berührungspunkte bestimmten Kreise, welche die Berührungspunkte auf zwei Gegenseiten gemeinsam haben, sich in diesen Punkten rechtwinklig schneiden.***

Die Fälle 1, 2, 3, in denen $a_1 - a_2 = b_1 - b_2$, unterscheiden sich nicht durch die Natur des Vierseits $a_1 b_1 a_2 b_2$, sondern nur durch die Lage der Kugel $\mathfrak{M}$: Wie wir gesehen haben, wird $a_1 b_1 a_2 b_2$ von unendlich vielen Kugeln berührt, deren Berührungsebenen sämmtlich parallel β sind. Verschiebe ich nun β parallel mit sich selbst, so gehen die Lagen der Punkte $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2$ in den Fällen 1, 2, 3, die ich hinfort als I zusammenfasse, in einander über. Ein Gleiches gilt für die Fälle 4, 5, 6, in denen $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$; diese bezeichne ich als II.

Zieht man die Lage der Berührungspunkte im Fall I in Betracht, so zeigt sich, dass die Axe, welche die Centren sämmtlicher Berührungs-

*) Wollte man die Differenz zweier Gegenseiten bilden, so hätte man je zwei Vorzeichen zu ändern.

kugeln enthält, auf den Halbirungsebenen der Innenwinkel*) bei $\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_2$, auf den Halbirungsebenen der Aussenwinkel bei $\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_1$ liegt**). Es sind also in diesem Fall, um die Mittelpunktsaxe zu finden, abwechselnd die Innen- und Aussenwinkel des Vierecks $\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_2\mathfrak{y}_1$ zu halbiren. Im Fall II ist die Mittelpunktsaxe die gemeinschaftliche Linie der Halbirungsebenen sämmtlicher Innenwinkel des Vierecks. Demnach besteht für das Vorhandensein der Fälle I oder II folgendes Kriterium***): *Stellt man für ein Vierseit, dessen Seiten von einer Kugel in einer Ebene berührt werden, eine Gleichung her, so dass auf jeder Seite des Gleichheitszeichens ein Paar Gegenseiten stehen, so hat man mit gleichen Vorzeichen diejenigen Seiten zu setzen, für welche der Kugelmittelpunkt auf der Halbirungsebene des Innenwinkels liegt, mit ungleichen diejenigen, für welche er auf der Halbirungsebene des Aussenwinkels liegt.*

Die Mittelpunktsaxe verläuft im Falle I, da sie auf den Halbirungsebenen der Aussenwinkel an zwei Gegenecken liegt, ganz ausserhalb des Vierseits, d. h. sie kann in gewissen Richtungen parallel mit sich selbst beliebig weit verschoben werden, ohne das Vierseit zu schneiden, im Falle II wird sie vom Vierseit umschlossen.

Im Falle 7 zeigt die Lage der Berührungspunkte, dass der Kugelmittelpunkt $\mathfrak{M}$ auf den Halbirungsebenen von drei Innenwinkeln und einem Aussenwinkel liegt; im Falle 8 je nach der Lage der Berührungspunkte entweder so wie bei 7 oder auf den Halbirungsebenen von drei Aussenwinkeln und einem Innenwinkel. Ich fasse 7 und 8 als III zusammen.

§ 3.

Die in § 2 besprochenen Fälle der Berührung eines Vierseits durch eine Kugel haben sich als die einzig möglichen ergeben. Es lässt sich dies auch auf folgende Weise verificiren: Nimmt man auf jeder Seite eines Vierseits $a_1 b_1 a_2 b_2$ einen Punkt an, so sind ausser den in § 2 aufgezählten

---

*) Die concaven Innenwinkel des Vierecks $\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_2\mathfrak{y}_1$ sind eindeutig bestimmt, da das Vierseit $a_1 b_1 a_2 b_2$ nur ein Viereck enthält.

**) Die Bezeichnung kann immer so gewählt werden, dass $a_1 - a_2 = b_1 - b_2$, nicht $a_1 - a_2 = b_2 - b_1$ ist.

***) Das Kriterium, welches *Baltzer*, Elem. Aufl. 3 Buch 4 § 4, 10 aus der relativen Lage der Berührungspunkte für die ebene Figur entnimmt, wird für die räumliche illusorisch.

Möglichkeiten der Lagen dieser Punkte zu den Ecken nachfolgende vier Fälle möglich:

9) alle vier Punkte ausserhalb in demselben Umlauf;

10) alle vier Punkte ausserhalb, auf einem Paar Gegenseiten in gleichem Umlauf, auf dem andern Paar in unter sich verschiedenem Umlauf;

11) zwei Punkte innerhalb auf zwei anstossenden Seiten, zwei ausserhalb auf den beiden andern in gleichem Umlauf;

12) zwei Punkte innerhalb auf zwei Gegenseiten, zwei ausserhalb auf den beiden andern in verschiedenem Umlauf.

Sollten nun die hier angenommenen Punkte Berührungspunkte einer Kugel sein, so würden die in einer Ecke zusammenstossenden Abschnitte gleich sein. Daraus würde sich ergeben $a_1 + a_2 = b_1 - b_2$. Dies ist aber eine Absurdität; denn es müsste $a_1 + b_2 = b_1 - a_2$ sein, während doch

$$a_1 + b_2 > \mathfrak{x}_1 \mathfrak{y}_2 > b_1 - a_2$$

ist. Demnach sind die Fälle I, II, III die einzig möglichen.

Für ein beliebiges windschiefes Vierseit $a_1 b_1 a_2 b_2$ mit den Ecken

$$a_1 b_1 \equiv \mathfrak{x}_1, \quad b_1 a_2 \equiv \mathfrak{x}_2, \quad a_2 b_2 \equiv \mathfrak{y}_2, \quad b_2 a_1 \equiv \mathfrak{y}_1$$

sind die Orte für die Mitten aller Kugeln, welche

$$a_1 b_1, \quad b_1 a_2, \quad a_2 b_2, \quad b_2 a_1$$

berühren, die Halbirungsebenen

$$J_{\mathfrak{x}_1} A_{\mathfrak{x}_1}, \quad J_{\mathfrak{x}_2} A_{\mathfrak{x}_2}, \quad J_{\mathfrak{y}_2} A_{\mathfrak{y}_2}, \quad J_{\mathfrak{y}_1} A_{\mathfrak{y}_1}$$

der Innen- und Aussenwinkel bei

$$\mathfrak{x}_1, \quad \mathfrak{x}_2, \quad \mathfrak{y}_2, \quad \mathfrak{y}_1.$$

Je drei von diesen Ebenen, welche zu verschiedenen Eckpunkten gehören, ergeben als Schnittpunkt den Mittelpunkt einer $a_1 b_1 a_2 b_2$ berührenden Kugel, deren Berührungspunkte zu je dreien innerhalb oder ausserhalb der Seitenstrecken liegen; weil andernfalls entweder $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$ oder $a_1 - a_2 = b_1 - b_2$ sein müsste.

Durch Combination der Ebenen bei $\mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 \mathfrak{y}_2$ ergeben sich 8 Kugeln, durch deren Mittelpunkt je eine der Ebenen $J_{\mathfrak{y}_1} A_{\mathfrak{y}_1}$ geht*). Von vier durch einen Kugelmittelpunkt gehenden Ebenen müssen je drei die Innen- oder Aussenwinkel halbiren. Wir erhalten demnach:

*) Ueberhaupt lassen sich vier beliebigen Geraden des Raumes acht Kugeln anbeschreiben; denn der geometrische Ort der gleichen Abstände von zwei Geraden ist ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid. Drei dieser Paraboloide schneiden sich in den gesuchten acht Punkten.

$$\begin{array}{llllll}
\mathfrak{M}_1 & \text{auf} & A_{\mathfrak{x}_1} & J_{\mathfrak{x}_2} & J_{\mathfrak{y}_2} & J_{\mathfrak{y}_1} \\
\mathfrak{M}_2 & \text{-} & J_{\mathfrak{x}_1} & A_{\mathfrak{x}_2} & J_{\mathfrak{y}_2} & J_{\mathfrak{y}_1} \\
\mathfrak{M}_3 & \text{-} & J_{\mathfrak{x}_1} & J_{\mathfrak{x}_2} & A_{\mathfrak{y}_2} & J_{\mathfrak{y}_1} \\
\mathfrak{M}_4 & \text{-} & J_{\mathfrak{x}_1} & J_{\mathfrak{x}_2} & J_{\mathfrak{y}_2} & A_{\mathfrak{y}_1} \\
\mathfrak{M}_5 & \text{-} & J_{\mathfrak{x}_1} & A_{\mathfrak{x}_2} & A_{\mathfrak{y}_2} & A_{\mathfrak{y}_1} \\
\mathfrak{M}_6 & \text{-} & A_{\mathfrak{x}_1} & J_{\mathfrak{x}_2} & A_{\mathfrak{y}_2} & A_{\mathfrak{y}_1} \\
\mathfrak{M}_7 & \text{-} & A_{\mathfrak{x}_1} & A_{\mathfrak{x}_2} & J_{\mathfrak{y}_2} & A_{\mathfrak{y}_1} \\
\mathfrak{M}_8 & \text{-} & A_{\mathfrak{x}_1} & A_{\mathfrak{x}_2} & A_{\mathfrak{y}_2} & J_{\mathfrak{y}_1}.
\end{array}$$

Je vier der acht Ebenen gehen durch einen Punkt, je vier der acht Punkte liegen in einer Ebene; es lassen sich demnach die acht Punkte (ebenso die Ebenen) in vier Weisen zu je zwei Tetraedern gruppiren, von denen jedes dem andern sowohl umschrieben als auch einbeschrieben ist. Diese Anordnungen sind:

$$\begin{array}{ll}
\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3\mathfrak{M}_4 & \mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_7\mathfrak{M}_8 \\
\mathfrak{M}_5\mathfrak{M}_6\mathfrak{M}_7\mathfrak{M}_8, & \mathfrak{M}_5\mathfrak{M}_6\mathfrak{M}_3\mathfrak{M}_4, \\[1ex]
\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_6\mathfrak{M}_3\mathfrak{M}_8 & \mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_6\mathfrak{M}_7\mathfrak{M}_4 \\
\mathfrak{M}_5\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_7\mathfrak{M}_4, & \mathfrak{M}_5\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3\mathfrak{M}_8.
\end{array}$$

Die Flächen eines jeden von ihnen sind normal auf denen des zugeordneten.

Ist andererseits in einem Vierseit $a_1 b_1 a_2 b_2$ die Relation

$$a_1+a_2=b_1+b_2 \quad (\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1+\mathfrak{y}_2\mathfrak{x}_2=\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_1+\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_2)$$

erfüllt, so ist jeder Punkt der Schnittlinie $J_{\mathfrak{x}_1}J_{\mathfrak{x}_2}$ Mittelpunkt einer Kugel, welche $a_1 b_1 a_2$ berührt. Die Berührungsebenen sind parallel den Halbirungslinien der Aussenwinkel bei $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$, also unter einander parallel, normal zu $J_{\mathfrak{x}_1}J_{\mathfrak{x}_2}$. Sämmtliche Kugeln umhüllen ein Rotationshyperboloid, dessen der Schaar b angehörige Erzeugende sämmtlich $a_1 a_2$ schneiden und die Kugeln berühren. Lege ich von $\mathfrak{y}_1$ an eine der Kugeln z. B. $\mathfrak{M}$ die einzige a_2 schneidende Tangente, deren Berührungspunkt mit denen auf $a_1 b_1 a_2$ in einer Ebene liegt, und welche a_2 in $\mathfrak{z}_2$ treffen möge, so ist nach § 2

$$\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1+\mathfrak{z}_2\mathfrak{x}_2 = \mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_1+\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_2;$$

andererseits ist

$$\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1+\mathfrak{y}_2\mathfrak{x}_2 = \mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_1+\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_2;$$

es müsste also

$$\mathfrak{z}_2\mathfrak{y}_2 = \mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_2-\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_2$$

sein. Da dies nicht möglich ist, wenn $\mathfrak{z}_2\mathfrak{y}_2$ verschiedene Punkte sind, fällt $\mathfrak{z}_2\mathfrak{y}_2$ zusammen; b_2 ist eine der Regelschaar b angehörige Gerade, und es

schneiden sich $J_{\mathfrak{x}_1} J_{\mathfrak{x}_2} J_{\mathfrak{y}_2} J_{\mathfrak{y}_1}$ in einer Geraden, deren Punkte sämmtlich Mittelpunkte von $a_1 b_1 a_2 b_2$ in einer Ebene berührenden Kugeln sind. Diesen Mittelpunkten ordnen sich offenbar die im allgemeinen Fall mit $\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}_3 \mathfrak{M}_4$ bezeichneten ein; sie sind nämlich die Schnittpunkte der Axe mit den Ebenen $A_{\mathfrak{x}_1} A_{\mathfrak{x}_2} A_{\mathfrak{y}_2} A_{\mathfrak{y}_1}$, also die Mitten der Kugeln, welche das Vierseit $a_1 b_1 a_2 b_2$ in seinen Ecken $\mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 \mathfrak{y}_2 \mathfrak{y}_1$ berühren. Dagegen bleiben die Kugelmittelpunkte $\mathfrak{M}_5 \mathfrak{M}_6 \mathfrak{M}_7 \mathfrak{M}_8$ unabhängig von der Kugelschaar bestehen, da jeder von ihnen zwar in einer der Ebenen $J_{\mathfrak{x}_1} J_{\mathfrak{x}_2} J_{\mathfrak{y}_2} J_{\mathfrak{y}_1}$, aber nicht in ihrer gemeinschaftlichen Schnittgeraden liegt. Von den beiden im allgemeinen Fall einander gleichzeitig um- und einbeschriebenen Tetraedern

$$\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}_3 \mathfrak{M}_4$$
$$\mathfrak{M}_5 \mathfrak{M}_6 \mathfrak{M}_7 \mathfrak{M}_8$$

reduciren sich die Ecken des ersteren auf die Schnittpunkte einer Geraden mit den Flächen des zweiten, seine Flächen auf den Ebenenbüschel $J_{\mathfrak{x}_1} J_{\mathfrak{x}_2} J_{\mathfrak{y}_2} J_{\mathfrak{y}_1}$.

Besteht endlich zwischen den Seiten eines Vierseits die Relation $a_1 - a_2 = b_1 - b_2$, so lässt sich in ganz ähnlicher Weise darthun, dass $a_1 b_1 a_2 b_2$ von unendlich vielen Kugeln berührt werden, deren Centren auf der gemeinschaftlichen Geraden der Ebenen $J_{\mathfrak{x}_1} A_{\mathfrak{x}_2} J_{\mathfrak{y}_2} A_{\mathfrak{y}_1}$ liegen. Dieser Geraden gehören auch die im allgemeinen Fall mit $\mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}_4 \mathfrak{M}_5 \mathfrak{M}_7$ bezeichneten Punkte an; die betreffenden Kugeln berühren in den Ecken $\mathfrak{y}_1 \mathfrak{x}_2 \mathfrak{y}_2 \mathfrak{x}_1$. Die Kugelmittelpunkte $\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_3 \mathfrak{M}_6 \mathfrak{M}_8$ bleiben unabhängig hiervon bestehen und bilden ein Tetraeder, auf dessen Seiten $\mathfrak{M}_5 \mathfrak{M}_7 \mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}_4$ liegen. Für die Relation $a_1 - a_2 = b_2 - b_1$ liegen $\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_3 \mathfrak{M}_6 \mathfrak{M}_8$ in der Schnittgeraden der Ebenen $A_{\mathfrak{x}_1} J_{\mathfrak{x}_2} A_{\mathfrak{y}_2} J_{\mathfrak{y}_1}$ und auf den Seitenflächen des Tetraeders $\mathfrak{M}_5 \mathfrak{M}_7 \mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}_4$.

Es giebt also im allgemeinen acht Kugeln, welche die Seiten eines beliebigen räumlichen Vierseits berühren. Ist in einem räumlichen Vierseit die Summe irgend zweier Seiten gleich der Summe der andern, so wird das Vierseit von unendlich vielen Kugeln berührt, deren Mittelpunkte auf einer Geraden liegen; ausserdem giebt es noch vier Berührungskugeln, welche dieser Schaar nicht angehören.

§ 4.

Construirt man von einem Punkte $\mathfrak{x}_1$ der die Kugel $\mathfrak{M}$ im Punkte $\mathfrak{A}_1$ berührenden Tangente a_1 die beiden Tangenten b_1 und c_1, welche die

Kugel in $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{C}_1$ berühren, die Tangente a_2 in $\mathfrak{x}_2$ und $\mathfrak{y}_2$ schneiden; von $\mathfrak{x}_2$ und $\mathfrak{y}_2$ die Tangenten c_2 und b_2, welche a_2 in $\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{y}_1$ schneiden, die Kugel in $\mathfrak{C}_2$ und $\mathfrak{B}_2$ berühren, so fallen $\mathfrak{z}_1\mathfrak{y}_1$ im Allgemeinen nicht zusammen; thäten sie es in einem besonderen Falle, so hätte man ein Tetraeder mit den Gegenkanten a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2, welche sämmtlich von der Kugel $\mathfrak{M}$ berührt werden. Ich bezeichne ein solches Tetraeder zur Abkürzung als T_K.

Durchläuft $\mathfrak{x}_1$ die Gerade a_1, so sind die Punktreihen $\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2\mathfrak{z}_1$ und ebenso $\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_2\mathfrak{y}_1$ projectivisch, mithin auch $\mathfrak{z}_1\mathfrak{y}_1$ unter einander projectivisch; sie können also, ohne congruent zu sein, zwei gemeinschaftliche Punktepaare haben. Diese gemeinschaftlichen Punktepaare sind $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{f}_1$; ihnen entsprechen auf a_2 $\mathfrak{e}_2$ und $\mathfrak{A}_2$. In diesen Fällen aber ist das Tetraeder ein uneigentliches; es hat entweder $\mathfrak{A}_1\mathfrak{e}_2$ oder $\mathfrak{f}_1\mathfrak{A}_2$ zu Doppelecken, die Geraden $\mathfrak{A}_1\mathfrak{e}_2$ oder $\mathfrak{f}_1\mathfrak{A}_2$ zu vierfachen Kanten, a_1 und a_2 zu einem Paar Gegenkanten. Ausser diesen uneigentlichen Tetraedern giebt es also keine, deren Kanten von $\mathfrak{M}$ berührt werden und für welche die beliebig angenommenen Tangenten a_1a_2 ein Paar Gegenkanten sind. Es muss demnach für a_1a_2 eine Bedingung bestehen; ist eine solche vorhanden, so sind die Punktreihen $\mathfrak{z}_1\mathfrak{y}_1$ congruent, jeder Punkt $\mathfrak{x}_1$ auf a_1 kann dann zur Ecke eines T_K gewählt werden, welches dadurch vollständig bestimmt ist*). Da $\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1$ zwei projectivische Punktreihen sind und $\mathfrak{x}_1$ als Element der Punktreihe $\mathfrak{x}$ den Punkt $\mathfrak{y}_1$ ebenso bestimmt wie als Element der Punktreihe $\mathfrak{y}$, so bilden $\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1$ eine Involution mit den Doppelpunkten $\mathfrak{A}_1\mathfrak{f}_1$; ebenso $\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_2$ mit den Doppelpunkten $\mathfrak{A}_2\mathfrak{e}_2$.

Dasselbe Resultat ergiebt sich auf elementarerem Wege: Die Berührungspunkte der Kanten eines T_K liegen nach Seite 329 zu je vieren auf drei sich rechtwinklig schneidenden Kreisen:

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2 \equiv \beta, \quad \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2 \equiv \gamma, \quad \mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2 \equiv \alpha\ ^{**}).$$

Bezeichne ich den spitzen Neigungswinkel der Tangente a_1 gegen Kreis β mit φ, so ist $\angle\, a_1\gamma = 90^0 - \varphi$, und weil b_2 sich an a_1a_2 anlehnt, $\angle\, b_2\beta = \varphi$; $\angle\, b_2\alpha = 90^0 - \varphi$, weil $\angle\, \beta\alpha = 90^0$; $\angle\, c_1\alpha = 90^0 - \varphi$, $\angle\, c_1\gamma = \varphi$, weil c_1 sich an b_1b_2 anlehnt und $\angle\, \alpha\gamma = 90^0$ ist. Nun ist aber, weil c_1 sich auch

---

*) Legt man im allgemeinen Falle von $\mathfrak{z}_1\mathfrak{y}_1$ weiter die Tangenten b_3c_3 bis zum Schnitt mit a_3, von diesen Schnittpunkten aus die Tangenten c_4b_4 u. s. w., so zeigt sich ebenso wie beim Tetraeder, dass die Reihe sich immer schliesst, wenn sie es einmal thut.

**) Die Bezeichnung ist hier, um die frühere nicht zu ändern, nicht ganz symmetrisch gewählt.

an $a_1 a_2$ anlehnt, $\angle c_1\gamma = a_1\gamma = 90^0 - \varphi$; mithin ist $\varphi = 90^0 - \varphi$, also $\varphi = 45^0$. Dasselbe gilt für alle Kanten des T_K.

Zwei Tangenten $a_1 a_2$ einer Kugel können nur dann Gegenkanten eines der Kugel umschriebenen T_K sein, wenn sie gegen die Kreise $\beta\gamma$ unter 45^0 geneigt sind; oder wenn die Winkel $\mathfrak{f}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{e}_2 = \mathfrak{f}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{e}_2 = 90^0$ sind.

Ist diese Bedingung erfüllt, so giebt es unendlich viele T_K mit den Gegenkanten $a_1 a_2$. Denn schneide ich die Kreise $\beta\gamma$ rechtwinklig durch einen Kreis α, der durch die zu $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$ conjugirte Gerade $\alpha_1\alpha_2$ gehen muss, in $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2$, und construire in diesen Punkten die Tangenten $b_1 b_2 c_1 c_2$, welche $a_1 a_2$ schneiden, so sind diese gegen $\beta\gamma$ sowohl wie gegen α unter 45^0 geneigt; es müssen also die Tangenten $c_1 c_2$ auch die Tangenten $b_1 b_2$ schneiden, weil sie gegen deren Halbirungskreis α mit ihnen gleiche Neigung haben. Da nun $a_1 b_1 c_1$ nicht in einer Ebene liegen, so schneiden sie sich in einem Punkte; ebenso $a_1 b_2 c_2$, $a_2 b_1 c_2$, $a_2 b_2 c_1$.

Die Geraden $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2$ schneiden sich in einem Punkte $\mathfrak{P}$, dem Schnittpunkt der Ebenen $\alpha\beta\gamma$, und es ist $\mathfrak{P}\mathfrak{A}_1.\mathfrak{P}\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{P}\mathfrak{B}_1.\mathfrak{P}\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{P}\mathfrak{C}_1.\mathfrak{P}\mathfrak{C}_2$. Die Ebenen $\alpha\beta\gamma$ sind, da die auf ihnen liegenden Kugelkreise einander rechtwinklig schneiden, conjugirt, bilden also ein Polardreiflach mit den Kanten $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2$. Ist π die Polarebene von $\mathfrak{P}$, so enthält sie die Schnittgeraden $l_1 l_2 l_3$ der Tangentialebenen in $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2$. Diese Geraden sind zu $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2$ conjugirt und bestimmen mit ihnen ein Polartetraeder. Demnach werden die sich in l_2 schneidenden Tangentialebenen an $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2$ durch die conjugirten Ebenen $\gamma\pi$ harmonisch getrennt. Diese vier Ebenen aber schneiden die Gerade a_1 in $\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{f}_1$, a_2 in $\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_2\mathfrak{A}_2\mathfrak{e}_2$; mithin werden die Punkte $\mathfrak{A}_1\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{A}_2\mathfrak{e}_2$ durch die Ecken aller möglichen T_K harmonisch getrennt. Hierdurch ist die Zusammengehörigkeit der Punkte $\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1$ bestimmt. Es gehören zu einander $\mathfrak{r}_{1\infty}$ und die Mitte $\mathfrak{o}$ von $\mathfrak{A}_1\mathfrak{f}_1$; ebenso die mit $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}'_1$ bezeichneten Punkte, welche dem Punkt $\mathfrak{p}_{2\infty}$ zugeordnet sind. Ziehen wir die Lage der Tangenten $b_1 b_2$ in Betracht, so ergiebt sich nach der schon früher angewendeten Ueberlegung: 1) liegen $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}_1$ auf den Strecken $\mathfrak{r}_{1\infty}\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{o}\mathfrak{p}'_1$, so gilt die Relation $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$; 2) liegen $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}_1$ auf den Strecken $\mathfrak{p}_1\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{p}'_1\mathfrak{A}_1$, oder $\mathfrak{o}\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{r}_{1\infty}\mathfrak{f}_1$, so ist $a_1 - a_2 = b_1 - b_2$. Hiernach ergeben sich zwei Möglichkeiten der Lage der Kugel zum Tetraeder: 1) die Kugel berührt sämmtliche Kanten des Tetraeders innerhalb der Seitenstrecken; es ist $a_1 + a_2 = b_1 + b_2 = c_1 + c_2$; 2) die Kugel berührt drei in einer Ebene liegende Kanten z. B. $a_1 b_2 c_2$ auf den

Seitenstrecken, die drei anderen auf den Verlängerungen über die Schnittpunkte mit $a_2 b_2 c_2$ hinaus; alsdann ist $a_1 - a_2 = b_1 - b_2 = c_1 - c_2$.

Von zwei Kugeln können die Kanten eines Tetraeders nur in dem noch specielleren Falle berührt werden, wenn die Bedingungen 1) und 2) gleichzeitig gelten, das Tetraeder also ein gleichschenkliges mit regulärer Basis ist.

Ist zunächst nur eine die Kugel $\mathfrak{M}$ im Punkte $\mathfrak{A}_1$ berührende Tangente a_1 gegeben, so giebt es durch jeden Punkt $\mathfrak{A}_2$ der Kugel nur eine Tangente a_2, welche mit a_1 als Gegenkante ein T_K bestimmt. Ich finde dieselbe, indem ich in $\mathfrak{A}_2$ die Tangentialebenen α_2 construire, welche a_1 in $\mathfrak{f}_1$ schneiden möge; alsdann ist die in α_2 liegende zu $\mathfrak{A}_2 \mathfrak{f}_1 \equiv b_\mathfrak{f}$ normale Tangente die verlangte. Jede der verlangten Tangenten a_2 schneidet die in $\mathfrak{A}_1$ auf a_1 normale Tangente $b_\mathfrak{e}$ in einem Punkte $\mathfrak{e}_2$ der zu $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2$ conjugirten Geraden. Von einem beliebigen Punkte des Raumes aus giebt es zwei Tangenten an $\mathfrak{M}$, welche $b_\mathfrak{e}$ schneiden: ***Es giebt durch jeden Punkt des Raumes zwei Tangenten der Kugel*** $\mathfrak{M}$, ***welche mit*** a_1 ***als Gegenkante je eine Unendlichkeit von Tetraedern*** T_K ***erzeugen; ebenso giebt es in jeder Ebene zwei derartige Linien;*** denn jede Ebene schneidet $b_\mathfrak{e}$ in einem Punkte, von dem aus, wofern die Ebene die Kugel schneidet, innerhalb der Ebene zwei reelle Tangenten möglich sind.

Sind zwei beliebige Gerade des Raumes $a_1 a_2$ als Gegenkanten eines T_K gegeben, so ist der Berührungspunkt $\mathfrak{A}_1$ auf a_1 noch frei zu wählen; alsdann ist $b_\mathfrak{e} \equiv \mathfrak{A}_1 \mathfrak{e}_2$ diejenige Gerade der Ebene $\mathfrak{A}_1 a_2$, welche durch $\mathfrak{A}_1$ geht und zu a_1 normal ist. Man hat dann, um Punkt $\mathfrak{A}_2$ zu finden, nur $\mathfrak{e}_2 \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{e}_2 \mathfrak{A}_1$ zu machen, was auf zwei Arten geschehen kann; alsdann ist der Kugelmittelpunkt $\mathfrak{M}$ als Schnittpunkt der in $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ auf $a_1 a_2$ normalen Ebenen mit der Symmetrieebene von $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2$ bestimmt.

Soll ein ebenes Dreiseit $a_2 b_2 c_2$ zu einem T_K ergänzt werden, so gehören diejenigen Kugeln, denen dasselbe umschrieben werden kann, vier Kugelbüscheln an, deren Schnittkreise die vier Berührungskreise von $a_2 b_2 c_2$ sind. Legt man an eine dieser Kugeln von den Punkten $b_2 c_2$, $c_2 a_2$, $a_2 b_2$ aus diejenigen Tangenten, welche die zu $a_2 b_2 c_2$ in ihren Berührungspunkten normalen Tangenten schneiden, so sind dies die Kanten von zwei derselben Kugel umschriebenen Tetraedern. Mit gegebenem Radius sind acht das Dreiseit $a_2 b_2 c_2$ berührende Kugeln möglich, wofern der gegebene Radius grösser ist als die Radien jedes der $a_2 b_2 c_2$ berührenden Kreise. Es giebt

also im allgemeinen $16 T_K$ mit gegebener Basis, welche einer Kugel von gegebenem Radius umschrieben sind. Je zwei dieser T_K sind in Bezug auf die Ebene $a_2 b_2 c_2$ symmetrisch.

Ein Dreikant $a_1 b_1 c_1$ lässt sich in sechzehn Arten zu Tetraedern ergänzen, welche derselben Kugel umschrieben sind; je zwei von diesen sind auch hier symmetrisch. Denn es giebt acht Kugeln mit gegebenem Radius, welche ein Dreikant berühren; man erhält die fehlenden Kanten $a_2 b_2 c_2$, indem man die Ebenen $b_1 c_1$, $c_1 a_1$, $a_1 b_1$ durch die zu $a_1 b_1 c_1$ in ihren Berührungspunkten normalen Tangenten schneidet und von diesen Schnittpunkten aus die innerhalb der Ebenen möglichen beiden Tangenten an die Kugel legt.

Breslau, den 4. December 1881.

On Certain Definite Integrals.

(By *John C. Malet,* Queens College Cork.)

It may be proved by well-known transformations of elliptic functions or by direct substitution, that the differential equation

$$\frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}}+\frac{dy}{\sqrt{(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)}} = 0$$

is satisfied by the relation

$$x-\alpha = (\gamma-\alpha)\frac{y-\beta}{y-\gamma}.$$

Let us now make this substitution in the definite integral

$$\int_\beta^\alpha \frac{\log(x-\alpha)\,dx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}},$$

and remarking that when $x=\alpha$, $y=\beta$ and vice versa; writing also for shortness

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \equiv X,$$

we get the identity

$$(1.)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_\beta^\alpha \frac{\log(x-\alpha)}{\sqrt{X}}\,dx - \int_\beta^\alpha \frac{\log(x-\beta)}{\sqrt{X}}\,dx \\ \displaystyle+\int_\beta^\alpha \frac{\log(x-\gamma)}{\sqrt{X}}\,dx - \log(\gamma-\alpha)\int_\beta^\alpha \frac{dx}{\sqrt{X}} \equiv 0. \end{cases}$$

In this equation interchanging α and β we get

$$(2.)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{\log(x-\beta)}{\sqrt{X}}\,dx - \int_\alpha^\beta \frac{\log(x-\alpha)}{\sqrt{X}}\,dx \\ \displaystyle+\int_\alpha^\beta \frac{\log(x-\gamma)}{\sqrt{X}}\,dx - \log(\gamma-\beta)\int_\alpha^\beta \frac{dx}{\sqrt{X}} \equiv 0; \end{cases}$$

hence subtracting (2.) from (1.) we get the formula

$$(3.)\quad \int_\beta^\alpha \frac{\log(x-\gamma)}{\sqrt{X}}dx = \tfrac{1}{2}\{\log(\gamma-\alpha)+\log(\gamma-\beta)\}\int_\beta^\alpha \frac{dx}{\sqrt{X}}.$$

As each side of this equation may contain both real and imaginary parts, it is necessary to examine the resulting formulae in two cases, viz. when γ is the greatest or least of the quantities α, β, γ which I suppose to be all real. The case of γ being between α and β is easily seen to be included in these cases.

I[st]. Let $\alpha > \beta > \gamma$, then multiplying each side of (3.) by $\sqrt{-1}$ and taking the real part of each side, we deduce the formula

$$(4.)\quad \int_\beta^\alpha \frac{\log(x-\gamma)}{\sqrt{-X}}dx = \log\sqrt{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}\int_\beta^\alpha \frac{dx}{\sqrt{-X}}.$$

II[d]. Let $\gamma > \beta > \alpha$, we get in a similar manner

$$\int_\alpha^\beta \frac{\log(\gamma-x)}{\sqrt{-X}}dx = \log\sqrt{(\gamma-\beta)(\gamma-\alpha)}\int_\alpha^\beta \frac{dx}{\sqrt{-X}}.$$

Hence we see that the definite integrals

$$\int_\alpha^\beta \frac{\log(x-\gamma)}{\sqrt{-X}}dx \quad \text{or} \quad \int_\alpha^\beta \frac{\log(\gamma-x)}{\sqrt{-X}}dx$$

where

$$X = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

and γ is the least or the greatest of the three real quantities α, β, γ, can be expressed each as an elliptic function of the first kind.

Let us now consider the case when X has four factors. Let

$$X = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta).$$

We find as before that the differential equation

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0$$

(where $Y = (y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)$)
is satisfied by the relation

$$(\alpha-\gamma)\frac{x-\beta}{x-\alpha} = (\beta-\delta)\frac{y-\gamma}{y-\delta}.$$

Hence making this substitution in

$$\int_\gamma^\beta \frac{\log(x-\beta)}{\sqrt{X}}dx - \int_\gamma^\beta \frac{\log(x-\alpha)}{\sqrt{X}}dx,$$

we get the identity

Now for convenience let us call the integrals

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log\sin\theta}{\varDelta(k,\theta)}\,d\theta,\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log\cos\theta}{\varDelta(k,\theta)}\,d\theta,\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log\varDelta(k,\theta)}{\varDelta(k,\theta)}\,d\theta$$

L, M and N, and let L', M', N' denote the values of L, M and N when k is changed to k' where $k^2+k'^2=1$; also, after *Jacobi*, let K and K' be the complete elliptic functions of the first kind with k and k' for moduli.

Now by the transformation

$$\sin\varphi = \frac{1}{\varDelta(k',\psi)}$$

we get

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\sin^{-1}\frac{1}{k}} \frac{\log\sin\varphi}{\varDelta(k,\varphi)}\,d\varphi = \sqrt{-1}\,N',$$

$$\int_0^{\sin^{-1}\frac{1}{k}} \frac{d\varphi}{\varDelta(k,\varphi)} = K-\sqrt{-1}\,K',$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\sin^{-1}\frac{1}{k}} \frac{\log\dfrac{\varDelta(k,\varphi)}{\cos\varphi}}{\varDelta(k,\varphi)}\,d\varphi = \sqrt{-1}\,\{L'-M'+\log(\sqrt{-1})K'\}.$$

Hence we have

$$\lambda\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log\sin\theta}{\varDelta(\lambda,\theta)}\,d\theta = L+\sqrt{-1}\,N'+\log k\,(K-\sqrt{-1}\,K'),$$

$$\lambda\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log\dfrac{\cos\theta}{\varDelta(\lambda,\theta)}}{\varDelta(\lambda,\theta)}\,d\theta = N-M+\sqrt{-1}\,(L'-M'+\log(\sqrt{-1})K').$$

Hence substituting in identity (10.) we have the identity

$$L+M-N+K\log k-\sqrt{-1}\log(\sqrt{-1})K'+\sqrt{-1}\,(N'+M'-L'-K'\log k) \equiv 0.$$

Hence equating to 0 separately the real and imaginary parts of this expression we get

$$L+M-N+K\log k-\sqrt{-1}\log(\sqrt{-1})K' = 0,$$
$$L'-M'-N'+K'\log k = 0,$$

or in this latter equation changing k' to k, and remembering identity (10.) we have for the determination of L, M and N the three equations

$$L+M-N+K\log k-K'\sqrt{-1}\log\sqrt{-1} = 0,$$
$$L-M-N+K\log k' = 0,$$
$$L-M+N = 0.$$

Hence we have

$$N = \tfrac{1}{2}K\log k',$$
$$M = \tfrac{1}{2}K\log\frac{k'}{k}+\frac{\sqrt{-1}\log(-1)}{4}K',$$
$$L = -\tfrac{1}{2}K\log k+\frac{\sqrt{-1}\log(-1)}{4}K'.$$

To determine what value of $\log(-1)$ must be taken, let $k=1$ in the last equation, and we find

$$\frac{\sqrt{-1}\log(-1)}{4}\cdot\frac{\pi}{2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\log\sin\theta}{\cos\theta}d\theta=\int_0^1\frac{\log x}{1-x^2}dx=-\frac{\pi^2}{8}.$$

Hence we have the formulae

$$(a.)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\log\sin\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}d\theta = -\tfrac{1}{2}K\log k-\frac{\pi}{4}K',$$

$$(b.)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\log\cos\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}d\theta = \tfrac{1}{2}K\log\frac{k'}{k}-\frac{\pi}{4}K',$$

$$(c.)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\log\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}d\theta = \tfrac{1}{2}K\log k'.$$

Equation $(a.)$ is a known formula of use in the theory of elliptic functions (see *Schlömilch*'s Elliptic Functions).

I may add that there are other limits of integration besides $\frac{\pi}{2}$ and 0 for which the integrals L, M and N can be expressed in terms of elliptic functions. For example the integral

$$\int_\beta^\alpha\frac{\log\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}d\theta$$

can be expressed in terms of an elliptic function of the first kind if

$$\sin\beta = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}.$$

This follows at once by transforming the integral

Hieraus folgt, dass wenn zwei *Bernoulli*sche Zahlen denselben Werth haben sollen, eine derselben B_1 oder B_2 oder B_3 sein muss. ***Ein*** Fall dieser Art ist bekannt, nämlich $B_2 = B_4 = \frac{1}{30}$. Aus dem Vorhergehenden folgt aber, dass dies der ***einzige*** Fall ist. Dass nämlich unter den fünf ersten *Bernoulli*schen Zahlen nicht noch einmal eine solche Gleichheit vorkommt, ergiebt sich aus ihren bekannten Werthen. Nun ist $B_1 = \frac{1}{6}$ kleiner als $B_6 = \frac{691}{2730}$, also überhaupt $B_1 < B_\nu$, sobald $\nu > 5$. Ferner sind $B_2 = \frac{1}{30}$ und $B_3 = \frac{1}{42}$ kleiner als $B_5 = \frac{5}{66}$ und daher auch allgemein $< B_\nu$, sobald $\nu > 4$.

Göttingen, den 5. Januar 1882.

Preisaufgabe der *Jablonowski*schen Gesellschaft zu Leipzig für das Jahr 1885.

Die Theorie der Flächen dritter Ordnung hat durch die neueren Untersuchungen von *Schläfli, Klein, Zeuthen* und *Rodenberg* einen gewissen Abschluss erhalten, insofern es jetzt möglich ist, die Gesammtheit der bei diesen Flächen auftretenden Gestalten mit Leichtigkeit zu überblicken. Hieran anknüpfend wünscht die Gesellschaft

eine in gleichem Sinne durchzuführende Untersuchung der allgemeinen Flächen vierter Ordnung.

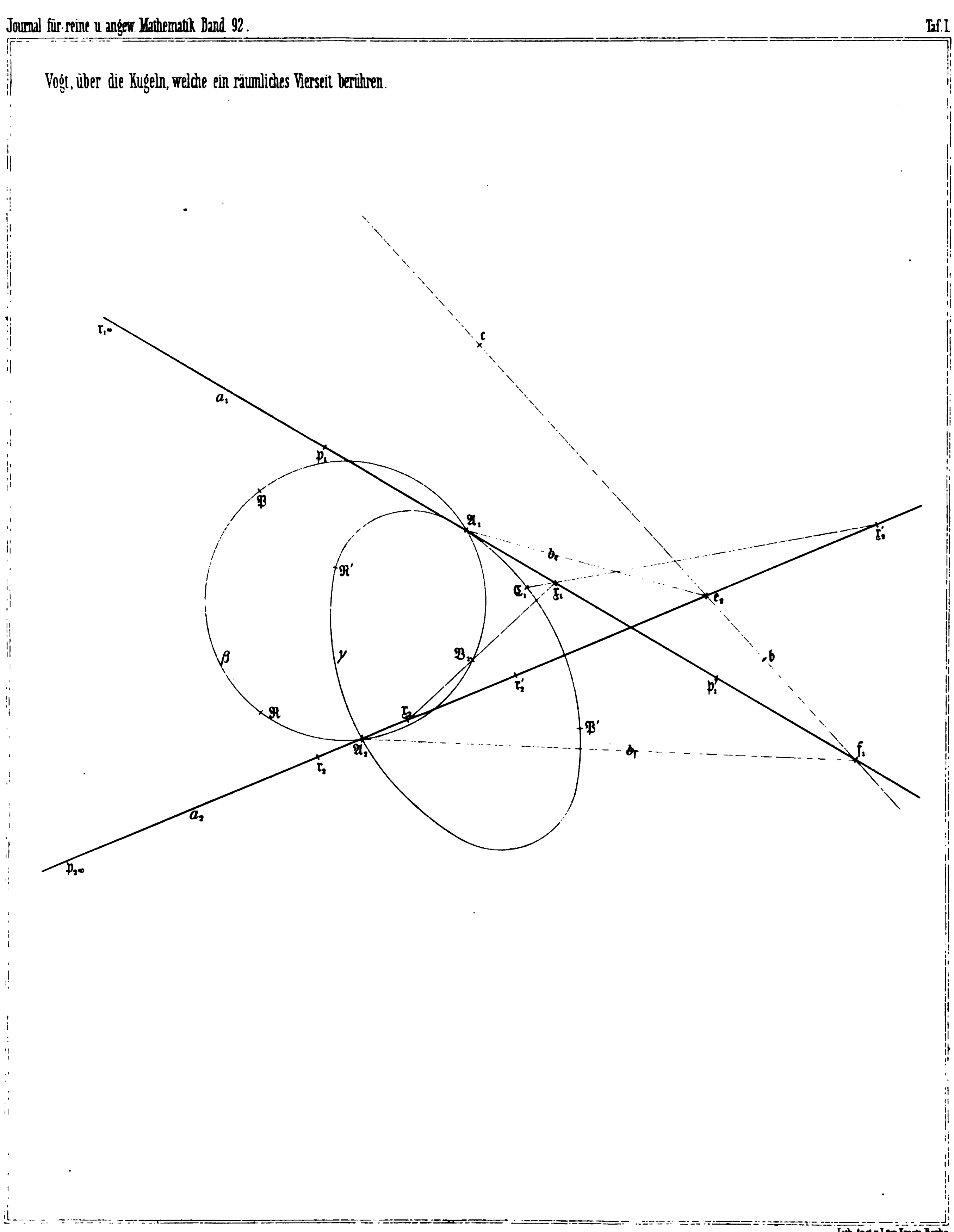
Die mannigfachen Betrachtungen über die Gestalten der Complexfläche, welche *Plücker* in seiner „Neuen Geometrie des Raumes" gegeben hat, sowie die allgemeinen Untersuchungen von *Rohn* über *Kummer*sche Flächen werden dabei ebenso als Vorarbeiten zu betrachten sein, wie die Angaben von *Zeuthen* und *Crone* über die Flächen vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt. Preis 700 Mark.

Die anonym einzureichenden Bewerbungsschriften sind, wo nicht die Gesellschaft im besonderen Falle ausdrücklich den Gebrauch einer anderen Sprache gestattet, in *deutscher, lateinischer* oder *französischer* Sprache zu verfassen, müssen deutlich geschrieben und *paginirt,* ferner mit einem *Motto* versehen und von einem versiegelten Couvert begleitet sein, das auf der Aussenseite das Motto der Arbeit trägt, inwendig den Namen und Wohnort des Verfassers angiebt. Die Zeit der Einsendung endet mit dem *30. No-*

vember des angegebenen Jahres, und die Zusendung ist an den Secretär der Gesellschaft zu richten. Die Resultate der Prüfung der eingegangenen Schriften werden durch die Leipziger Zeitung im März oder April des folgenden Jahres bekannt gemacht.

Die gekrönten Bewerbungsschriften werden Eigenthum der Gesellschaft, welche sich vorbehält, im gegebenen Falle die dafür ausgesetzten Preise nach ihrem Ermessen von 700 Mark auf 1000 Mark zu erhöhen.

Vogt, über die Kugeln, welche ein räumliches Vierseit berühren.



Lith. Anst. v. Leop. Kraatz Berlin.

